

MÉCANIQUE DES STRUCTURES II
I3-6
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES D'ÉLASTICITÉ

FRANK PETITJEAN

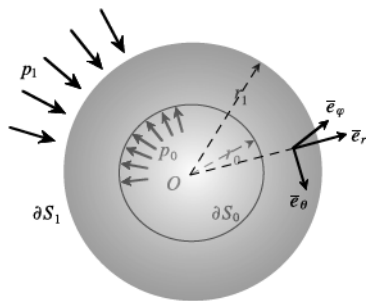
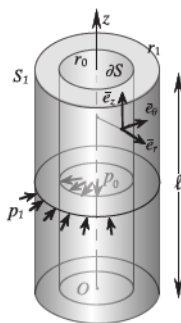
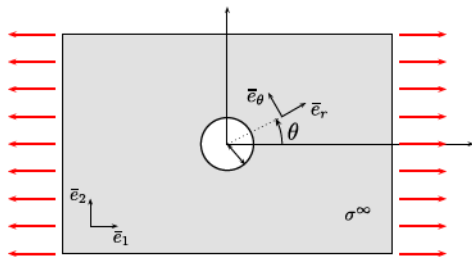
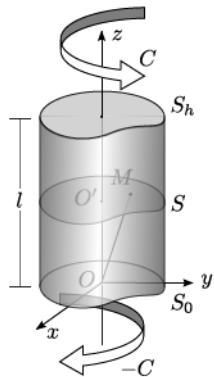
Icam Toulouse
Département Génie Mécanique

Janvier 2012

Contenu de la formation

- 4 séances de cours (8h)
- 2 séances de Travaux Dirigés (4h)
- Examen : 2 heures sans document
- 2 bancs de Travaux Pratiques
 - ▶ Concentrations de contraintes
 - ▶ Cylindres sous pression.

Objectifs du cours : résoudre les problèmes d'élasticité ci-dessous



Sommaire du cours

Chapitre I. Les équations de l'élasticité

Chapitre II. Résolution de problèmes

Chapitre I - Les équations de l'élasticité

Objectifs :

1. Rappeler les équations principales de l'élasticité
 - (a) Équations d'équilibre
 - (b) Relations cinématiques
 - (c) Loi de comportement
2. Donner les principales méthodes de résolution

Plan du paragraphe

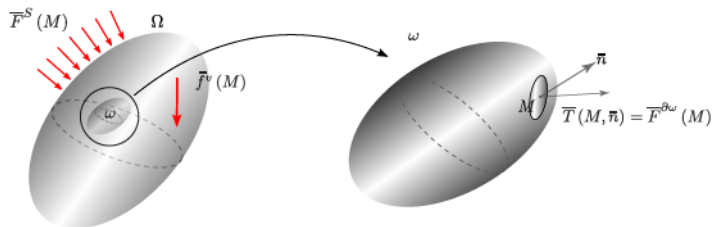
- 5 Les équations d'équilibre
 - Principe fondamental de la dynamique
 - Conditions de raccordement
 - Torsion d'un cylindre de section circulaire
 - Statique du cylindre sous pression
- 4 Relations cinématiques
- 3 Loi de comportement thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Principe fondamental de la dynamique

On considère un milieu continu Ω en mouvement sous l'action de forces extérieures, forces de volume \bar{f}^v , forces de surface \bar{F}^S . On cherche à exprimer l'équilibre mécanique d'une sous partie quelconque $\omega \subset \Omega$.

Bilan des forces exercées sur ω :

- forces de volumes $\bar{f}^v(M)$ dans ω ;
- forces surfaciques $\bar{F}^{\partial\omega}(M)$ exercées sur le contour $\partial\omega$ de ω (actions de contact de Ω sur ω).



Hypothèse et théorème de Cauchy. Ces actions de contact ne dépendent que de la normale en M à $\partial\omega$ et de façon linéaire :

$$\bar{F}^{\partial\omega}(M) = \bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n}$$

Théorème (Principe fondamental de la dynamique)

Pour tout Ω et pour toute sous partie $\omega \subset \Omega$, le torseur des efforts extérieurs est égale au torseur des quantités d'accélération, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [\bar{R}_{mvt}, \bar{M}_{mvt}] = [\bar{R}_{ext}, \bar{M}_{ext}] \quad \forall \omega \subset \Omega$$

Équations du mouvement

En tout point $M \in \Omega$, on a

$$\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v - \operatorname{div} \bar{\sigma} = 0 \quad (1)$$

Équations d'équilibre

Lorsque l'accélération γ est nulle (mouvement de translation uniforme) on obtient les équations d'équilibre en tout point $M \in \Omega$

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} + \bar{f}^v = 0 \quad (2)$$

Plan du paragraphe

- ⑤ Les équations d'équilibre
 - Principe fondamental de la dynamique
 - **Conditions de raccordement**
 - Torsion d'un cylindre de section circulaire
 - Statique du cylindre sous pression

- ④ Relations cinématiques

- ③ Loi de comportement thermoélastique

- ② Formulation du problème d'équilibre élastique

Conditions de raccordement

Définition

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est dit **statiquement admissible (SA)** s'il vérifie l'équation d'équilibre (2) et les conditions limites sur $\delta_f \Omega$:

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \bar{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

Conditions de raccordement

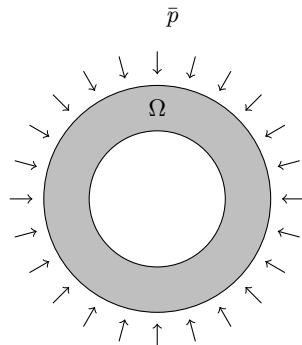
Définition

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est dit **statiquement admissible (SA)** s'il vérifie l'équation d'équilibre (2) et les conditions limites sur $\delta_f \Omega$:

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \bar{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

Exemple :

Tube cylindrique sous pression extérieure



Conditions de raccordement

Définition

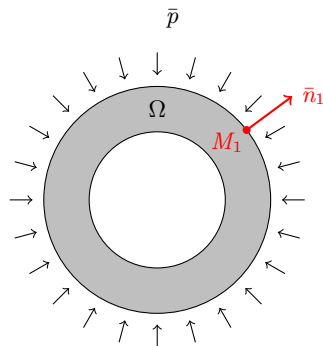
Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est dit **statiquement admissible (SA)** s'il vérifie l'équation d'équilibre (2) et les conditions limites sur $\delta_f \Omega$:

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \bar{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

Exemple :

Tube cylindrique sous pression extérieure

$$\begin{aligned} \bar{T}(M_1, \bar{n}_1) &= -p \bar{e}_r \\ \Rightarrow \sigma_{rr} &= -p, \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{zr} = 0 \end{aligned}$$



Conditions de raccordement

Définition

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est dit **statiquement admissible (SA)** s'il vérifie l'équation d'équilibre (2) et les conditions limites sur $\delta_f \Omega$:

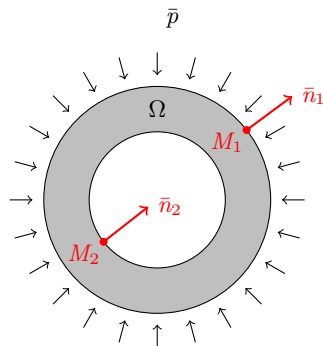
$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \bar{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

Exemple :

Tube cylindrique sous pression extérieure

$$\begin{aligned} \bar{T}(M_1, \bar{n}_1) &= -p \bar{e}_r \\ \Rightarrow \sigma_{rr} &= -p, \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{zr} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}(M_2, \bar{n}_2) &= 0 \\ \Rightarrow \sigma_{rr} &= \sigma_{\theta r} = \sigma_{zr} = 0 \end{aligned}$$



Plan du paragraphe

- 5 Les équations d'équilibre
 - Principe fondamental de la dynamique
 - Conditions de raccordement
 - Torsion d'un cylindre de section circulaire
 - Statique du cylindre sous pression
- 4 Relations cinématiques
- 3 Loi de comportement thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Torsion d'un cylindre de section circulaire

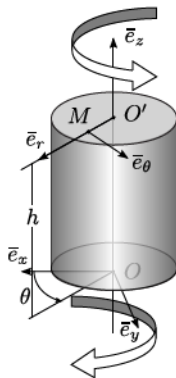
On considère un cylindre Ω d'axe Oz , de hauteur h , de base circulaire R .

Un point $M \in \Omega$ est repéré par ces coordonnées cylindriques r, θ, z .

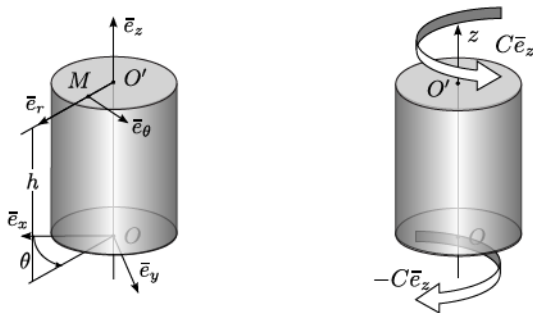
Ce cylindre est soumis à un système de forces inconnues qui conduit à un champ de contrainte en tout point M de la forme :

$$\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}(r) = \beta r (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) \quad (3)$$

où β est une constante.



L'objectif de cette étude est de montrer que le champ de force surfacique appliqué sur les faces inférieures et supérieures forment un couple de torsion $\bar{M} = C\bar{e}_z$ où C est une constante à déterminer en fonction des données du problème.



La résolution est décomposée en 3 étapes et proposée sous la forme de 3 exercices.

Exercice

Exercice 1-1. Écrire dans la base $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$, associée au repère cylindrique, la matrice des composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$ donnée par

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \beta r (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

Réponse :

Exercice

Exercice 1-1. Écrire dans la base $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$, associée au repère cylindrique, la matrice des composantes de $\bar{\sigma}$ donnée par

$$\bar{\sigma}(M) = \beta r (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

Réponse :

La matrice s'écrit dans le repère cylindrique $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$

$$[\sigma]_{(r,\theta,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta r \\ 0 & \beta r & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice

Exercice 1-2. On cherche à déterminer le système de forces extérieures $\bar{F}^S(M), \bar{f}^v(M)$ qui soit statiquement admissible avec le champ de contrainte donné.

- 1 Calculer $\text{div } \bar{\sigma}(M)$ et en déduire la valeur de $\bar{f}^v(M)$.
- 2 On note $\bar{F}^{S_R}, \bar{F}^{S_0}, \bar{F}^{S_h}$ les forces surfaciques appliquées sur les contours de Ω définis respectivement par $r = R, z = 0, z = h$.
 - ▶ Préciser les conditions que doivent vérifier chacune de ces 3 forces.
 - ▶ En déduire la valeur des 3 forces de contour en fonction des données du problème.

Correction

Question 1 -

En appliquant la formule de la divergence en coordonnées cylindrique on obtient

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = 0$$

On déduit donc de l'équation d'équilibre

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} + \bar{f}^v = 0$$

que

$$\bar{f}^v (M) = 0 \quad \text{quelque soit } M \in \Omega$$

Question 2 - Conditions sur les forces de contour : elles sont données par les conditions de raccordement

$$\overline{T}(M, \bar{n}) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \overline{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

Question 2 - Conditions sur les forces de contour : elles sont données par les conditions de raccordement

$$\overline{T}(M, \bar{n}) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \overline{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

- Forces surfaciques sur la surface latérale définie par $r = R$: on a $\bar{n} = \bar{e}_r$, d'où

$$\overline{F}^{S_R}(M) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_r =$$

Question 2 - Conditions sur les forces de contour : elles sont données par les conditions de raccordement

$$\overline{T}(M, \bar{n}) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \overline{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

- Forces surfaciques sur la surface latérale définie par $r = R$: on a $\bar{n} = \bar{e}_r$, d'où

$$\overline{F}^{S_R}(M) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_r = \beta a (\bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) \bar{e}_r + \beta a (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z) \bar{e}_r = 0$$

Question 2 - Conditions sur les forces de contour : elles sont données par les conditions de raccordement

$$\overline{T}(M, \bar{n}) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \overline{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

- Forces surfaciques sur la surface latérale définie par $r = R$: on a $\bar{n} = \bar{e}_r$, d'où

$$\overline{F}^{S_R}(M) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_r = \beta a (\bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) \bar{e}_r + \beta a (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z) \bar{e}_r = 0$$

- Forces surfaciques sur la base inférieure définie par $z = 0$: on a $\bar{n} = -\bar{e}_z$, d'où

$$\overline{F}^{S_0}(M) = -\overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_z =$$

Question 2 - Conditions sur les forces de contour : elles sont données par les conditions de raccordement

$$\overline{T}(M, \bar{n}) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \overline{F}^S(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

- Forces surfaciques sur la surface latérale définie par $r = R$: on a $\bar{n} = \bar{e}_r$, d'où

$$\overline{F}^{S_R}(M) = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_r = \beta a (\bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) \bar{e}_r + \beta a (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z) \bar{e}_r = 0$$

- Forces surfaciques sur la base inférieure définie par $z = 0$: on a $\bar{n} = -\bar{e}_z$, d'où

$$\overline{F}^{S_0}(M) = -\overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_z = -\beta r \bar{e}_\theta = \overline{F}^{S_0}(r)$$

Par conséquent,

$$\left\{ F^{S_0}(M) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\beta r \\ 0 \end{array} \right\}$$

Forces surfaciques sur la surface supérieure définie par $z = h$: on a $\bar{n} = \bar{e}_z$, d'où

$$\bar{F}^{S_h}(M) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} =$$

Forces surfaciques sur la surface supérieure définie par $z = h$: on a $\bar{n} = \bar{e}_z$, d'où

$$\begin{aligned}\bar{F}^{S_h}(M) &= \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \beta r (\bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) \bar{e}_z + \beta r (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z) \bar{e}_z \\ &= 0 + \beta r \bar{e}_\theta = \bar{F}^{S_h}(r)\end{aligned}$$

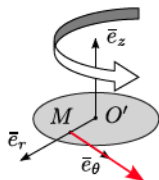
Par conséquent,

$$\left\{ F^{S_h}(M) \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Exercice

Exercice 1-3. Montrer que le torseur au point $O' = (0, 0, h)$, qui résulte de la force surfacique $\overline{F}^{S_h}(M)$, est équivalent au couple de torsion

$$C = \pi\beta\frac{R^4}{2}$$



$$\overline{F}^{S_h}(M) = \beta r \overline{e}_\theta$$

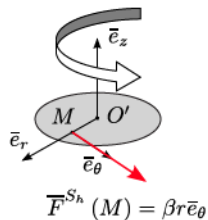
Correction

Calcul du torseur au point $O' = (0, 0, h)$ correspondant à la force surfacique

$$\overline{F}^{S_h}(M) = \beta r \bar{e}_\theta$$

Calcul de la résultante :

$$\overline{R} = \int_{S_h} \overline{F}^{S_h}(M) da =$$



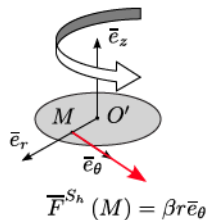
Correction

Calcul du torseur au point $O' = (0, 0, h)$ correspondant à la force surfacique

$$\overline{F}^{S_h}(M) = \beta r \bar{e}_\theta$$

Calcul de la résultante :

$$\overline{R} = \int_{S_h} \overline{F}^{S_h}(M) da = \int_0^R \int_0^{2\pi} \beta r \bar{e}_\theta \times r dr d\theta$$



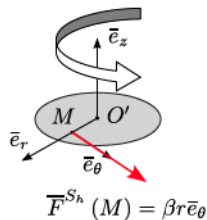
Correction

Calcul du torseur au point $O' = (0, 0, h)$ correspondant à la force surfacique

$$\overline{F}^{S_h}(M) = \beta r \bar{e}_\theta$$

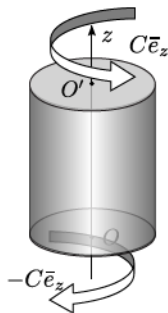
Calcul de la résultante :

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \int_{S_h} \overline{F}^{S_h}(M) da = \int_0^R \int_0^{2\pi} \beta r \bar{e}_\theta \times r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^R \beta r^2 dr \right) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \bar{e}_\theta d\theta \right)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$



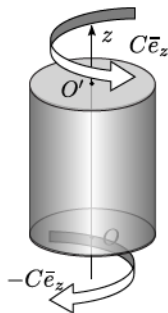
Calcul du moment :

$$\bar{M} = \int_{S_h} \overline{O'M} \wedge \bar{F}^{S_h}(M) da$$



Calcul du moment :

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \int_{S_h} \overline{O'M} \wedge \bar{F}^{S_h}(M) da \\ &= \int_{S_h} r \bar{e}_r \wedge (\beta r) \bar{e}_\theta r dr d\theta\end{aligned}$$

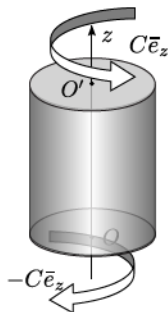


Calcul du moment :

$$\begin{aligned}
 \overline{M} &= \int_{S_h} \overline{O'M} \wedge \overline{F}^{S_h}(M) da \\
 &= \int_{S_h} r \overline{e}_r \wedge (\beta r) \overline{e}_\theta r dr d\theta \\
 &= \int_{S_h} \beta r^3 \overline{e}_z dr d\theta = C \overline{e}_z
 \end{aligned}$$

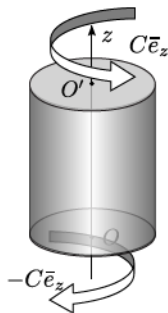
avec

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^a \beta r^3 dr d\theta =$$



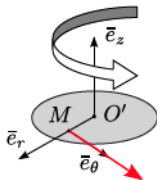
Calcul du moment :

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \int_{S_h} \overline{O'M} \wedge \bar{F}^{S_h}(M) da \\ &= \int_{S_h} r \bar{e}_r \wedge (\beta r) \bar{e}_\theta r dr d\theta \\ &= \int_{S_h} \beta r^3 \bar{e}_z dr d\theta = C \bar{e}_z\end{aligned}$$

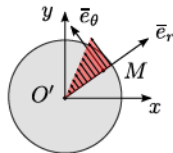


avec

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^a \beta r^3 dr d\theta = \left(\int_0^R \beta r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \pi \beta \frac{R^4}{2}$$



$$\begin{aligned}\bar{F}^{S_h}(M) &= \beta r \bar{e}_\theta \\ &= \frac{2C}{\pi R^4} r \bar{e}_\theta\end{aligned}$$



Plan du paragraphe

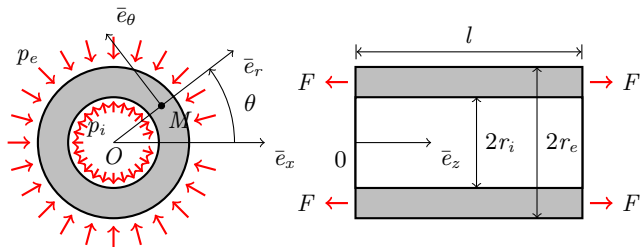
- 5 Les équations d'équilibre
 - Principe fondamental de la dynamique
 - Conditions de raccordement
 - Torsion d'un cylindre de section circulaire
 - Statique du cylindre sous pression
- 4 Relations cinématiques
- 3 Loi de comportement thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Statique d'un cylindre sous pression

Énoncé du problème :

On considère un tube cylindrique d'axe Oz , de longueur l et de rayon intérieur r_i et extérieur r_e .

Les coordonnées sont rapportées à un repère cylindrique $(Or\theta z)$.



Statique d'un cylindre sous pression

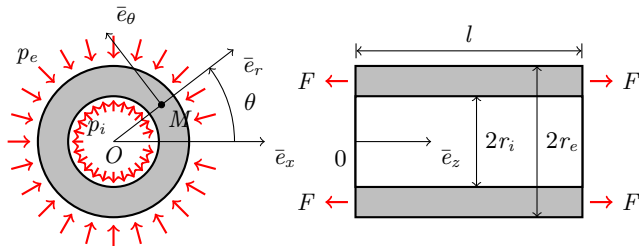
Énoncé du problème :

On considère un tube cylindrique d'axe Oz , de longueur l et de rayon intérieur r_i et extérieur r_e .

Les coordonnées sont rapportées à un repère cylindrique $(Or\theta z)$.

Ce solide est soumis aux forces surfaciques suivantes :

- à une pression intérieure p_i et une pression extérieure p_e ;



Statique d'un cylindre sous pression

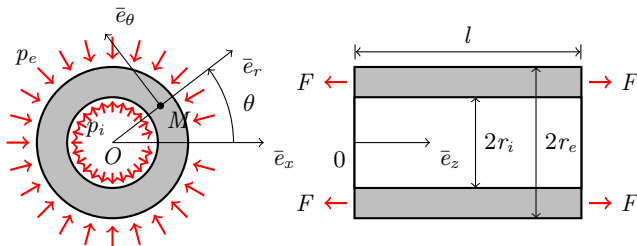
Énoncé du problème :

On considère un tube cylindrique d'axe Oz , de longueur l et de rayon intérieur r_i et extérieur r_e .

Les coordonnées sont rapportées à un repère cylindrique $(Or\theta z)$.

Ce solide est soumis aux forces surfaciques suivantes :

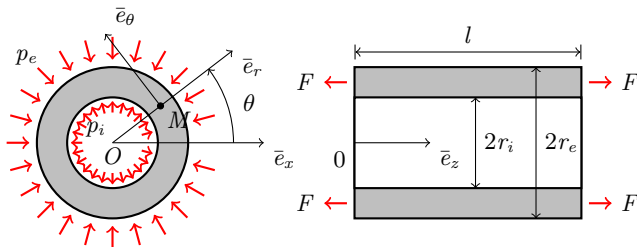
- à une pression intérieure p_i et une pression extérieure p_e ;
- à une force surfacique \bar{F} , sur les faces $z = 0$ et $z = l$, dirigée vers l'extérieur.



Objectifs de l'étude :

Exploiter les conditions imposées par l'équation d'équilibre et les conditions de raccordement pour préciser au mieux la forme du champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$, solution du problème d'élasticité.

C'est une démarche inverse au TD précédent qui est proposée puisque cette fois les conditions limites sont données et on cherche à déterminer le champ de contrainte correspondant.



Objectifs de l'étude :

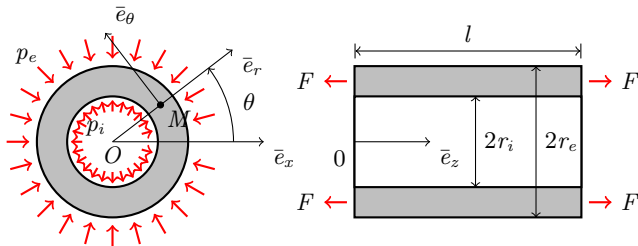
Exploiter les conditions imposées par l'équation d'équilibre et les conditions de raccordement pour préciser au mieux la forme du champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$, solution du problème d'élasticité.

C'est une démarche inverse au TD précédent qui est proposée puisque cette fois les conditions limites sont données et on cherche à déterminer le champ de contrainte correspondant.

Résolution

La résolution proposée est décomposée en 4 étapes sous la forme de 4 exercices plus un exercice complémentaire.

Toutes les composantes doivent être données dans le système de coordonnées cylindriques.



Exercice

Exercice 1-4. Vérifier que le torseur des forces extérieures est nul.

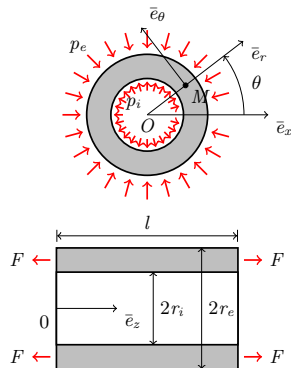
Correction

Les efforts extérieurs sont compatibles avec l'équilibre si leur torseur est nul

$$[O, \bar{R}, \bar{M}] = 0$$

Calcul de \bar{R} :

$$\bar{R} =$$



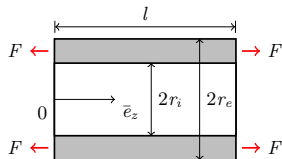
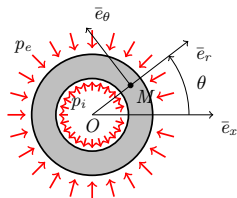
Correction

Les efforts extérieurs sont compatibles avec l'équilibre si leur torseur est nul

$$[O, \bar{R}, \bar{M}] = 0$$

Calcul de \bar{R} :

$$\bar{R} = \underbrace{\int_{z=l} F \bar{e}_z ds + \int_{z=0} (-F) \bar{e}_z ds}_0$$



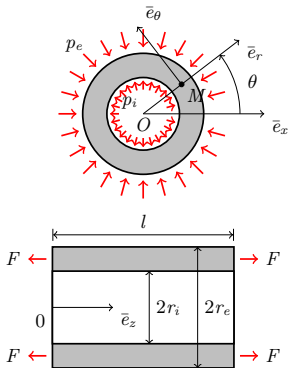
Correction

Les efforts extérieurs sont compatibles avec l'équilibre si leur torseur est nul

$$[O, \bar{R}, \bar{M}] = 0$$

Calcul de \bar{R} :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \underbrace{\int_{z=l} F \bar{e}_z ds + \int_{z=0} (-F) \bar{e}_z ds}_0 \\ &+ \underbrace{\int_{r=r_e} (-p_e) \bar{e}_r r_e d\theta dz}_0 + \underbrace{\int_{r=r_i} p_i \bar{e}_r r_i d\theta dz}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

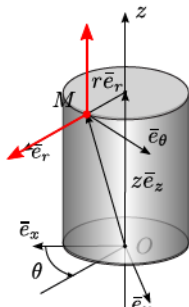


Calcul de \overline{M} :

$$\begin{aligned} \overline{M} = & \underbrace{\int_{z=l} \overline{OM} \wedge F \bar{e}_z r dr d\theta}_{I_1} + \underbrace{\int_{z=0} \overline{OM} \wedge (-F) \bar{e}_z r dr d\theta}_{I_2} \\ & + \underbrace{\int_{r=r_e} \overline{OM} \wedge (-p_e) \bar{e}_r r_e d\theta dz}_{I_3} + \underbrace{\int_{r=r_i} \overline{OM} \wedge p_i \bar{e}_r r_i d\theta dz}_{I_4} \end{aligned}$$

Pour tout point M de Ω , on peut écrire

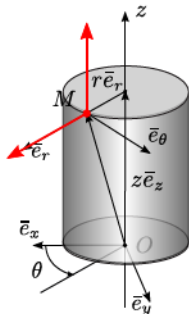
$$\overline{OM} = r \bar{e}_r + z \bar{e}_z$$



Calculons séparément chacune des 4 intégrales, avec $\overline{OM} = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z$:

$$I_1 = \int_{z=l} \overline{OM} \wedge F\bar{e}_z r dr d\theta =$$

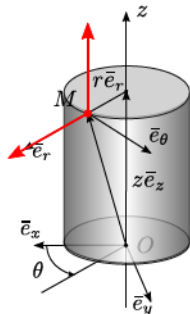
$$I_2 = \int_{z=0} \overline{OM} \wedge (-F)\bar{e}_z r dr d\theta =$$



Calculons séparément chacune des 4 intégrales, avec $\overline{OM} = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z$:

$$I_1 = \int_{z=l} \overline{OM} \wedge F\bar{e}_z r dr d\theta = \underbrace{\left(\int_{z=l} \overline{OM} r dr d\theta \right)}_{=k\bar{e}_z} \wedge F\bar{e}_z = 0$$

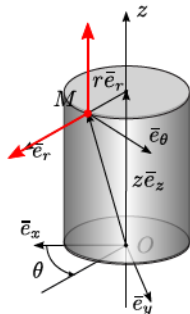
$$I_2 = \int_{z=0} \overline{OM} \wedge (-F)\bar{e}_z r dr d\theta =$$



Calculons séparément chacune des 4 intégrales, avec $\overline{OM} = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z$:

$$I_1 = \int_{z=l} \overline{OM} \wedge F\bar{e}_z r dr d\theta = \underbrace{\left(\int_{z=l} \overline{OM} r dr d\theta \right)}_{=k\bar{e}_z} \wedge F\bar{e}_z = 0$$

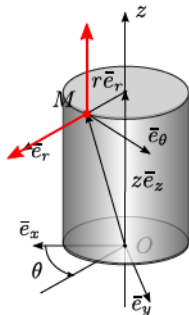
$$I_2 = \int_{z=0} \overline{OM} \wedge (-F)\bar{e}_z r dr d\theta = \underbrace{\left(\int_{z=0} \overline{OM} r dr d\theta \right)}_{=0} \wedge (-F)\bar{e}_z = 0$$



$$I_3 = \int_{r=r_e} \overline{OM} \wedge (-p_e) \bar{e}_r r_e d\theta dz =$$

=

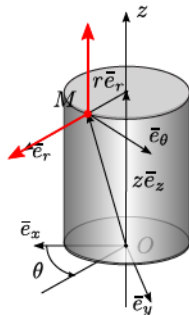
=



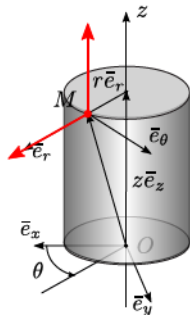
$$I_3 = \int_{r=r_e} \overline{OM} \wedge (-p_e) \bar{e}_r r_e d\theta dz = -p_e r_e \int_{r=r_e} (z \bar{e}_z + r_e \bar{e}_r) \wedge \bar{e}_r d\theta dz$$

=

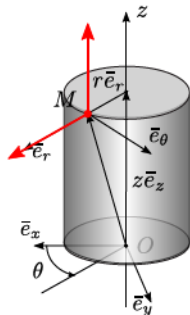
=



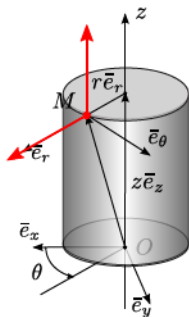
$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{r=r_e} \overline{OM} \wedge (-p_e) \bar{e}_r r_e d\theta dz = -p_e r_e \int_{r=r_e} (z \bar{e}_z + r_e \bar{e}_r) \wedge \bar{e}_r d\theta dz \\
 &= -p_e r_e \int_0^l \int_0^{2\pi} z \bar{e}_z \wedge \bar{e}_r d\theta dz \\
 &=
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{r=r_e} \overline{OM} \wedge (-p_e) \bar{e}_r r_e d\theta dz = -p_e r_e \int_{r=r_e} (z \bar{e}_z + r_e \bar{e}_r) \wedge \bar{e}_r d\theta dz \\
 &= -p_e r_e \int_0^l \int_0^{2\pi} z \bar{e}_z \wedge \bar{e}_r d\theta dz \\
 &= -p_e r_e \left(\int_0^l z dz \right) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \bar{e}_z \wedge \bar{e}_r d\theta \right)}_{\int \bar{e}_\theta d\theta = 0} = 0
 \end{aligned}$$

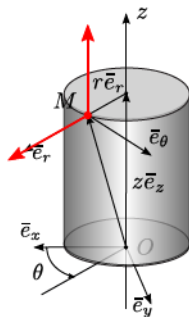


$$I_4 = \int_{r=r_i} \overline{OM} \wedge p_i \bar{e}_r r_i d\theta dz =$$



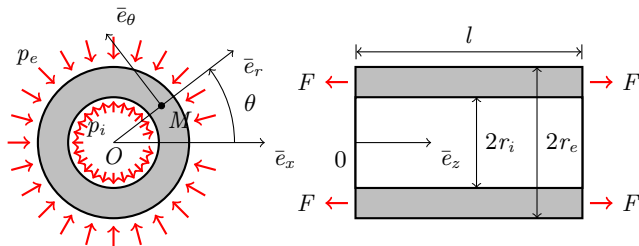
$$I_4 = \int_{r=r_i} \overline{OM} \wedge p_i \bar{e}_r r_i d\theta dz = p_i r_i \left(\int_0^l z dz \right) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \bar{e}_z \wedge \bar{e}_r d\theta \right)}_{\int \bar{e}_\theta d\theta = 0} = 0$$

Bilan : le solide est en équilibre statique



Exercice

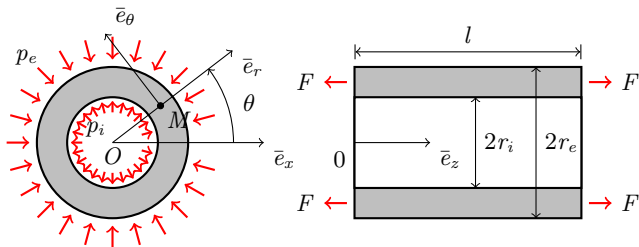
Exercice 1-5. Préciser la forme du tenseur des contraintes au point $M \in \partial\Omega$ en considérant successivement chacune des faces du solide.



Correction

Pour la face supérieure $z = l$ on a : $\bar{T}(M, \bar{e}_z) = F\bar{e}_z$, par conséquent

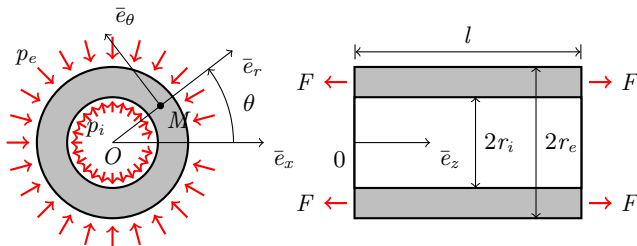
$$\bar{\sigma}(z = l) \bar{e}_z = F\bar{e}_z \quad \Leftrightarrow$$



Correction

Pour la face supérieure $z = l$ on a : $\bar{T}(M, \bar{e}_z) = F\bar{e}_z$, par conséquent

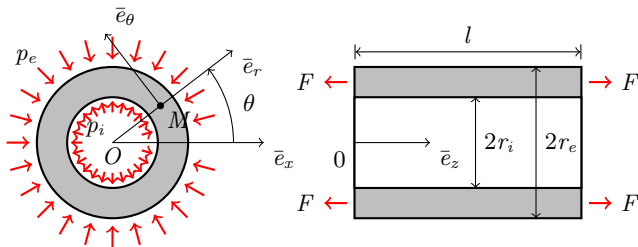
$$\bar{\sigma}(z=l)\bar{e}_z = F\bar{e}_z \quad \Leftrightarrow \quad [\sigma(z=l)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$



Correction

Pour la face inférieure $z = 0$ on a $\overline{T}(M, -\bar{e}_z) = -F\bar{e}_z$, par conséquent

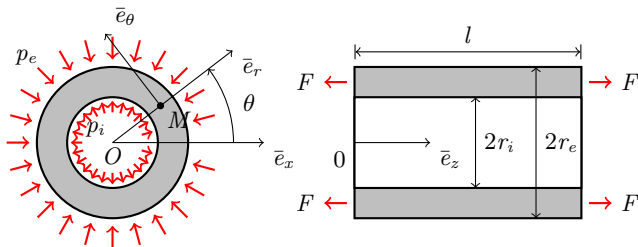
$$\bar{\sigma}(z=0)\bar{e}_z = F\bar{e}_z \quad \Leftrightarrow$$



Correction

Pour la face inférieure $z = 0$ on a $\overline{T}(M, -\bar{e}_z) = -F\bar{e}_z$, par conséquent

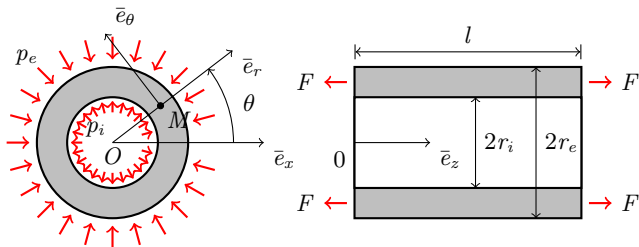
$$\bar{\sigma}(z=0)\bar{e}_z = F\bar{e}_z \quad \Leftrightarrow \quad [\sigma(z=0)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$



Correction

Pour la surface cylindrique extérieure $r = r_e$ on a $\bar{T}(M, \bar{e}_r) = -p_e \bar{e}_r$, soit

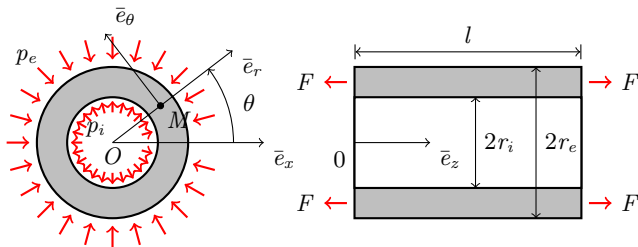
$$\bar{\sigma}(r = r_e) \bar{e}_r = -p_e \bar{e}_r \quad \Leftrightarrow$$



Correction

Pour la surface cylindrique extérieure $r = r_e$ on a $\bar{T}(M, \bar{e}_r) = -p_e \bar{e}_r$, soit

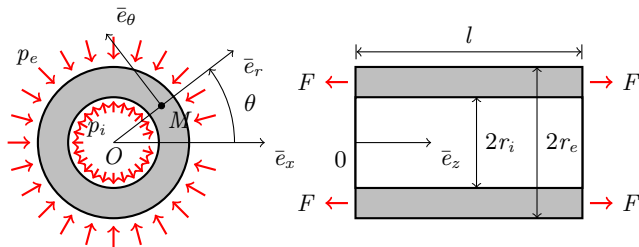
$$\bar{\sigma}(r = r_e) \bar{e}_r = -p_e \bar{e}_r \quad \Leftrightarrow \quad [\sigma(r = r_e)] = \begin{bmatrix} -p_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Correction

Pour la surface cylindrique intérieure $r = r_i$ on a $\bar{T}(M, -\bar{e}_r) = p_i \bar{e}_r$, d'où

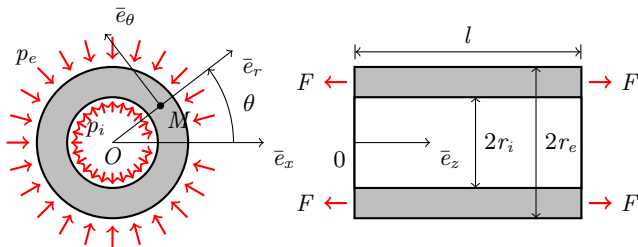
$$\bar{\sigma}(r = r_i) \bar{e}_r = -p_i \bar{e}_r \quad \Leftrightarrow$$



Correction

Pour la surface cylindrique intérieure $r = r_i$ on a $\bar{T}(M, -\bar{e}_r) = p_i \bar{e}_r$, d'où

$$\bar{\sigma}(r = r_i) \bar{e}_r = -p_i \bar{e}_r \quad \Leftrightarrow \quad [\sigma(r = r_i)] = \begin{bmatrix} -p_i & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Exercice

Exercice 1-6. Expliquer pourquoi le champ de tenseur solution $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ est nécessairement indépendant des composantes θ et z du point M , autrement dit qu'il s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \bar{\bar{\sigma}}(r) \quad \forall M \in \Omega$$

Correction

Propriété de la géométrie : le tube présente une symétrie autour de l'axe Oe_z et une invariance par translation le long de \bar{e}_z .

Correction

Propriété de la géométrie : le tube présente une symétrie autour de l'axe Oe_z et une invariance par translation le long de \bar{e}_z .

Propriété du chargement : le chargement en pression sur les surfaces extérieure et intérieure présente une symétrie de révolution et est indépendant de la variable z ;
le chargement aux extrémités présente également une symétrie de révolution.

Correction

Propriété de la géométrie : le tube présente une symétrie autour de l'axe Oe_z et une invariance par translation le long de \bar{e}_z .

Propriété du chargement : le chargement en pression sur les surfaces extérieure et intérieure présente une symétrie de révolution et est indépendant de la variable z ;
le chargement aux extrémités présente également une symétrie de révolution.

Propriété du matériau : le tube est constitué d'un matériau homogène et isotrope (la propriété d'isotropie transverse suffit).

Correction

Propriété de la géométrie : le tube présente une symétrie autour de l'axe Oe_z et une invariance par translation le long de \bar{e}_z .

Propriété du chargement : le chargement en pression sur les surfaces extérieure et intérieure présente une symétrie de révolution et est indépendant de la variable z ;
le chargement aux extrémités présente également une symétrie de révolution.

Propriété du matériau : le tube est constitué d'un matériau homogène et isotrope (la propriété d'isotropie transverse suffit).

Bilan :

Le champ de contrainte doit nécessairement être invariant par rapport aux variables (θ, z) ; on cherche donc un tenseur de la forme :

$$\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}(r) = \sigma_{ij}(r) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

c'est à dire qu'il contient 6 composantes σ_{ij} dépendant de la seule variable r .

Exercice

Exercice 1-7. Montrer qu'en tout point $M \in \Omega$ les axes $Or, O\theta, Oz$ sont principaux pour $\overline{\overline{\sigma}}(M)$.

Indications : exploiter les équations d'équilibre et les conditions de raccordement.

Exercice

Exercice 1-7. Montrer qu'en tout point $M \in \Omega$ les axes Or , $O\theta$, Oz sont principaux pour $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.

Indications : exploiter les équations d'équilibre et les conditions de raccordement.

Équations d'équilibre en coordonnées cylindrique avec $\bar{\bar{\sigma}}(M) = \bar{\bar{\sigma}}(r)$:

Exercice

Exercice 1-7. Montrer qu'en tout point $M \in \Omega$ les axes Or , $O\theta$, Oz sont principaux pour $\bar{\sigma}(M)$.

Indications : exploiter les équations d'équilibre et les conditions de raccordement.

Équations d'équilibre en coordonnées cylindrique avec $\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}(r)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0 \end{array} \right.$$

Correction

L'équation d'équilibre sur \bar{e}_θ est

$$r\sigma'_{r\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0$$

Elle est résolue par la méthode des facteurs intégrants (cf. cours d'analyse I1-I2) :

$$\sigma_{\theta r}(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

Correction

L'équation d'équilibre sur \bar{e}_θ est

$$r\sigma'_{r\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0$$

Elle est résolue par la méthode des facteurs intégrants (cf. cours d'analyse I1-I2) :

$$\sigma_{\theta r}(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

L'équation d'équilibre sur \bar{e}_z est :

$$r\sigma'_{zr} + \sigma_{zr} = 0$$

On obtient par la même méthode la solution

$$\sigma_{zr}(r) = \frac{\beta}{r}$$

Les constantes α et β sont obtenues en considérant les conditions limites en $r = r_e$ et $r = r_i$:

Les constantes α et β sont obtenues en considérant les conditions limites en $r = r_e$ et $r = r_i$:

$$\bar{\sigma}(r_e) \bar{e}_r = -p_e \bar{e}_r \quad \Rightarrow$$

Les constantes α et β sont obtenues en considérant les conditions limites en $r = r_e$ et $r = r_i$:

$$\bar{\sigma}(r_e) \bar{e}_r = -p_e \bar{e}_r \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta r}(r_e) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \sigma_{zr}(r_e) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{array} \right.$$

d'où

$$\sigma_{\theta r}(r) = \sigma_{zr}(r) = 0$$

Les constantes α et β sont obtenues en considérant les conditions limites en $r = r_e$ et $r = r_i$:

$$\bar{\sigma}(r_e) \bar{e}_r = -p_e \bar{e}_r \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta r}(r_e) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \sigma_{zr}(r_e) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{array} \right.$$

d'où

$$\sigma_{\theta r}(r) = \sigma_{zr}(r) = 0$$

On a montré précédemment, en exploitant les conditions limites en $z = 0$ et $z = l$ que

$$\bar{\sigma}(r, \theta, z = l) \bar{e}_z = \bar{\sigma}(r) \bar{e}_z = F \bar{e}_z$$

ainsi

$$\sigma_{zz}(r) = \sigma_{zz} = F; \quad \sigma_{rz}(r) = \sigma_{\theta z}(r) = 0$$

Bilan des contraintes en présence : on a

$$\bar{\bar{\sigma}}(r) = \sigma_{rr}(r) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \sigma_{zz} \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z$$

ou encore, dans le repère $Or\theta z$,

$$[\sigma(r)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ce qui montre que les axes Or , $O\theta$, Oz sont principaux pour $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ quelque soit $M \in \Omega$.

Bilan des contraintes en présence : on a

$$\bar{\bar{\sigma}}(r) = \sigma_{rr}(r) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \sigma_{zz} \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z$$

ou encore, dans le repère $Or\theta z$,

$$[\sigma(r)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ce qui montre que les axes Or , $O\theta$, Oz sont principaux pour $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ quelque soit $M \in \Omega$.

On sait de plus que

- $\sigma_{zz} = F$;

Bilan des contraintes en présence : on a

$$\bar{\bar{\sigma}}(r) = \sigma_{rr}(r) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \sigma_{zz} \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z$$

ou encore, dans le repère $Or\theta z$,

$$[\sigma(r)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ce qui montre que les axes Or , $O\theta$, Oz sont principaux pour $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ quelque soit $M \in \Omega$.

On sait de plus que

- $\sigma_{zz} = F$;
- $\sigma_{rr}(r_i) = -p_i$, $\sigma_{rr}(r_e) = -p_e$ et $\sigma_{rr}(r)$ pour $r_i < r < r_e$ est inconnu ;

Bilan des contraintes en présence : on a

$$\bar{\bar{\sigma}}(r) = \sigma_{rr}(r) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \sigma_{zz} \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z$$

ou encore, dans le repère $Or\theta z$,

$$[\sigma(r)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ce qui montre que les axes Or , $O\theta$, Oz sont principaux pour $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ quelque soit $M \in \Omega$.

On sait de plus que

- $\sigma_{zz} = F$;
- $\sigma_{rr}(r_i) = -p_i$, $\sigma_{rr}(r_e) = -p_e$ et $\sigma_{rr}(r)$ pour $r_i < r < r_e$ est inconnu ;
- la composante $\sigma_{\theta\theta}(r)$ est inconnu mais on sait qu'elle vérifie l'équation différentielle (équation d'équilibre sur \bar{e}_r) :

$$\sigma_{\theta\theta} = r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} \quad (4)$$

Formule des chaudronniers

Remarque :

Les composante σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ restent indéterminées. Pour déterminer complètement le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ il faut introduire le champ de déplacement et la loi de comportement du matériau c'est-à-dire les coefficients élastiques E, ν .

Formule des chaudronniers

Remarque :

Les composante σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ restent indéterminées. Pour déterminer complètement le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ il faut introduire le champ de déplacement et la loi de comportement du matériau c'est-à-dire les coefficients élastiques E, ν .

En exploitant l'équation d'équilibre selon la direction Or , on peut calculer la valeur moyenne de la composante $\sigma_{\theta\theta}$ le long d'un segment $[r_i, r_e]$, à θ et z donnés.

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr = \frac{p_i r_i - p_e r_e}{r_e - r_i} \quad (5)$$

Cette formule, bien connue en pratique, est appelée la **formule des chaudronniers**.

Exercice 1-8. Etablir cette formule en exploitant l'équation d'équilibre sur \bar{e}_r précédente.

Correction

On a

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr$$

Correction

On a

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \left(r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} \right) dr$$

Correction

On a

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \left(r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} \right) dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \frac{d}{dr} (r \sigma_{rr}) dr\end{aligned}$$

Correction

On a

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \left(r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} \right) dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \frac{d}{dr} (r \sigma_{rr}) dr = \frac{1}{r_e - r_i} (r_e \sigma_{rr}(r_e) - r_i \sigma_{rr}(r_i))\end{aligned}$$

d'où la formule des chaudronniers :

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{p_i r_i - p_e r_e}{r_e - r_i}$$

Plan du paragraphe

- 5 Les équations d'équilibre
- 4 Relations cinématiques
 - Champ de déformation
 - Conditions de compatibilités
 - Conditions d'appuis
- 3 Loi de comportement thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Relations cinématiques - Champ de déformation

Soit $\bar{u}(M)$ le champ de déplacement dans le solide Ω .

Dans le cadre des hypothèses des petites perturbations (HPP), le champ de déformation associé à $\bar{u}(M)$ est défini par :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + {}^t \overline{\nabla u} \right)$$

Relations cinématiques - Champ de déformation

Soit $\bar{u}(M)$ le champ de déplacement dans le solide Ω .

Dans le cadre des hypothèses des petites perturbations (HPP), le champ de déformation associé à $\bar{u}(M)$ est défini par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + {}^t \overline{\nabla u} \right)$$

En explicitant l'expression de $\overline{\nabla u}$ dans les différents systèmes de coordonnées (cf. annexe), on obtient les expressions suivantes pour les composantes de $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

Cas des coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

Plan du paragraphe

- 5 Les équations d'équilibre
- 4 Relations cinématiques
 - Champ de déformation
 - Conditions de compatibilités
 - Conditions d'appuis
- 3 Loi de comportement thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Conditions de compatibilités

Problème : pour un champ de tenseurs symétriques $\bar{\epsilon}(\bar{x})$ donné à quelles conditions il existe un champ de déplacement $\bar{u}(\bar{x})$ dont $\bar{\epsilon}$ soit le champ de gradient symétrisé associé.

Conditions de compatibilités

Problème : pour un champ de tenseurs symétriques $\bar{\epsilon}(\bar{x})$ donné à quelles conditions il existe un champ de déplacement $\bar{u}(\bar{x})$ dont $\bar{\epsilon}$ soit le champ de gradient symétrisé associé.

Théorème (Conditions de compatibilité)

Soit $\bar{\epsilon}(\bar{x})$ un champ de tenseurs symétriques. Il existe un champ de vecteurs $\bar{u}(\bar{x})$ tel que

$$\bar{\epsilon}(M) = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + {}^t \overline{\nabla u} \right) \quad \forall \bar{x}$$

si et seulement si, $\forall i, j, k, l$,

$$\epsilon_{ik,jl} + \epsilon_{jl,ik} = \epsilon_{il,jk} + \epsilon_{jk,il} \quad (6)$$

Plan du paragraphe

- #5 Les équations d'équilibre
- #4 Relations cinématiques
 - Champ de déformation
 - Conditions de compatibilités
 - Conditions d'appuis
- #3 Loi de comportement thermoélastique
- #2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Conditions d'appuis

Il est possible d'imposer un déplacement sur une partie donnée $\delta_u \Omega$ de la frontière :

$$\bar{u}(M) = \bar{u}^d(M) \quad \text{pour tout } M \in \delta_u \Omega \quad (7)$$

Conditions d'appuis

Il est possible d'imposer un déplacement sur une partie donnée $\delta_u \Omega$ de la frontière :

$$\bar{u}(M) = \bar{u}^d(M) \quad \text{pour tout } M \in \delta_u \Omega \quad (7)$$

Définition

Le champ de déplacement $\bar{u}(M)$ est dit cinématiquement admissible (CA) s'il vérifie les conditions de déplacements imposés sur $\delta_u \Omega$:

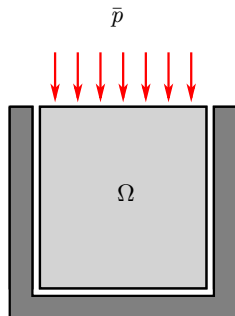
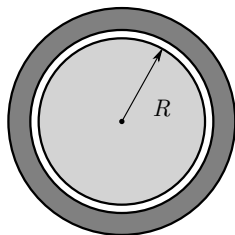
$$\bar{u}(M) = \bar{u}^d(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega$$

Exemple

Tube cylindrique dans un manchon rigide

$$\bar{u}(M) = 0 \quad \text{pour tout } M$$

$$\text{tel que } r = R \text{ et } z = 0$$



Plan du paragraphe

- 5 Les équations d'équilibre
- 4 Relations cinématiques
- 3 Loi de comportement thermoélastique
 - Cas élastique (loi de Hooke)
 - Cas thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Cas élastique (loi de Hooke)

Loi de Hooke

La loi de comportement linéarisée d'un matériau isotrope est donnée par

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = \lambda (\text{tr}\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbb{1}} + 2\mu\bar{\varepsilon} \quad (8)$$

Les scalaires λ, μ sont appelés les **coefficients d'élasticité de Lamé**.

Le relation inverse s'écrit simplement en fonction de module d'Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\bar{\varepsilon}(\bar{\sigma}) = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr}\bar{\sigma}) \bar{\mathbb{1}} \quad (9)$$

Autres expressions de la loi de Hooke

En décomposant les tenseurs en leur partie sphérique et déviatorique, on peut écrire la loi de Hooke sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_m \\ \bar{s} = 2\mu \bar{e} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_m = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_m \\ \bar{e} = \frac{1}{2\mu} \bar{s} \end{array} \right. \quad (10)$$

Autres expressions de la loi de Hooke

En décomposant les tenseurs en leur partie sphérique et déviatorique, on peut écrire la loi de Hooke sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_m \\ \bar{s} = 2\mu \bar{e} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_m = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_m \\ \bar{e} = \frac{1}{2\mu} \bar{s} \end{array} \right. \quad (10)$$

Relations entre les coefficients élastiques :

Coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G$$

Module d'Young et coefficient de Poisson :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Module de compressibilité (*Bulk modulus*)

$$3K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

Plan du paragraphe

- 5 Les équations d'équilibre
- 4 Relations cinématiques
- 3 Loi de comportement thermoélastique
 - Cas élastique (loi de Hooke)
 - Cas thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique

Cas thermoélastique

Principe : aux charges mécaniques s'ajoutent des variations de température qui induisent des dilatations thermiques.

Cas thermoélastique

Principe : aux charges mécaniques s'ajoutent des variations de température qui induisent des dilatations thermiques.

On note $\theta = T - T_0$ où T_0 la température de référence

Définitions

La loi de comportement thermoélastique linéarisée d'un matériau isotrope est donnée par

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = \lambda(\text{tr}\bar{\varepsilon})\bar{\mathbf{1}} + 2\mu\bar{\varepsilon} - 3K\alpha\theta\bar{\mathbf{1}} \quad (11)$$

où K est le module de compressibilité et α le coefficient de dilatation thermique (en K^{-1}).

Cas thermoélastique

Principe : aux charges mécaniques s'ajoutent des variations de température qui induisent des dilatations thermiques.

On note $\theta = T - T_0$ où T_0 la température de référence

Définitions

La loi de comportement thermoélastique linéarisée d'un matériau isotrope est donnée par

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = \lambda (\text{tr}\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbb{1}} + 2\mu\bar{\varepsilon} - 3K\alpha\theta\bar{\mathbb{1}} \quad (11)$$

où K est le module de compressibilité et α le coefficient de dilatation thermique (en K^{-1}).

La relation inverse s'écrit en fonction de E, ν, α :

$$\bar{\varepsilon}(\bar{\sigma}) = \frac{1+\nu}{E}\bar{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\bar{\sigma})\bar{\mathbb{1}} + \alpha\theta\bar{\mathbb{1}} \quad (12)$$

elle fait clairement apparaître la partition

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^{th}$$

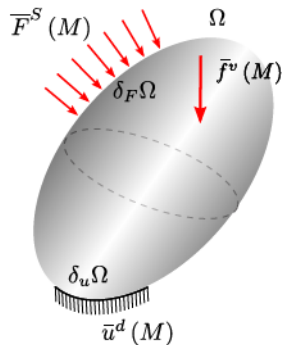
où $\bar{\varepsilon}^{th} = \alpha\theta\bar{\mathbb{1}}$ est la composante d'origine thermique qui est purement volumique.

Plan du paragraphe

- 5 Les équations d'équilibre
- 4 Relations cinématiques
- 3 Loi de comportement thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique
 - Le problème d'équilibre élastique
 - Méthodes de résolution

Formulation du problème d'équilibre élastique

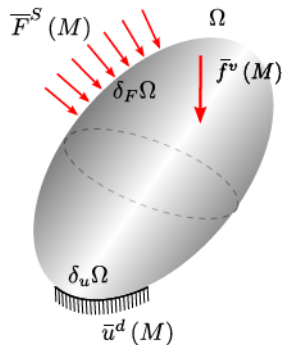
On considère un milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en équilibre sous l'action des forces \bar{f}^v dans Ω , \bar{F}^S sur une partie $\delta_F\Omega$ de $\delta\Omega$ et avec le déplacement imposé \bar{u}_d sur $\delta_u\Omega$.



Formulation du problème d'équilibre élastique

On considère un milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en équilibre sous l'action des forces \bar{f}^v dans Ω , \bar{F}^S sur une partie $\delta_F \Omega$ de $\delta \Omega$ et avec le déplacement imposé \bar{u}_d sur $\delta_u \Omega$.

Le problème d'équilibre élastique consiste à déterminer les champs $\bar{\sigma}(M)$ et $\bar{u}(M)$ dans Ω vérifiant :



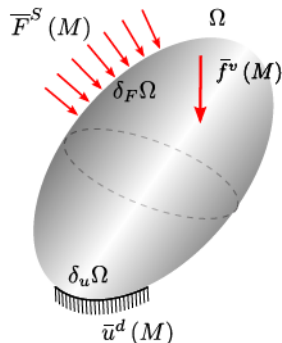
Formulation du problème d'équilibre élastique

On considère un milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en équilibre sous l'action des forces \bar{f}^v dans Ω , \bar{F}^S sur une partie $\delta_F\Omega$ de $\delta\Omega$ et avec le déplacement imposé \bar{u}_d sur $\delta_u\Omega$.

Le problème d'équilibre élastique consiste à déterminer les champs $\bar{\sigma}(M)$ et $\bar{u}(M)$ dans Ω vérifiant :

- 1 L'équation d'équilibre dans Ω :

$$\operatorname{div}\bar{\sigma} + \bar{f}^v = 0 \quad (13)$$



Formulation du problème d'équilibre élastique

On considère un milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en équilibre sous l'action des forces \bar{f}^v dans Ω , \bar{F}^S sur une partie $\delta_F\Omega$ de $\delta\Omega$ et avec le déplacement imposé \bar{u}_d sur $\delta_u\Omega$.

Le problème d'équilibre élastique consiste à déterminer les champs $\bar{\sigma}(M)$ et $\bar{u}(M)$ dans Ω vérifiant :

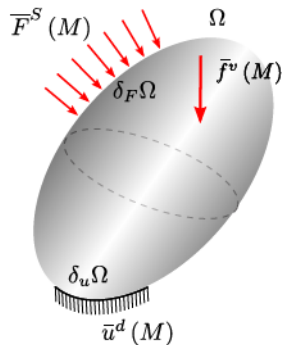
- 1 L'équation d'équilibre dans Ω :

$$\operatorname{div}\bar{\sigma} + \bar{f}^v = 0 \quad (13)$$

- 2 Les conditions limites sur $\delta\Omega$

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{F}^S \quad \text{sur} \quad \delta_F\Omega \quad (14)$$

$$\bar{u} = \bar{u}^d \quad \text{sur} \quad \delta_u\Omega \quad (15)$$



Formulation du problème d'équilibre élastique

On considère un milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en équilibre sous l'action des forces \bar{f}^v dans Ω , \bar{F}^S sur une partie $\delta_F\Omega$ de $\delta\Omega$ et avec le déplacement imposé \bar{u}_d sur $\delta_u\Omega$.

Le problème d'équilibre élastique consiste à déterminer les champs $\bar{\sigma}(M)$ et $\bar{u}(M)$ dans Ω vérifiant :

- ❶ L'équation d'équilibre dans Ω :

$$\operatorname{div}\bar{\sigma} + \bar{f}^v = 0 \quad (13)$$

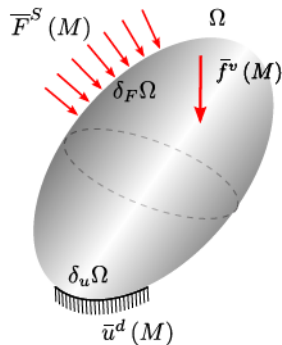
- ❷ Les conditions limites sur $\delta\Omega$

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{F}^S \quad \text{sur } \delta_F\Omega \quad (14)$$

$$\bar{u} = \bar{u}^d \quad \text{sur } \delta_u\Omega \quad (15)$$

- ❸ L'équation de comportement

$$\bar{\sigma} = \lambda (\operatorname{tr}\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbb{1}} + 2\mu\bar{\varepsilon} \quad (16)$$



Formulation du problème d'équilibre élastique

On considère un milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en équilibre sous l'action des forces \bar{f}^v dans Ω , \bar{F}^S sur une partie $\delta_F\Omega$ de $\delta\Omega$ et avec le déplacement imposé \bar{u}_d sur $\delta_u\Omega$.

Le problème d'équilibre élastique consiste à déterminer les champs $\bar{\sigma}(M)$ et $\bar{u}(M)$ dans Ω vérifiant :

- 1 L'équation d'équilibre dans Ω :

$$\operatorname{div}\bar{\sigma} + \bar{f}^v = 0 \quad (13)$$

- 2 Les conditions limites sur $\delta\Omega$

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{F}^S \quad \text{sur } \delta_F\Omega \quad (14)$$

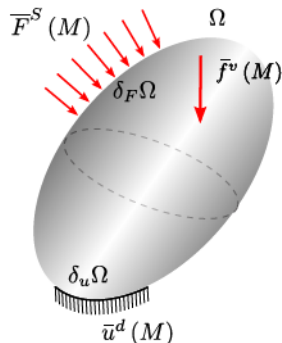
$$\bar{u} = \bar{u}^d \quad \text{sur } \delta_u\Omega \quad (15)$$

- 3 L'équation de comportement

$$\bar{\sigma} = \lambda (\operatorname{tr}\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbb{1}} + 2\mu\bar{\varepsilon} \quad (16)$$

- 4 Les relations cinématiques

$$\bar{\varepsilon}(M) = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + {}^t\overline{\nabla u} \right) \quad (17)$$



Propriété d'unicité

On a le résultat fondamentale suivant :

Théorème d'unicité

La solution du problème d'équilibre élastique définie par les équations (13) à (17) est unique.

Plus précisément,

Propriété d'unicité

On a le résultat fondamentale suivant :

Théorème d'unicité

La solution du problème d'équilibre élastique définie par les équations (13) à (17) est unique.

Plus précisément,

- il y a unicité des champs $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ dans Ω ;

Propriété d'unicité

On a le résultat fondamentale suivant :

Théorème d'unicité

La solution du problème d'équilibre élastique définie par les équations (13) à (17) est unique.

Plus précisément,

- il y a unicité des champs $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ dans Ω ;
- il y a unicité du champ \bar{u} dans Ω , à un déplacement de corps rigide près.

Propriété d'unicité

On a le résultat fondamentale suivant :

Théorème d'unicité

La solution du problème d'équilibre élastique définie par les équations (13) à (17) est unique.

Plus précisément,

- il y a unicité des champs $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ dans Ω ;
- il y a unicité du champ \bar{u} dans Ω , à un déplacement de corps rigide près.

Conséquence :

Quelque soit la méthode de construction employée, si les équations (13) à (17) sont vérifiées la solution obtenue est l'unique solution.

Plan du paragraphe

- 5 Les équations d'équilibre
- 4 Relations cinématiques
- 3 Loi de comportement thermoélastique
- 2 Formulation du problème d'équilibre élastique
 - Le problème d'équilibre élastique
 - Méthodes de résolution

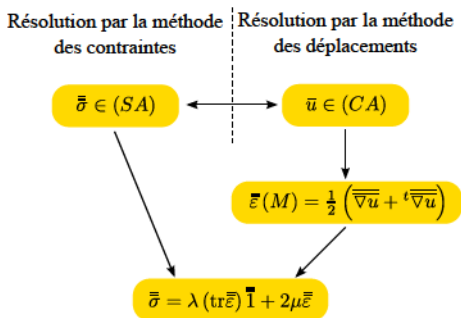
Méthodes de résolution

Important : Il n'existe pas de méthode analytique systématique et entièrement déductive qui permette de construire la solution du problème d'équilibre élastique à partir des données et des équations du modèle.

Méthodes de résolution

Important : Il n'existe pas de méthode analytique systématique et entièrement déductive qui permette de construire la solution du problème d'équilibre élastique à partir des données et des équations du modèle.

Dans la suite, on présente 2 méthodes classiques :

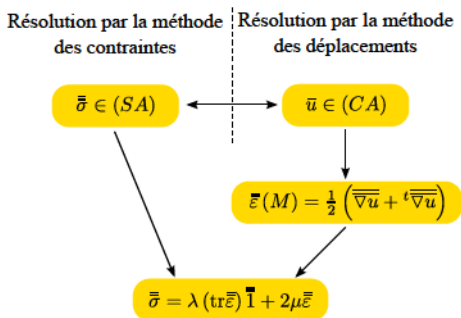


Méthodes de résolution

Important : Il n'existe pas de méthode analytique systématique et entièrement déductive qui permette de construire la solution du problème d'équilibre élastique à partir des données et des équations du modèle.

Dans la suite, on présente 2 méthodes classiques :

- **La méthode en contrainte :** on fait le choix d'une forme particulière pour $\bar{\sigma}$ et on parcourt le schéma en partant de l'extrémité gauche.

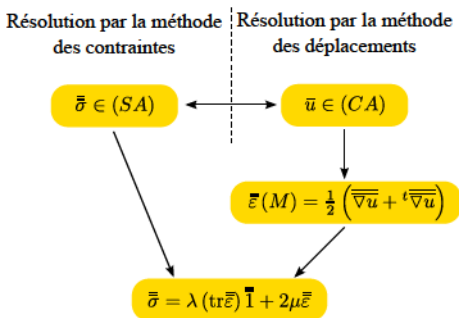


Méthodes de résolution

Important : Il n'existe pas de méthode analytique systématique et entièrement déductive qui permette de construire la solution du problème d'équilibre élastique à partir des données et des équations du modèle.

Dans la suite, on présente 2 méthodes classiques :

- **La méthode en contrainte :** on fait le choix d'une forme particulière pour $\bar{\sigma}$ et on parcourt le schéma en partant de l'extrémité gauche.
- **La méthode en déplacement :** on fait le choix d'une forme particulière pour \bar{u} et on parcourt le schéma en partant de l'extrémité droite.



Méthode des contraintes : Équations de Beltrami

La méthode des contraintes fait appel aux **équations de Beltrami**; celles-ci sont obtenues selon le schéma suivant :

Principes :

- 1 On choisie $\bar{\sigma}(M) \in (SA)$ comme inconnu principal du problème d'élasticité, : on parcourt le schéma de résolution depuis l'extrémité gauche.

Méthode des contraintes : Équations de Beltrami

La méthode des contraintes fait appel aux **équations de Beltrami**; celles-ci sont obtenues selon le schéma suivant :

Principes :

- ❶ On choisie $\bar{\sigma}(M) \in (SA)$ comme inconnu principal du problème d'élasticité, : on parcourt le schéma de résolution depuis l'extrémité gauche.
- ❷ Les équations de **Beltrami** permettent d'exprimer les conditions d'intégrabilités de $\bar{\varepsilon}$ sur le champ de contrainte solution :

$$(1 + \nu) \operatorname{div}(\nabla \bar{\sigma}) + \bar{\nabla}(\bar{\nabla}(\operatorname{tr} \bar{\sigma})) = 0 \quad (18)$$

ou encore, en coordonnées cartésiennes :

$$(1 + \nu) \Delta \sigma_{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\operatorname{tr} \bar{\sigma}) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

Remarques :

- 1 Cette méthode est utilisée lorsque les données permettent de proposer une forme particulière pour le champ $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ solution.

Remarques :

- 1 Cette méthode est utilisée lorsque les données permettent de proposer une forme particulière pour le champ $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ solution.
- 2 Si le champ de contrainte $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ est constant (*i.e.* $\bar{\bar{\sigma}}(M) = \bar{\bar{\sigma}}$) les équations de Beltrami sont automatiquement vérifiées.

Remarques :

- 1 Cette méthode est utilisée lorsque les données permettent de proposer une forme particulière pour le champ $\bar{\sigma}(M)$ solution.
- 2 Si le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est constant (*i.e.* $\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}$) les équations de Beltrami sont automatiquement vérifiées.

Méthode des contraintes - Bilan

Remarques :

- 1 Cette méthode est utilisée lorsque les données permettent de proposer une forme particulière pour le champ $\bar{\sigma}(M)$ solution.
- 2 Si le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est constant (*i.e.* $\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}$) les équations de Beltrami sont automatiquement vérifiées.

Méthode des contraintes - Bilan

Parmi les champs de contrainte $\bar{\sigma} \in (SA)$ on cherche le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que :

Remarques :

- 1 Cette méthode est utilisée lorsque les données permettent de proposer une forme particulière pour le champ $\bar{\sigma}(M)$ solution.
- 2 Si le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est constant (*i.e.* $\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}$) les équations de Beltrami sont automatiquement vérifiées.

Méthode des contraintes - Bilan

Parmi les champs de contrainte $\bar{\sigma} \in (SA)$ on cherche le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que :

- 1 les 6 équations de Beltrami (18) soient vérifiées

Remarques :

- 1 Cette méthode est utilisée lorsque les données permettent de proposer une forme particulière pour le champ $\bar{\sigma}(M)$ solution.
- 2 Si le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est constant (*i.e.* $\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}$) les équations de Beltrami sont automatiquement vérifiées.

Méthode des contraintes - Bilan

Parmi les champs de contrainte $\bar{\sigma} \in (SA)$ on cherche le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que :

- 1 les 6 équations de Beltrami (18) soient vérifiées
- 2 le champ de déplacement $\bar{u}(M)$ associé par (17) et (16) soit cinématiquement admissible : $\bar{u} \in (CA)$.

Schéma de résolution

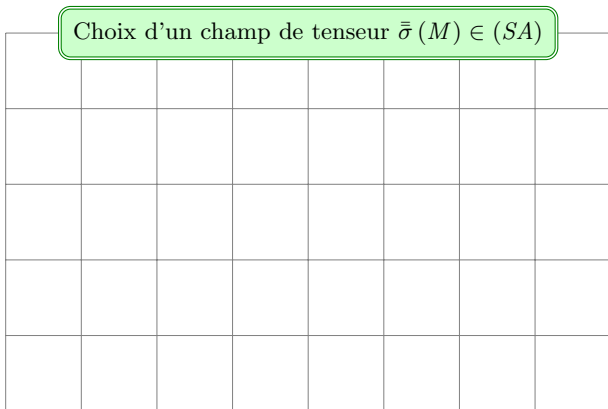


Schéma de résolution

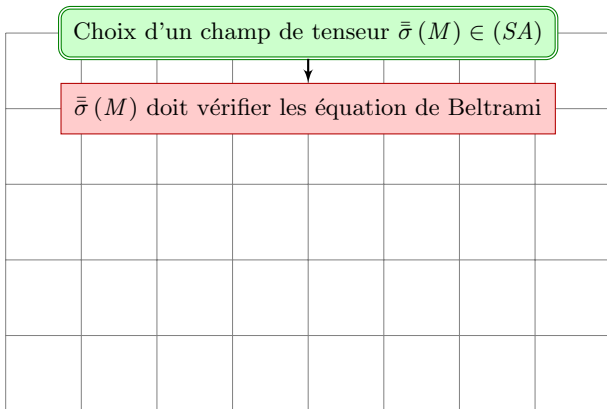


Schéma de résolution

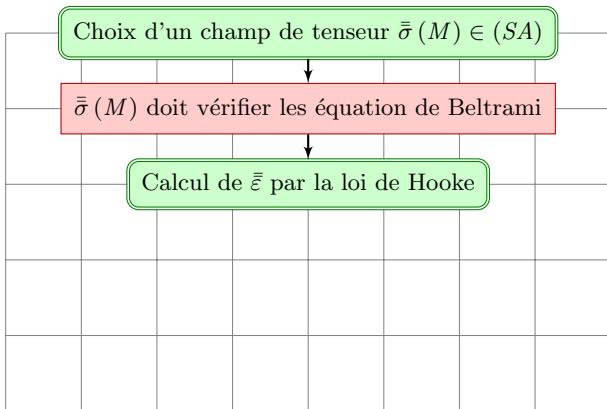


Schéma de résolution

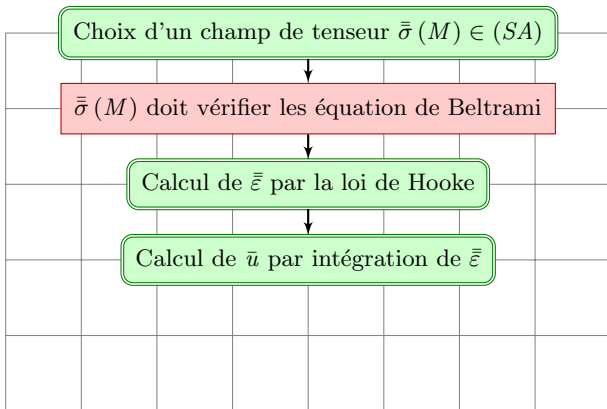


Schéma de résolution

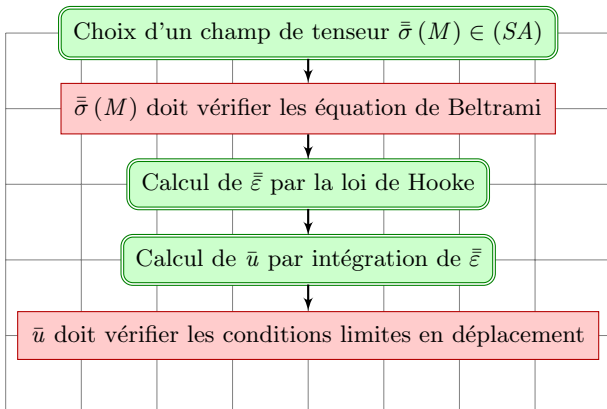
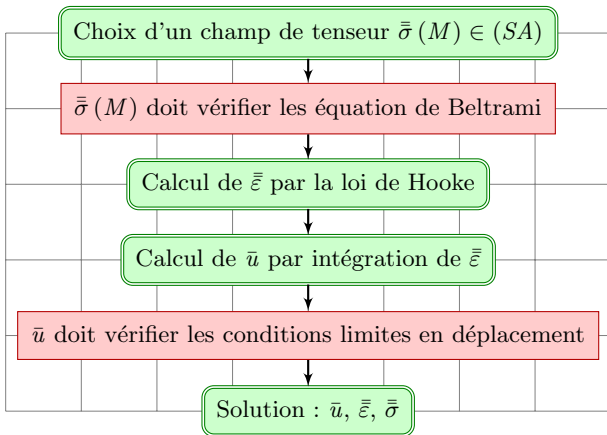


Schéma de résolution



Méthode des déplacements : Équations de Navier

La méthode des déplacements fait appel aux équations de Navier ; celles-ci sont obtenues selon le schéma suivant :

Principes :

Méthode des déplacements : Équations de Navier

La méthode des déplacements fait appel aux équations de Navier ; celles-ci sont obtenues selon le schéma suivant :

Principes :

- 1 On choisie $\bar{u}(M)$ comme inconnu principal du problème d'élasticité : on parcourt le schéma de résolution de la présente page depuis l'extrémité droite.

Méthode des déplacements : Équations de Navier

La méthode des déplacements fait appel aux équations de Navier ; celles-ci sont obtenues selon le schéma suivant :

Principes :

- ① On choisie \bar{u} (M) comme inconnu principal du problème d'élasticité : on parcourt le schéma de résolution de la présente page depuis l'extrémité droite.
- ② On combine les équations (13), (16) et (17) et on obtient les équations de Navier :

$$(\lambda + \mu) \bar{\nabla} (\operatorname{div} \bar{u}) + \mu \operatorname{div} \left(\overline{\bar{\nabla} u} \right) + \bar{f}^v = 0 \quad (19)$$

où encore, en coordonnées cartésiennes :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^v = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Méthode des déplacements : Équations de Navier

La méthode des déplacements fait appel aux équations de Navier ; celles-ci sont obtenues selon le schéma suivant :

Principes :

- 1 On choisie $\bar{u}(M)$ comme inconnu principal du problème d'élasticité : on parcourt le schéma de résolution de la présente page depuis l'extrémité droite.
- 2 On combine les équations (13), (16) et (17) et on obtient les équations de Navier :

$$(\lambda + \mu) \bar{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) + \mu \operatorname{div} \left(\overline{\overline{\nabla u}} \right) + \bar{f}^v = 0 \quad (19)$$

où encore, en coordonnées cartésiennes :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^v = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Remarques :

Par cette transformation, l'équation d'équilibre $\operatorname{div} \bar{\sigma} + \bar{f}^v = 0$ porte maintenant sur la variable inconnue \bar{u} .

Cette méthode est utilisée lorsque les propriétés de symétrie permettent de proposer une forme particulière pour le champ de déplacement solution $\bar{u}(M)$.

Cas particulier

Compte tenu de la relation :

$$\overline{\Delta u} = \overline{\nabla} (\operatorname{div} \bar{u}) - \overline{\operatorname{rot}} (\overline{\operatorname{rot}} \bar{u})$$

l'équation de Navier peut également s'écrire :

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\nabla} (\operatorname{div} \bar{u}) - \mu \overline{\operatorname{rot}} (\overline{\operatorname{rot}} \bar{u}) + \bar{f}^v = 0$$

Cas particulier

Compte tenu de la relation :

$$\overline{\Delta u} = \overline{\nabla} (\operatorname{div} \bar{u}) - \overline{\operatorname{rot}} (\overline{\operatorname{rot}} \bar{u})$$

l'équation de Navier peut également s'écrire :

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\nabla} (\operatorname{div} \bar{u}) - \mu \overline{\operatorname{rot}} (\overline{\operatorname{rot}} \bar{u}) + \bar{f}^v = 0$$

Lorsque le problème admet des symétries qui entraînent que

$$\overline{\operatorname{rot}} \bar{u} = \overline{\nabla} \wedge \bar{u} = 0$$

(cylindre sous pression) et que de plus $\bar{f}^v = 0$ on obtient

$$\operatorname{div} \bar{u} = \text{constante} \tag{20}$$

Cas particulier

Compte tenu de la relation :

$$\overline{\Delta u} = \overline{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) - \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}} \bar{u})$$

l'équation de Navier peut également s'écrire :

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) - \mu \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}} \bar{u}) + \bar{f}^v = 0$$

Lorsque le problème admet des symétries qui entraînent que

$$\overline{\operatorname{rot}} \bar{u} = \overline{\nabla} \wedge \bar{u} = 0$$

(cylindre sous pression) et que de plus $\bar{f}^v = 0$ on obtient

$$\operatorname{div} \bar{u} = \text{constante} \tag{20}$$

Méthode des déplacements - Bilan

Parmi les champs de déplacement $\bar{u} \in (CA)$ on cherche le champ \bar{u} tel que :

Cas particulier

Compte tenu de la relation :

$$\overline{\Delta u} = \overline{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) - \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}} \bar{u})$$

l'équation de Navier peut également s'écrire :

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) - \mu \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}} \bar{u}) + \bar{f}^v = 0$$

Lorsque le problème admet des symétries qui entraînent que

$$\overline{\operatorname{rot}} \bar{u} = \overline{\nabla} \wedge \bar{u} = 0$$

(cylindre sous pression) et que de plus $\bar{f}^v = 0$ on obtient

$$\operatorname{div} \bar{u} = \text{constante} \quad (20)$$

Méthode des déplacements - Bilan

Parmi les champs de déplacement $\bar{u} \in (CA)$ on cherche le champ \bar{u} tel que :

- ❶ les 3 équations de Navier (19) soient vérifiées ;

Cas particulier

Compte tenu de la relation :

$$\overline{\Delta u} = \overline{\nabla} (\operatorname{div} \bar{u}) - \overline{\operatorname{rot}} (\overline{\operatorname{rot}} \bar{u})$$

l'équation de Navier peut également s'écrire :

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\nabla} (\operatorname{div} \bar{u}) - \mu \overline{\operatorname{rot}} (\overline{\operatorname{rot}} \bar{u}) + \bar{f}^v = 0$$

Lorsque le problème admet des symétries qui entraînent que

$$\overline{\operatorname{rot}} \bar{u} = \overline{\nabla} \wedge \bar{u} = 0$$

(cylindre sous pression) et que de plus $\bar{f}^v = 0$ on obtient

$$\operatorname{div} \bar{u} = \text{constante} \tag{20}$$

Méthode des déplacements - Bilan

Parmi les champs de déplacement $\bar{u} \in (CA)$ on cherche le champ \bar{u} tel que :

- ❶ les 3 équations de Navier (19) soient vérifiées ;
- ❷ le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ associé par (17) et (16) soit statiquement admissible.

Schéma de résolution

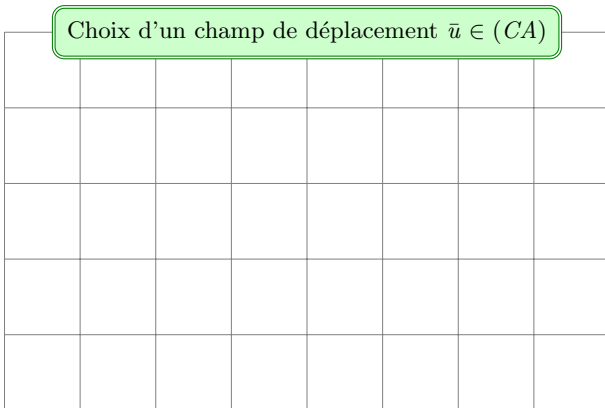


Schéma de résolution

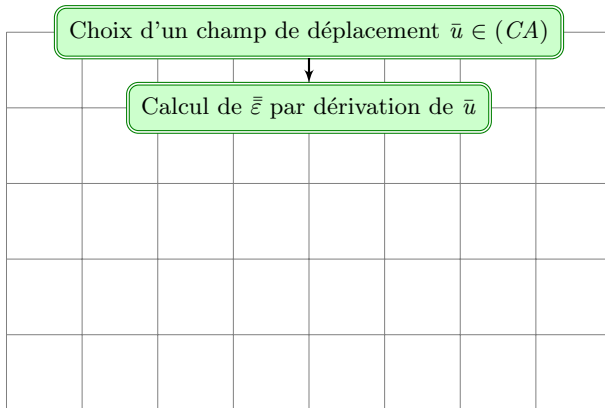


Schéma de résolution

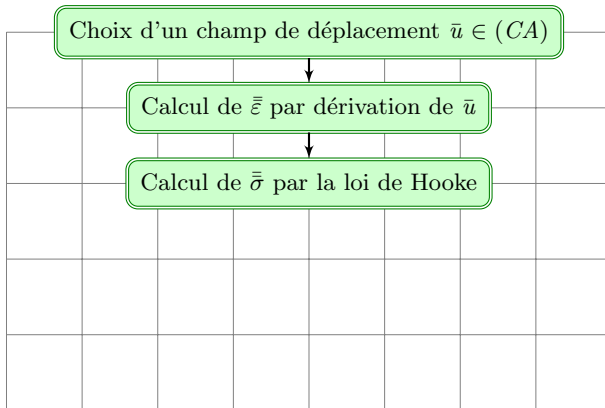


Schéma de résolution

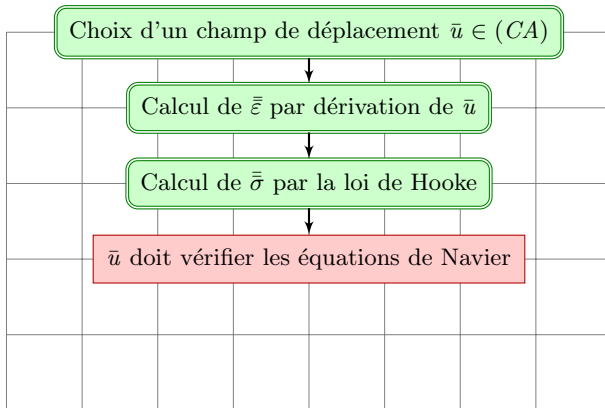


Schéma de résolution

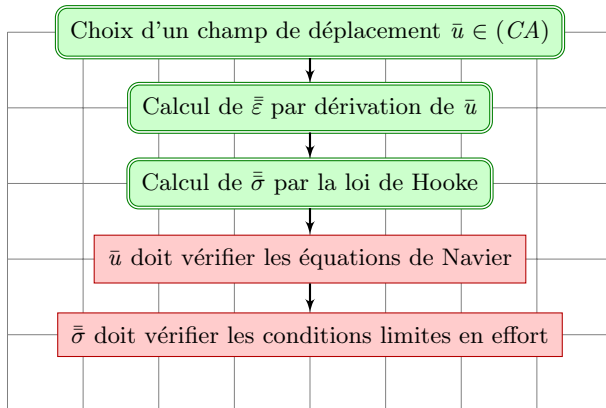
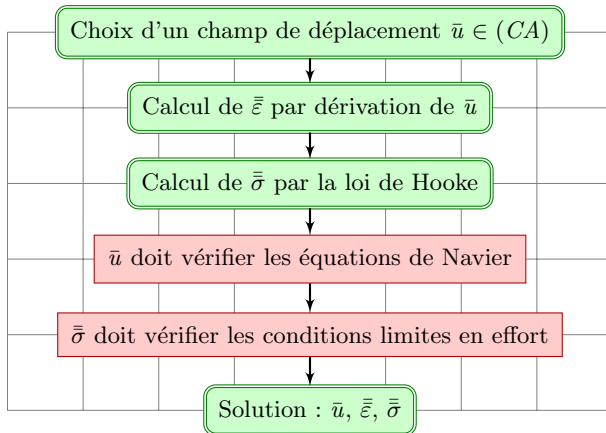


Schéma de résolution



Chapitre II - Résolution de problèmes

Objectifs :

Appliquer les méthodes précédentes à des cas classiques d'élasticité tridimensionnelle et bidimensionnelle

Chapitre II - Résolution de problèmes

Objectifs :

Appliquer les méthodes précédentes à des cas classiques d'élasticité tridimensionnelle et bidimensionnelle

Sommaire

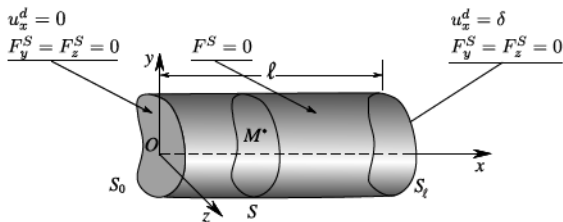
- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane

Plan du paragraphe

- #5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
 - Position du problème
 - Résolution
- #4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- #3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- #2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- #1 Problèmes d'élasticité plane

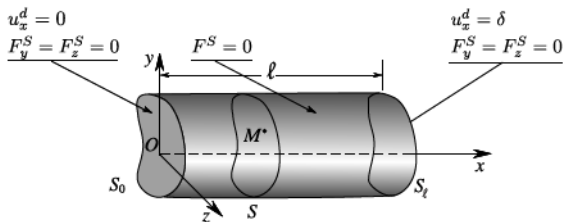
Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique

Données de problème : on considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :



Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique

Données de problème : on considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :

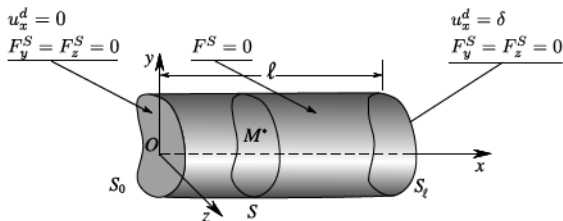


- Force volumique nulle :

$$\bar{f}^v = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique

Données de problème : on considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :



- Force volumique nulle :

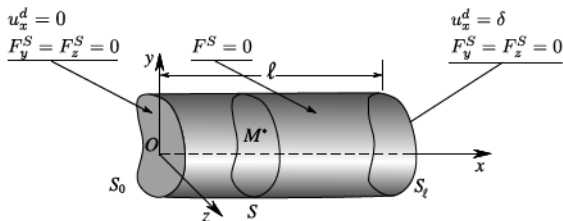
$$\bar{f}^v = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

- Surface latérale libre de contrainte :

$$\bar{F}^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - (S_0 \cup S_l)$$

Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique

Données de problème : on considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :



- Force volumique nulle :

$$\bar{f}^v = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

- Surface latérale libre de contrainte :

$$\bar{F}^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - (S_0 \cup S_l)$$

- Conditions aux limites mixtes aux extrémités :

$$F_y^S = F_z^S = 0 \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_l$$

$$u_x^d = 0 \quad \text{sur } S_0; \quad u_x^d = \delta \quad \text{sur } S_l$$

où δ est la donnée cinématique du problème

Plan du paragraphe

- #5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
 - Position du problème
 - Résolution

- #4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique

- #3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

- #2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression

- #1 Problèmes d'élasticité plane

Résolution

La méthode de résolution proposée consiste à partir d'une forme supposée du tenseur des contraintes et de montrer que ce tenseur est statiquement admissible.

On s'appuie ensuite sur la propriété d'unicité pour justifier que le champ de contrainte proposé est la solution du problème d'élasticité.

Résolution

La méthode de résolution proposée consiste à partir d'une forme supposée du tenseur des contraintes et de montrer que ce tenseur est statiquement admissible.

On s'appuie ensuite sur la propriété d'unicité pour justifier que le champ de contrainte proposé et la solution du problème d'élasticité.

Exercice 2-1. On se place dans le repère cartésien ($Oxyz$) tel que Oz est l'axe du cylindre.

- 1 Proposer un champ de tenseur $\bar{\sigma}(M)$ solution.
- 2 Vérifier que $\bar{\sigma}(M)$ est statiquement admissible et qu'il satisfait aux équations de Beltrami.
- 3 Calculer le champ de déformation $\bar{\varepsilon}(M)$ puis le champ de déplacement solution $\bar{u}(M)$.

Correction

Question 1 - La symétrie du problème suggère de choisir un champ de contrainte homogène de la forme :

$$\bar{\sigma} =$$

Correction

Question 1 - La symétrie du problème suggère de choisir un champ de contrainte homogène de la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x ; \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Correction

Question 1 - La symétrie du problème suggère de choisir un champ de contrainte homogène de la forme :

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x ; \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2 -

- Vérification des équation d'équilibre : le tenseur $\bar{\sigma}$ vérifie les équations (13) et (14) ; il est donc statiquement admissible.

Correction

Question 1 - La symétrie du problème suggère de choisir un champ de contrainte homogène de la forme :

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x ; \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2 -

- Vérification des équation d'équilibre : le tenseur $\bar{\sigma}$ vérifie les équations (13) et (14) ; il est donc statiquement admissible.
- Vérification des équations de Beltrami : le champ $\bar{\sigma}(M)$ étant uniforme les équations de Beltrami (18) sont automatiquement vérifiées.

Question 3 - Calcul du champ de déformation associé par la loi de Hooke (équation 16) :

$$\epsilon_{ii} =$$

Question 3 - Calcul du champ de déformation associé par la loi de Hooke (équation 16) :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \frac{\nu\sigma}{E} (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z) \quad \text{ou} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{bmatrix}$$

Ce tenseur est également homogène mais il n'est plus uniaxial.

Question 3 - Calcul du champ de déformation associé par la loi de Hooke (équation 16) :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \frac{\nu\sigma}{E} (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z) \quad \text{ou} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{bmatrix}$$

Ce tenseur est également homogène mais il n'est plus uniaxial.

Calcul de $\bar{u}(M)$ par intégration de $\bar{\bar{\varepsilon}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} ; \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} ; \frac{\partial u_z}{\partial xz} = \varepsilon_{zz} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad i \neq j \end{array} \right.$$

d'où, après intégration,

$$\bar{u}(M) =$$

Question 3 - Calcul du champ de déformation associé par la loi de Hooke (équation 16) :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \frac{\nu\sigma}{E} (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z) \quad \text{ou} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{bmatrix}$$

Ce tenseur est également homogène mais il n'est plus uniaxial.

Calcul de $\bar{u}(M)$ par intégration de $\bar{\bar{\varepsilon}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} ; \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} ; \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad i \neq j \end{array} \right.$$

d'où, après intégration,

$$\bar{u}(M) = \frac{\sigma}{E} x \bar{e}_x - \nu \frac{\sigma}{E} (y \bar{e}_y + z \bar{e}_z) + \bar{\lambda} + \bar{\omega} \wedge \bar{x}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda} \text{ vecteur de translation arbitraire} \\ \bar{\omega} \text{ vecteur de rotation arbitraire} \end{array} \right.$$

Les conditions limites en déplacement permettent de déterminer les constantes d'intégration :

- sur S_0 :

$$u_x = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \bar{\omega} = \omega \bar{e}_x \end{array} \right. \quad (\omega_y = \omega_z = 0)$$

Les conditions limites en déplacement permettent de déterminer les constantes d'intégration :

- sur S_0 :

$$u_x = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \bar{\omega} = \omega \bar{e}_x \quad (\omega_y = \omega_z = 0) \end{array} \right.$$

- Sur S_l :

$$u_x(l, 0, 0) = \frac{\sigma}{E} l = \delta \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \frac{\delta}{l}$$

Les conditions limites en déplacement permettent de déterminer les constantes d'intégration :

- sur S_0 :

$$u_x = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \bar{\omega} = \omega \bar{e}_x \quad (\omega_y = \omega_z = 0) \end{array} \right.$$

- Sur S_l :

$$u_x(l, 0, 0) = \frac{\sigma}{E} l = \delta \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \frac{\delta}{l}$$

Bilan :

La solution du problème élastique est donnée par les équations :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\sigma} = E \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x \\ \bar{\varepsilon} = \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \nu \frac{\delta}{l} (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z) \\ \bar{u}(M) = \frac{\delta}{l} (x \bar{e}_x - \nu (y \bar{e}_y + z \bar{e}_z)) \end{array} \right.$$

Les conditions limites en déplacement permettent de déterminer les constantes d'intégration :

- sur S_0 :

$$u_x = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \bar{\omega} = \omega \bar{e}_x \quad (\omega_y = \omega_z = 0) \end{array} \right.$$

- Sur S_l :

$$u_x(l, 0, 0) = \frac{\sigma}{E} l = \delta \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \frac{\delta}{l}$$

Bilan :

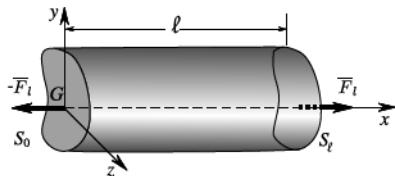
La solution du problème élastique est donnée par les équations :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\sigma} = E \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x \\ \bar{\varepsilon} = \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \nu \frac{\delta}{l} (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z) \\ \bar{u}(M) = \frac{\delta}{l} (x \bar{e}_x - \nu (y \bar{e}_y + z \bar{e}_z)) \end{array} \right.$$

Remarque : le champ de déplacement est défini à une translation parallèle à Oyz et une rotation autour de Ox près. Est-ce permis dans une résolution EF ?

Question complémentaire :

Le problème étant maintenant résolu, on peut chercher à vérifier si le solide est bien en équilibre statique sous l'action des forces extérieures.

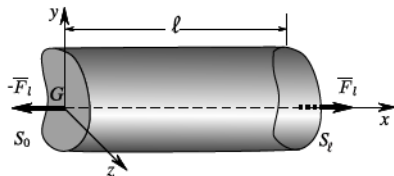


Question complémentaire :

Le problème étant maintenant résolu, on peut chercher à vérifier si le solide est bien en équilibre statique sous l'action des forces extérieures.

Les efforts surfaciques sur S_0 et S_l sont uniformément répartis et les vecteurs contraintes sont donnés par :

$$\overline{F}^S = \overline{T}(M, \overline{n}) = \overline{\sigma} \cdot \overline{n} = E \frac{\delta}{l} (\overline{e}_x \otimes \overline{e}_x) \cdot \overline{n}$$



Question complémentaire :

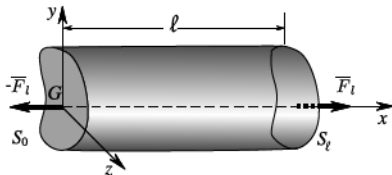
Le problème étant maintenant résolu, on peut chercher à vérifier si le solide est bien en équilibre statique sous l'action des forces extérieures.

Les efforts surfaciques sur S_0 et S_l sont uniformément répartis et les vecteurs contraintes sont donnés par :

$$\overline{F}^S = \overline{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = E \frac{\delta}{l} (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_x) \cdot \bar{n}$$

- Sur S_l :

$$\overline{T}(M, \bar{e}_x) = E \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \quad \Longrightarrow \quad \overline{F}_l =$$



Question complémentaire :

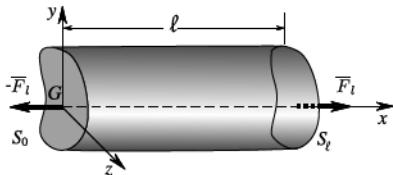
Le problème étant maintenant résolu, on peut chercher à vérifier si le solide est bien en équilibre statique sous l'action des forces extérieures.

Les efforts surfaciques sur S_0 et S_l sont uniformément répartis et les vecteurs contraintes sont donnés par :

$$\overline{F}^S = \overline{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = E \frac{\delta}{l} (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_x) \cdot \bar{n}$$

- Sur S_l :

$$\overline{T}(M, \bar{e}_x) = E \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \quad \implies \quad \overline{F}_l = SE \frac{\delta}{l} \bar{e}_x = S\sigma \bar{e}_x$$



Question complémentaire :

Le problème étant maintenant résolu, on peut chercher à vérifier si le solide est bien en équilibre statique sous l'action des forces extérieures.

Les efforts surfaciques sur S_0 et S_l sont uniformément répartis et les vecteurs contraintes sont donnés par :

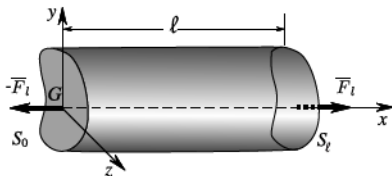
$$\overline{F}^S = \overline{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = E \frac{\delta}{l} (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_x) \cdot \bar{n}$$

- Sur S_l :

$$\overline{T}(M, \bar{e}_x) = E \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \quad \Longrightarrow \quad \overline{F}_l = SE \frac{\delta}{l} \bar{e}_x = S\sigma \bar{e}_x$$

- Sur S_0 :

$$\overline{T}(M, -\bar{e}_x) = -E \frac{\delta}{l} \bar{e}_x \quad \Longrightarrow \quad \overline{F}_0 =$$



Question complémentaire :

Le problème étant maintenant résolu, on peut chercher à vérifier si le solide est bien en équilibre statique sous l'action des forces extérieures.

Les efforts surfaciques sur S_0 et S_l sont uniformément répartis et les vecteurs contraintes sont donnés par :

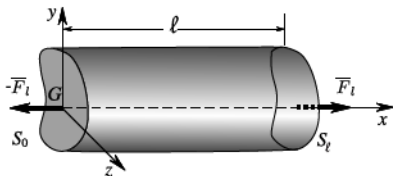
$$\overline{F}^S = \overline{T}(M, \overline{n}) = \overline{\sigma} \cdot \overline{n} = E \frac{\delta}{l} (\overline{e}_x \otimes \overline{e}_x) \cdot \overline{n}$$

- Sur S_l :

$$\overline{T}(M, \overline{e}_x) = E \frac{\delta}{l} \overline{e}_x \quad \Longrightarrow \quad \overline{F}_l = SE \frac{\delta}{l} \overline{e}_x = S\sigma \overline{e}_x$$

- Sur S_0 :

$$\overline{T}(M, -\overline{e}_x) = -E \frac{\delta}{l} \overline{e}_x \quad \Longrightarrow \quad \overline{F}_0 = -SE \frac{\delta}{l} \overline{e}_x = -S\sigma \overline{e}_x$$



FIN DU PROBLÈME

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
 - Position du problème
 - Résolution
 - Cas d'une barre de section circulaire
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane

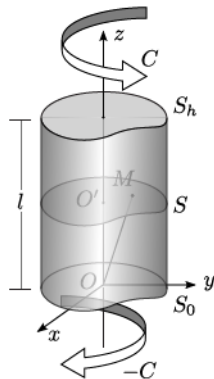
Problème 2 - Torsion d'une barre cylindrique

Position du problème

On note $Oxyz$ un système de coordonnées cartésiennes orthonormées et on considère une barre cylindrique d'axe Oz , de longueur l , constituée d'un matériau élastique.

On désigne par S la section courante et on note S_0 et S_l les sections extrémités.

Description du chargement :



Problème 2 - Torsion d'une barre cylindrique

Position du problème

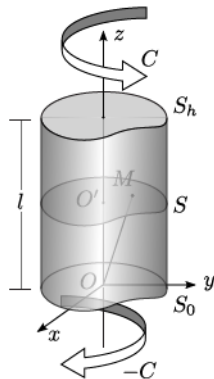
On note $Oxyz$ un système de coordonnées cartésiennes orthonormées et on considère une barre cylindrique d'axe Oz , de longueur l , constituée d'un matériau élastique.

On désigne par S la section courante et on note S_0 et S_l les sections extrémités.

Description du chargement :

- Les forces volumiques sont nulles sur Ω :

$$\bar{f}^v = 0 \quad (21)$$



Problème 2 - Torsion d'une barre cylindrique

Position du problème

On note $Oxyz$ un système de coordonnées cartésiennes orthonormées et on considère une barre cylindrique d'axe Oz , de longueur l , constituée d'un matériau élastique.

On désigne par S la section courante et on note S_0 et S_l les sections extrémités.

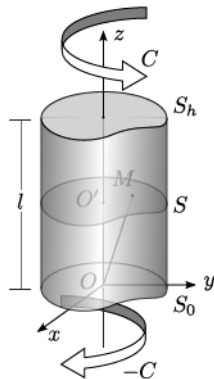
Description du chargement :

- Les forces volumiques sont nulles sur Ω :

$$\bar{f}^v = 0 \quad (21)$$

- La surface latérale est libre de contrainte :

$$\bar{F}^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega - S_0 - S_l \quad (22)$$



Problème 2 - Torsion d'une barre cylindrique

Position du problème

On note $Oxyz$ un système de coordonnées cartésiennes orthonormées et on considère une barre cylindrique d'axe Oz , de longueur l , constituée d'un matériau élastique.

On désigne par S la section courante et on note S_0 et S_l les sections extrémités.

Description du chargement :

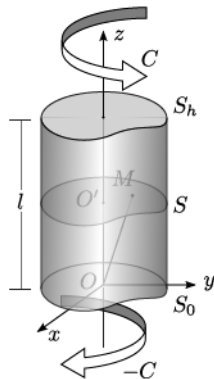
- Les forces volumiques sont nulles sur Ω :

$$\bar{f}^v = 0 \quad (21)$$

- La surface latérale est libre de contrainte :

$$\bar{F}^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega - S_0 - S_l \quad (22)$$

- Les données sur les surfaces d'extrémités S_0, S_l sont incomplètes. On impose que les torseurs des forces surfaciques \bar{F}^S sur S_l et sur S_0 soient équivalents à un moment d'axe Oz :



Problème 2 - Torsion d'une barre cylindrique

Position du problème

On note $Oxyz$ un système de coordonnées cartésiennes orthonormées et on considère une barre cylindrique d'axe Oz , de longueur l , constituée d'un matériau élastique.

On désigne par S la section courante et on note S_0 et S_l les sections extrémités.

Description du chargement :

- Les forces volumiques sont nulles sur Ω :

$$\bar{f}^v = 0 \quad (21)$$

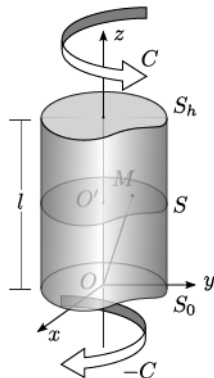
- La surface latérale est libre de contrainte :

$$\bar{F}^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega - S_0 - S_l \quad (22)$$

- Les données sur les surfaces d'extrémités S_0, S_l sont incomplètes. On impose que les torseurs des forces surfaciques \bar{F}^S sur S_l et sur S_0 soient équivalents à un moment d'axe Oz :

$$\text{le torseur des forces surfacique } \bar{F}^S \text{ sur } S_l \text{ est } (O, \bar{O}, C\bar{e}_z) \quad (23)$$

$$\text{le torseur des forces surfacique } \bar{F}^S \text{ sur } S_0 \text{ est } (O, \bar{O}, -C\bar{e}_z) \quad (24)$$



Objectif de l'étude :

Le but de l'étude est de construire une solution d'équilibre élastique en accord avec les conditions limites (21)-(24).

Cette solution correspondra à des formes particulières pour les distributions \overline{F}^S sur S_0 et S_l qui seront donc fixées *a posteriori*.

Objectif de l'étude :

Le but de l'étude est de construire une solution d'équilibre élastique en accord avec les conditions limites (21)-(24).

Cette solution correspondra à des formes particulières pour les distributions \overline{F}^S sur S_0 et S_l qui seront donc fixées *a posteriori*.

Remarques :

- ④ Cette méthode dite *semi inverse* (CL non entièrement définies) a été introduite par A. Barré de St. Venant en 1853.

Objectif de l'étude :

Le but de l'étude est de construire une solution d'équilibre élastique en accord avec les conditions limites (21)-(24).

Cette solution correspondra à des formes particulières pour les distributions \overline{F}^S sur S_0 et S_l qui seront donc fixées *a posteriori*.

Remarques :

- 1 Cette méthode dite *semi inverse* (CL non entièrement définies) a été introduite par A. Barré de St. Venant en 1853.
- 2 Les conditions limites (22)-(24) ne portant que sur des forces il faut s'assurer qu'elles sont compatibles avec l'équilibre statique.

C'est le cas puisque le torseur de tous les efforts extérieurs est nul (*cf.* l'exercice *Torsion d'un cylindre de section circulaire*)

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
 - Position du problème
 - **Résolution**
 - Cas d'une barre de section circulaire
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane

Résolution par la méthode du déplacement Idée :

Le chargement appliquée sur la barre (couple $C\bar{e}_z$) entraîne une torsion autour de l'axe Oz . On propose donc de chercher une solution en déplacement de la forme

$$\bar{u}(M) = \alpha z \bar{e}_z \wedge \overline{OM} + \alpha \varphi(x, y) \bar{e}_z \quad (25)$$

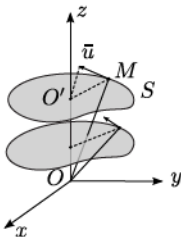
Résolution par la méthode du déplacement Idée :

Le chargement appliquée sur la barre (couple $C\bar{e}_z$) entraîne une torsion autour de l'axe Oz . On propose donc de chercher une solution en déplacement de la forme

$$\bar{u}(M) = \alpha z \bar{e}_z \wedge \overline{OM} + \alpha \varphi(x, y) \bar{e}_z \quad (25)$$

Justification du champ de déplacement proposé :

- Dans l'hypothèse des déplacements infinitésimaux, le terme $\alpha z \bar{e}_z \wedge \overline{OM}$ correspond à une rotation d'ensemble de la section courante S autour de Oz d'angle $\theta = \alpha z$ (rotation proportionnelle à la cote en z).



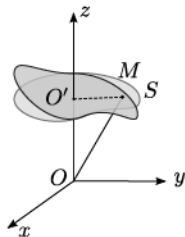
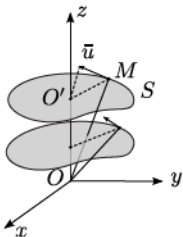
Résolution par la méthode du déplacement Idée :

Le chargement appliquée sur la barre (couple $C\bar{e}_z$) entraîne une torsion autour de l'axe Oz . On propose donc de chercher une solution en déplacement de la forme

$$\bar{u}(M) = \alpha z \bar{e}_z \wedge \overline{OM} + \alpha \varphi(x, y) \bar{e}_z \quad (25)$$

Justification du champ de déplacement proposé :

- Dans l'hypothèse des déplacements infinitésimaux, le terme $\alpha z \bar{e}_z \wedge \overline{OM}$ correspond à une rotation d'ensemble de la section courante S autour de Oz d'angle $\theta = \alpha z$ (rotation proportionnelle à la cote en z).
- Le terme $\alpha \varphi(x, y) \bar{e}_z$ permet d'introduire un éventuelle gauchissement de la section selon \bar{e}_z , que l'on le suppose indépendant de la position en z de la section. α et φ sont des grandeurs à déterminer en fonction des données du problème.



Exercice

Exercice 2-2. Calcul des grandeurs cinématiques

- ① Calculer les composante de \bar{u} sur $Oxyz$ et en déduire le champ de déformation $\bar{\varepsilon}(M)$.
- ② Montrer ou justifier, à partir de la forme du tenseurs des déformations, les observations suivantes :
 - ① la déformation volumique ε_v est nulle en tout point ;
 - ② les sections droites ne sont pas déformées dans leur plan ;
 - ③ une fibre dirigée selon Oz ne subit aucun allongement et reste droite.
- ③ Calculer $\bar{\sigma}(M)$ en utilisant la loi de Hooke et montrer que sur une facette parallèle à Oz , il ne s'exerce qu'une contrainte de cisaillement parallèle à Oz .

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = \quad ; \quad u_y = \quad ; \quad u_z = \quad \quad (26)$$

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = -\alpha zy; \quad u_y = \alpha zx; \quad u_z = \alpha\varphi(x, y) \quad (26)$$

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = -\alpha zy; \quad u_y = \alpha zx; \quad u_z = \alpha\varphi(x, y) \quad (26)$$

L'hypothèse des déplacements infinitésimaux impose que

$$\max(|u_x|, |u_y|, |u_z|) \ll l$$

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = -\alpha zy; \quad u_y = \alpha zx; \quad u_z = \alpha\varphi(x, y) \quad (26)$$

L'hypothèse des déplacements infinitésimaux impose que

$$\max(|u_x|, |u_y|, |u_z|) \ll l$$

Calcul du champ de déformation selon la relation (17) :

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = -\alpha zy; \quad u_y = \alpha zx; \quad u_z = \alpha\varphi(x, y) \quad (26)$$

L'hypothèse des déplacements infinitésimaux impose que

$$\max(|u_x|, |u_y|, |u_z|) \ll l$$

Calcul du champ de déformation selon la relation (17) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(x, y, z) &= \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_x) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_y) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = -\alpha zy; \quad u_y = \alpha zx; \quad u_z = \alpha\varphi(x, y) \quad (26)$$

L'hypothèse des déplacements infinitésimaux impose que

$$\max(|u_x|, |u_y|, |u_z|) \ll l$$

Calcul du champ de déformation selon la relation (17) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(x, y, z) &= \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_x) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_y) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Observations :

- La déformation volumique est nulle en tout point ; en effet :

$$\varepsilon_V = \text{tr}\bar{\varepsilon} = 0$$

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = -\alpha zy; \quad u_y = \alpha zx; \quad u_z = \alpha\varphi(x, y) \quad (26)$$

L'hypothèse des déplacements infinitésimaux impose que

$$\max(|u_x|, |u_y|, |u_z|) \ll l$$

Calcul du champ de déformation selon la relation (17) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(x, y, z) &= \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_x) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_y) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Observations :

- La déformation volumique est nulle en tout point ; en effet :

$$\varepsilon_V = \text{tr}\bar{\varepsilon} = 0$$

- Les sections droites ne sont pas déformées dans leur plan puisque

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yx} = 0$$

Question 1 - Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

$$u_x = -\alpha zy; \quad u_y = \alpha zx; \quad u_z = \alpha\varphi(x, y) \quad (26)$$

L'hypothèse des déplacements infinitésimaux impose que

$$\max(|u_x|, |u_y|, |u_z|) \ll l$$

Calcul du champ de déformation selon la relation (17) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(x, y, z) &= \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_x) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_y) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Observations :

- La déformation volumique est nulle en tout point ; en effet :

$$\varepsilon_V = \text{tr}\bar{\varepsilon} = 0$$

- Les sections droites ne sont pas déformées dans leur plan puisque

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yx} = 0$$

- Une fibre dirigée selon Oz ne subit aucun allongement et reste droite ; en effet

$$\varepsilon(M, \bar{e}_z) = \varepsilon_{zz} = 0$$

Question 2 - Calcul du champ de contrainte (loi de Hooke (16)) :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(x, y, z) &= \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_x) \\ &+ \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_y)\end{aligned}\quad [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Question 2 - Calcul du champ de contrainte (loi de Hooke (16)) :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x, y, z) &= \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) (\bar{e}_x \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_x) \\ &+ \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_y) \end{aligned} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

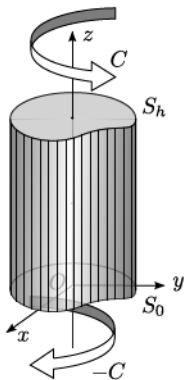
Sur une facette parallèle à Oz , il ne s'exerce qu'une contrainte de cisaillement parallèle à Oz puisque les vecteurs contraintes $\bar{T}(M, \bar{e}_x)$ et $\bar{T}(M, \bar{e}_y)$ sont portés par \bar{e}_z .

Commentaires : Le fait qu'une fibre droite reste droite après torsion de la barre peut paraître paradoxal dans l'idée intuitive que l'on se fait d'une barre tordue ! Ce paradoxe est lié à notre hypothèse des petits déplacements.

Commentaires : Le fait qu'une fibre droite reste droite après torsion de la barre peut paraître paradoxal dans l'idée intuitive que l'on se fait d'une barre tordue !

Ce paradoxe est lié à notre hypothèse des petits déplacements.

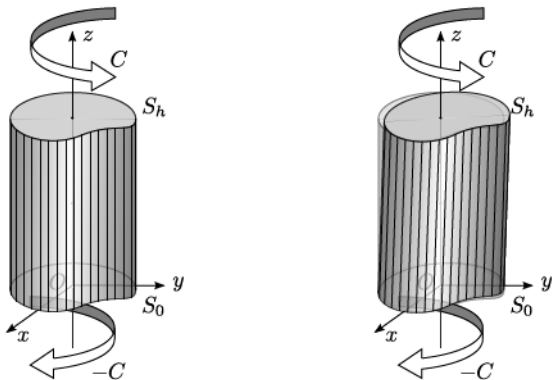
Pour visualiser ce mode de déformation on peut imaginer la barre comme un assemblage de fibres très fines parallèles à Oz .



Commentaires : Le fait qu'une fibre droite reste droite après torsion de la barre peut paraître paradoxal dans l'idée intuitive que l'on se fait d'une barre tordue ! Ce paradoxe est lié à notre hypothèse des petits déplacements.

Pour visualiser ce mode de déformation on peut imaginer la barre comme un assemblage de fibres très fines parallèles à Oz .

Dans la torsion infinitésimale ces fibres s'inclinent sur Oz et subissent une translation parallèle à cet axe.



Exercice

Exercice 2-3. Montrer en exploitant les équations d'équilibre et les conditions limites les relations suivantes

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (29)$$

où $\Delta_2 \varphi$ désigne le laplacien bidimensionnel de φ , et

$$\overline{\nabla_2 \varphi} \cdot \bar{n} = n_x y - n_y x \quad \text{sur } \partial S, \text{ bord de la section } S \quad (30)$$

où $\overline{\nabla_2 \varphi}$ désigne le gradient de φ en dimension 2 et $\bar{n} = n_x \bar{e}_x + n_y \bar{e}_y$ est le vecteur normal à la surface latérale.

Correction

Les équations d'équilibre (relation (13)) sur x et y sont automatiquement vérifiées, il reste l'équation sur z

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0$$

soit, en utilisant l'expression donnée en (28),

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Correction

Les équations d'équilibre (relation (13)) sur x et y sont automatiquement vérifiées, il reste l'équation sur z

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0$$

soit, en utilisant l'expression donnée en (28),

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Exploitation des conditions limites sur la surface libre (relation (21))

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{F}^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - S_0 - S_l$$

on obtient la relation

$$n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_y x - n_x y = 0$$

soit, dans l'espace à 2 dimensions

$$\overline{\nabla_2 \varphi} \cdot \bar{n} = n_x y - n_y x \quad \text{sur } \partial S, \text{ bord de la section } S$$

Problème de Neumann

Résultat mathématique :

La théorie des EDP montre que les équations (29) et (30) permettent de déterminer la fonction φ .

Ces équations définissent le problème de *Neumann*.

Problème de Neumann

Résultat mathématique :

La théorie des EDP montre que les équations (29) et (30) permettent de déterminer la fonction φ .

Ces équations définissent le problème de *Neumann*.

Question :

La fonction φ ainsi trouvée vérifie t-elle les conditions aux limites (23)-(24) imposées sur les sections d'extrémités S_0, S_l , à savoir :

- le moment résultant s'écrit $\bar{M} = C\bar{e}_z$ sur S_l ($-C\bar{e}_z$ sur S_0);
- la résultante \bar{R} des forces surfaciques est nulle

Calcul du moment résultant des forces surfacique sur S_l :

On a

$$\overline{M} = \int_{S_l} \overline{OM} \wedge \overline{T}(M, \bar{e}_z) da$$

Comme $\sigma_{zz} = 0$, on a

$$M_x = M_y = 0$$

$$M_z = \int_{S_l} (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz}) da = \mu\alpha \int_{S_l} x \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) da \quad (31)$$

Le moment est bien de la forme $\overline{M} = C\bar{e}_z$.

On trouve un moment résultant opposé sur S_0 .

Calcul de la résultante des forces surfacique sur S_l :

On a

$$\overline{F}^{S_l} = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_z = \overline{T}(M, \bar{e}_z) \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = \int_{S_l} \overline{T}(M, \bar{e}_z) da$$

d'où les 3 équations scalaires

$$R_x =$$

$$R_y =$$

$$R_z =$$

Calcul de la résultante des forces surfacique sur S_l :

On a

$$\overline{F}^{S_l} = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_z = \overline{T}(M, \bar{e}_z) \Rightarrow \overline{R} = \int_{S_l} \overline{T}(M, \bar{e}_z) da$$

d'où les 3 équations scalaires

$$R_x = \int_{S_l} \sigma_{xz} da =$$

$$R_y = \int_{S_l} \sigma_{yz} da =$$

$$R_z = \int_{S_l} \sigma_{zz} da =$$

Calcul de la résultante des forces surfacique sur S_l :

On a

$$\overline{F}^{S_l} = \overline{\sigma}(M) \cdot \bar{e}_z = \overline{T}(M, \bar{e}_z) \Rightarrow \overline{R} = \int_{S_l} \overline{T}(M, \bar{e}_z) da$$

d'où les 3 équations scalaires

$$R_x = \int_{S_l} \sigma_{xz} da = \int_{S_l} \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) da$$

$$R_y = \int_{S_l} \sigma_{yz} da = \int_{S_l} \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x \right) da$$

$$R_z = \int_{S_l} \sigma_{zz} da = 0$$

Calcul de la résultante des forces surfacique sur S_l :

On a

$$\overline{F}^{S_l} = \overline{\sigma}(M) \cdot \overline{e}_z = \overline{T}(M, \overline{e}_z) \Rightarrow \overline{R} = \int_{S_l} \overline{T}(M, \overline{e}_z) da$$

d'où les 3 équations scalaires

$$R_x = \int_{S_l} \sigma_{xz} da = \int_{S_l} \mu\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) da$$

$$R_y = \int_{S_l} \sigma_{yz} da = \int_{S_l} \mu\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \right) da$$

$$R_z = \int_{S_l} \sigma_{zz} da = 0$$

Montrons que φ , solution du problème de Neumann (29)-(30), vérifie

$$I_x = \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) da = 0$$

où S est la section droite courante.

On part de la condition $\overline{\nabla_2 \varphi} \cdot \bar{n} = n_1 y - n_2 x$ que vérifie φ sur ∂S

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) n_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) n_y = 0$$

En multipliant par x et en intégrant sur le contour ∂S , on obtient

$$\int_{\partial S} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) n_x + x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) n_y \right] ds = \int_{\partial S} \bar{w} \cdot \bar{n} ds = 0$$

où \bar{w} est le vecteur de composante

$$w_1 = x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad w_2 = x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)$$

En utilisant le théorème de la divergence on obtient

$$\int_{\partial S} \bar{w} \cdot \bar{n} ds = \int_S \operatorname{div} \bar{w} da$$

Or, puisque $\Delta_2 \varphi = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{w} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y + x \Delta_2 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \end{aligned}$$

Ainsi

$$I_x = \int_S \operatorname{div} \bar{w} da = 0$$

On démontre de même que $R_y = 0$ et par suite que $\bar{R} = 0$.

Bilan :

- 1 Le choix du champ de déplacement (25) est compatible avec les conditions limites (22)-(24).
- 2 Le paramètre α introduit dans le champ de déplacement est déterminé à partir de la donnée C par la relation

$$C = \mu J \alpha \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{C}{\mu J} \quad (32)$$

avec

$$J = \int_S x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) da \quad (33)$$

Bilan :

- 1 Le choix du champ de déplacement (25) est compatible avec les conditions limites (22)-(24).
- 2 Le paramètre α introduit dans le champ de déplacement est déterminé à partir de la donnée C par la relation

$$C = \mu J \alpha \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{C}{\mu J} \quad (32)$$

avec

$$J = \int_S x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) da \quad (33)$$

Commentaires sur le facteur J :

- J est déterminé par la seule solution du problème de Neumann (29)-(30).
- Il ne dépend que de la géométrie de la section droite S : c'est une caractéristique *intrinsèque* de la section (*i.e.* indépendante du système d'axe).
- Il est appelé **inertie de torsion** de la section ; il a pour dimension la puissance 4^e d'une longueur.
- On peut montrer que J est positif.

Reformulation du problème :

Le problème de torsion étant maintenant résolu on peut le reformuler ainsi.

- 1 Pour une barre cylindrique de section S donnée, on détermine la fonction φ en résolvant le problème de Neumann (29)-(30).

On peut ainsi calculer l'inertie de torsion J selon la relation (33).

Reformulation du problème :

Le problème de torsion étant maintenant résolu on peut le reformuler ainsi.

- 1 Pour une barre cylindrique de section S donnée, on détermine la fonction φ en résolvant le problème de Neumann (29)-(30).

On peut ainsi calculer l'inertie de torsion J selon la relation (33).

- 2 La force surfacique $\overline{F}^S(x, y)$ sur S_l (conditions limites (23)) peut alors être complètement définie :

$$\begin{cases} F_1^S(x, y) = \frac{C}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \\ F_2^S(x, y) = \frac{C}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \\ F_3^S(x, y) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Les conditions sur S_0 sont opposées.

Reformulation du problème :

Le problème de torsion étant maintenant résolu on peut le reformuler ainsi.

- 1 Pour une barre cylindrique de section S donnée, on détermine la fonction φ en résolvant le problème de Neumann (29)-(30).

On peut ainsi calculer l'inertie de torsion J selon la relation (33).

- 2 La force surfacique $\overline{F}^S(x, y)$ sur S_l (conditions limites (23)) peut alors être complètement définie :

$$\begin{cases} F_1^S(x, y) = \frac{C}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \\ F_2^S(x, y) = \frac{C}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \\ F_3^S(x, y) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Les conditions sur S_0 sont opposées.

- 3 La solution est donnée par la formule (25) pour $\bar{u}(M)$ et par (28) pour $\bar{\sigma}(M)$.

Commentaires :

- La relation $C = \mu J \alpha$ montre que le couple de torsion est proportionnel à la rotation différentielle α , ou encore, pour l donnée, à la rotation de S_l par rapport à S_0 .
- α est ainsi appelé **angle de torsion**, il correspond à une torsion pour une longueur de barre selon Oz unité.
- En introduisant module de cisaillement G on peut également écrire

$$C = GJ\alpha$$

G apparaît ainsi comme le facteur de proportionnalité entre le couple C et l'angle de torsion α .

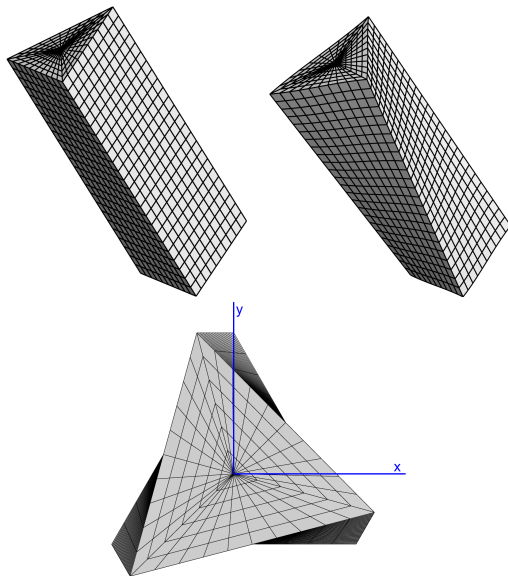
Cette relation est à rapprocher la loi de Hooke uniaxiale en traction

$$F = ES \frac{\Delta l}{l}$$

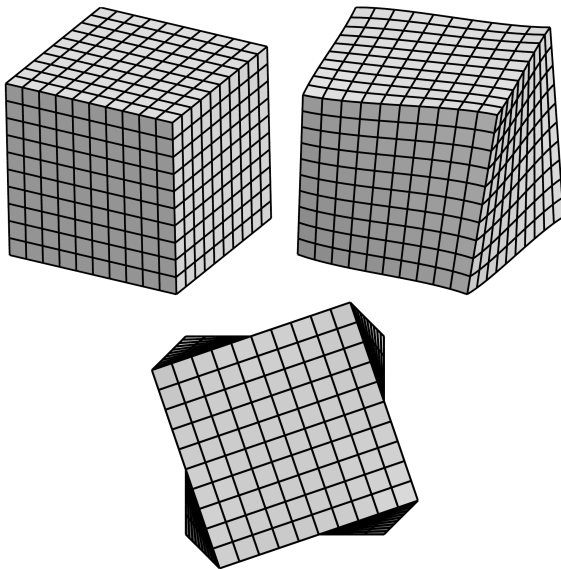
ou encore, de la loi de variation de volume en compression :

$$p = K \frac{\Delta V}{V}$$

Illustrations



Illustrations



Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
 - Position du problème
 - Résolution
 - Cas d'une barre de section circulaire
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane

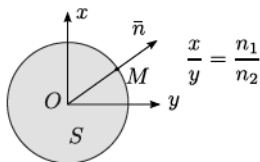
Cas d'une barre de section circulaire

On s'intéresse au cas particulier où la section droite est un disque de rayon R .

Pour la section S_0 de centre O , le problème de Neumann pour φ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \varphi = 0 \quad \text{sur } S \\ n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right.$$

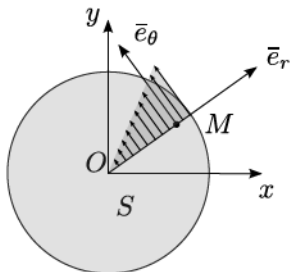
La solution (à une constante près) est : $\varphi = 0$



Exercice

Exercice 2-4. Résolution du problème de torsion d'une barre de section circulaire (application du cas général).

- ❶ Donner à partir de l'expression (25) les composantes du champ de déplacement dans le repère cartésien $(Oxyz)$ et dans un repère cylindrique $(Or\theta z)$.
- ❷ Calculer les composantes du tenseur des contraintes dans les deux repères cartésien et cylindrique.
- ❸ Calculer l'inertie de torsion J selon la formule (33).
- ❹ Montrer que la distribution des efforts surfaciques est une force orthoradiale, c'est à dire dirigée normalement au rayon vecteur, et proportionnelle à r . Comparer vos résultats avec l'étude sur la torsion d'un cylindre.



$$\overline{F}^S = \frac{2C}{\pi R^4} r \bar{e}_\theta$$

Correction

Question 1 - Expression du champ de déplacement à partir de l'expression (26) :

Composante de \bar{u} sur $Oxyz$:

ou en coordonnées cylindrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = -\alpha zy \\ u_y = \alpha zx \\ u_z = 0 \end{array} \right. \quad \bar{u} = \alpha z r \bar{e}_\theta$$

Commentaire :

Comme $u_z = \alpha\varphi = 0$ il n'y a pas gauchissement des sections droites.

Question 2 - Expression du champ de contrainte d'après (28) :Composante sur $Oxyz$:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = -\mu\alpha y \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = \mu\alpha x \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

ou en coordonnées cylindrique :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \mu\alpha r \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

Commentaire :

En chaque point de la barre, on a un état de cisaillement simple dans le plan parallèle à la section droite dont l'intensité est proportionnelle à r .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2 - Expression du champ de contrainte d'après (28) :

Composante sur $Oxyz$:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = -\mu\alpha y \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = \mu\alpha x \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

ou en coordonnées cylindrique :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \mu\alpha r \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

Commentaire :

En chaque point de la barre, on a un état de cisaillement simple dans le plan parallèle à la section droite dont l'intensité est proportionnelle à r .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Question 3 - Inertie de torsion (formule (33)) :

$$J =$$

Question 2 - Expression du champ de contrainte d'après (28) :

Composante sur $Oxyz$:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = -\mu\alpha y \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = \mu\alpha x \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

ou en coordonnées cylindrique :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \mu\alpha r \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

Commentaire :

En chaque point de la barre, on a un état de cisaillement simple dans le plan parallèle à la section droite dont l'intensité est proportionnelle à r .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Question 3 - Inertie de torsion (formule (33)) :

$$J = \int_S (x^2 + y^2) da = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta = \pi \frac{R^4}{2}$$

c'est le moment d'inertie polaire autour de Oz .

Question 4 - Distribution des efforts surfaciques sur S_l (relations (34)) :

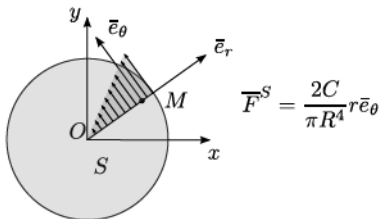
Composante sur $Oxyz$:

$$\begin{cases} F_x^S = -\frac{C}{J}y = -\frac{2C}{\pi R^4}y \\ F_y^S = \frac{C}{J}x = \frac{2C}{\pi R^4}x \\ F_z^S = 0 \end{cases}$$

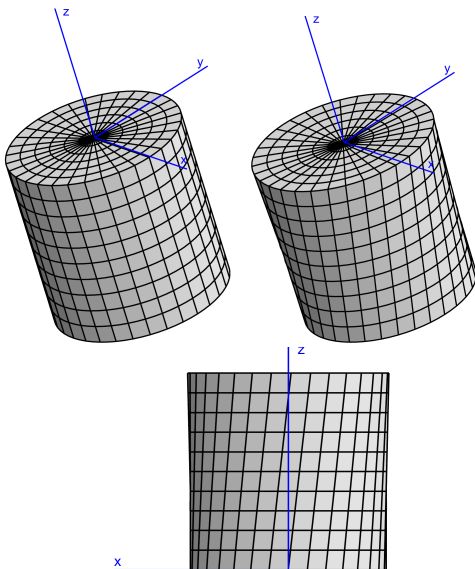
ou en coordonnées cylindrique :

$$\overline{F}^S(r) = \frac{2C}{\pi R^4} r \overline{e}_\theta$$

Il s'agit d'une force surfacique orthoradiale, c'est à dire dirigée normalement au rayon vecteur, et proportionnelle à r .



Illustrations



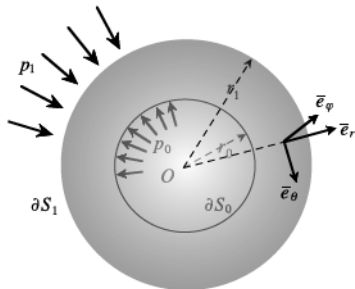
Plan du paragraphe

- ⑤ Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- ④ Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- ③ Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
 - Position du problème
 - Résolution du problème d'élasticité
 - Cas de la sphère pleine
 - Limite initiale d'élasticité
 - Cas de la coque sphérique mince
- ② Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- ① Problèmes d'élasticité plane

Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

Position du problème : on considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $Or\theta\varphi$.

Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :



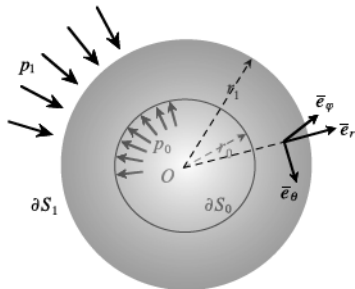
Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

Position du problème : on considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $Or\theta\varphi$.

Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$



Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

Position du problème : on considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $Or\theta\varphi$.

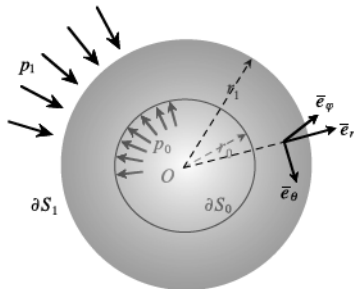
Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

- Pression uniforme p_1 à l'extérieur :

$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$



Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

Position du problème : on considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $Or\theta\varphi$.

Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

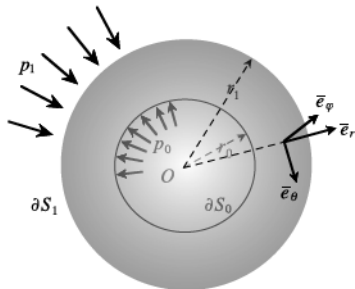
$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

- Pression uniforme p_1 à l'extérieur :

$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$

- Les force de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$



Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

Position du problème : on considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $Or\theta\varphi$.

Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

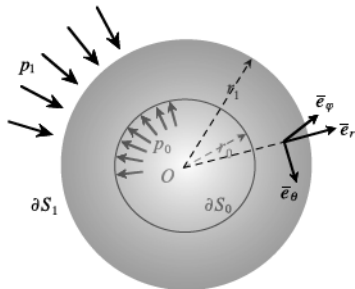
$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

- Pression uniforme p_1 à l'extérieur :

$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$

- Les force de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$



Le but de l'étude est de calculer la solution du problème d'élasticité c'est-à-dire de déterminer les champs solutions $\bar{u}(M)$, $\bar{\varepsilon}(M)$, $\bar{\sigma}(M)$ en tout point M du solide.

C'est la méthode du déplacement qui est choisie.

Plan du paragraphe

- ⑤ Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- ④ Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- ③ Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
 - Position du problème
 - **Résolution du problème d'élasticité**
 - Cas de la sphère pleine
 - Limite initiale d'élasticité
 - Cas de la coque sphérique mince
- ② Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- ① Problèmes d'élasticité plane

La résolution est découpée en étapes selon le schéma général précédent :

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement. Ce choix permet de réduire le problème à la détermination d'une fonction scalaire dépendant de la seule composante radiale de M .

La résolution est découpée en étapes selon le schéma général précédent :

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement. Ce choix permet de réduire le problème à la détermination d'une fonction scalaire dépendant de la seule composante radiale de M .
- 2 Calcul des tenseurs associés $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.

La résolution est découpée en étapes selon le schéma général précédent :

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement. Ce choix permet de réduire le problème à la détermination d'une fonction scalaire dépendant de la seule composante radiale de M .
- 2 Calcul des tenseurs associés $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.
- 3 Formulation et résolution de l'équation de Navier.

La résolution est découpée en étapes selon le schéma général précédent :

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement. Ce choix permet de réduire le problème à la détermination d'une fonction scalaire dépendant de la seule composante radiale de M .
- 2 Calcul des tenseurs associés $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.
- 3 Formulation et résolution de l'équation de Navier.
- 4 Détermination des constantes d'intégration en exploitant les conditions limites en efforts.

La résolution est découpée en étapes selon le schéma général précédent :

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement. Ce choix permet de réduire le problème à la détermination d'une fonction scalaire dépendant de la seule composante radiale de M .
- 2 Calcul des tenseurs associés $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.
- 3 Formulation et résolution de l'équation de Navier.
- 4 Détermination des constantes d'intégration en exploitant les conditions limites en efforts.

Étape 1 - Choix d'un champ de déplacement.

Exercice 2-5. Choix d'un champ de déplacement et calcul des tenseurs associés

- 1 Justifier le choix a priori d'un champ de déplacement de la forme

$$\bar{u}(M) = rf(r) \bar{e}_r$$

Quelle justification a posteriori peut-on donner au choix de tel ou tel forme de solution ?

- 2 Calculer les tenseurs $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ correspondant.

Correction

Question 1 - Les propriétés de symétrie du problème (forme, chargement, matériau), suggère de choisir un champ \bar{u} uniquement radial et fonction de la seule composante r .

C'est le théorème d'existence et d'unicité du problème d'équilibre qui justifie a posteriori le choix de telle forme du champ de déplacement.

Correction

Question 1 - Les propriétés de symétrie du problème (forme, chargement, matériau), suggère de choisir un champ \bar{u} uniquement radial et fonction de la seule composante r .

C'est le théorème d'existence et d'unicité du problème d'équilibre qui justifie a posteriori le choix de telle forme du champ de déplacement.

Question 2 - Le champ de déformation correspondant est donné par (cf. l'expression de $\bar{\varepsilon}$ en coordonnées sphériques) :

$$\bar{\varepsilon} = (rf'(r) + f(r)) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + f(r) (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\phi \otimes \bar{e}_\phi)$$

Correction

Question 1 - Les propriétés de symétrie du problème (forme, chargement, matériau), suggère de choisir un champ \bar{u} uniquement radial et fonction de la seule composante r .

C'est le théorème d'existence et d'unicité du problème d'équilibre qui justifie a posteriori le choix de telle forme du champ de déplacement.

Question 2 - Le champ de déformation correspondant est donné par (cf. l'expression de $\bar{\varepsilon}$ en coordonnées sphériques) :

$$\bar{\varepsilon} = (rf'(r) + f(r)) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + f(r) (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\phi \otimes \bar{e}_\phi)$$

Le champ de contrainte est donné par la loi de Hooke :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & (3\lambda + 2\mu) f(r) \bar{\mathbb{1}} + (\lambda + 2\mu) rf'(r) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r \\ & + \lambda rf'(r) (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\phi \otimes \bar{e}_\phi) \end{aligned}$$

Exercice

Étape 2 - Résolution de l'équation de Navier

Exercice 2-6. Résolution de l'équation de Navier

- ① Montrer que la fonction inconnue f vérifie l'équation différentielle

$$3f(r) + rf'(r) = 3a$$

Indication : on vérifiera pour cela que le champ de déplacement est irrotationnel.

- ② Vérifier que la fonction

$$f(r) = a + \frac{b}{r^3}$$

est une solution de l'équation précédente, où a, b sont des constantes à déterminer. En déduire l'expression du champ de déplacement $\bar{u}(M)$ en fonction de a, b .

Correction

Question 1 - Le champ de déplacement est irrotationnel puisqu'il vérifie

$$\overline{\text{rot}} \bar{u} = \bar{\nabla} \wedge \bar{u} = 0$$

(on peut également vérifier que $\overline{\overline{\nabla u}}$ est symétrique).

Correction

Question 1 - Le champ de déplacement est irrotationnel puisqu'il vérifie

$$\overline{\text{rot}} \bar{u} = \overline{\nabla} \wedge \bar{u} = 0$$

(on peut également vérifier que $\overline{\overline{\nabla u}}$ est symétrique).

L'équation de Navier prend alors la forme :

$$(\lambda + 2\mu) \text{div} \bar{u} = \Phi + C \quad \text{avec} \quad \bar{f}^v = -\overline{\nabla} \Phi$$

Comme les forces volumiques sont nulles, le potentiel Φ est constant, l'équation de Navier devient :

$$\text{div} \bar{u} = 3a$$

où a est une constante à déterminer. L'équation à résoudre est donc

$$3f(r) + rf'(r) = 3a$$

Correction

Question 1 - Le champ de déplacement est irrotationnel puisqu'il vérifie

$$\overline{\text{rot}} \bar{u} = \overline{\nabla} \wedge \bar{u} = 0$$

(on peut également vérifier que $\overline{\nabla} \bar{u}$ est symétrique).

L'équation de Navier prend alors la forme :

$$(\lambda + 2\mu) \text{div} \bar{u} = \Phi + C \quad \text{avec} \quad \bar{f}^v = -\overline{\nabla} \Phi$$

Comme les forces volumiques sont nulles, le potentiel Φ est constant, l'équation de Navier devient :

$$\text{div} \bar{u} = 3a$$

où a est une constante à déterminer. L'équation à résoudre est donc

$$3f(r) + rf'(r) = 3a$$

Question 2 - Cette équation différentielle peut être résolue par la méthode du facteur intégrant. On obtient

$$f(r) = a + \frac{b}{r^3}$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

Le champ de déplacement solution a donc pour expression

$$\bar{u}(r) = rf(r) \bar{e}_r = \left(ar + \frac{b}{r^2} \right) \bar{e}_r$$

Exercice

Étape 3 - Détermination des constantes d'intégration

Exercice 2-7. Déterminer les constantes d'intégration en exploitant les conditions limites du problème et résoudre complètement le problème d'élasticité.

- ① Montrer que les composantes de $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}$ s'écrivent

$$\varepsilon_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = a + \frac{b}{r^3}, \quad \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0$$

$$\sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0$$

avec

$$A = (3\lambda + 2\mu) a, \quad B = 2\mu b$$

- ② Écrire les relations que doivent vérifier les constantes d'intégration A, B pour que le champ de contrainte satisfasse les conditions de contour.
- ③ Déterminer les constantes d'intégration et résoudre complètement le problème d'élasticité.

Correction

Question 1 - On a les relations

$$f = a + \frac{b}{r^3}; \quad rf' = 3(a - f) = -\frac{3b}{r^3}$$

En remplaçant f et rf' dans les expressions de $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}$ on obtient :

- les composantes du tenseur des déformations

$$\varepsilon_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = a + \frac{b}{r^3}, \quad \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0$$

- les composantes du tenseur des contraintes

$$\sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0$$

avec

$$A = (3\lambda + 2\mu) a, \quad B = 2\mu b$$

Question 2 - Condition sur ∂S_0 , on a $\overline{F}^S = p_0 \bar{e}_r$, et $\bar{n} = -\bar{e}_r$, ainsi

$$\overline{T}(M, \bar{n}) = \overline{F}^S = p_0 \bar{e}_r \quad \Rightarrow \quad \overline{T}(M, \bar{e}_r) = -\overline{T}(M, \bar{n}) = -p_0 \bar{e}_r$$

ainsi

$$\sigma_{rr} = \overline{T}(M, \bar{e}_r) \cdot \bar{e}_r = -p_0$$

d'où la relation :

$$A - 2 \frac{B}{r_0^3} = -p_0$$

Question 2 - Condition sur ∂S_0 , on a $\bar{F}^S = p_0 \bar{e}_r$, et $\bar{n} = -\bar{e}_r$, ainsi

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{F}^S = p_0 \bar{e}_r \quad \Rightarrow \quad \bar{T}(M, \bar{e}_r) = -\bar{T}(M, \bar{n}) = -p_0 \bar{e}_r$$

ainsi

$$\sigma_{rr} = \bar{T}(M, \bar{e}_r) \cdot \bar{e}_r = -p_0$$

d'où la relation :

$$A - 2 \frac{B}{r_0^3} = -p_0$$

Condition sur ∂S_1 , on a $\bar{F}^S = -p_1 \bar{e}_r$, et $\bar{n} = \bar{e}_r$, soit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_r) = -p_1 \bar{e}_r \quad \Rightarrow \quad \sigma_{rr} = -p_1$$

d'où la relation :

$$A - 2 \frac{B}{r_1^3} = -p_1$$

Question 2 - Condition sur ∂S_0 , on a $\bar{F}^S = p_0 \bar{e}_r$, et $\bar{n} = -\bar{e}_r$, ainsi

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{F}^S = p_0 \bar{e}_r \quad \Rightarrow \quad \bar{T}(M, \bar{e}_r) = -\bar{T}(M, \bar{n}) = -p_0 \bar{e}_r$$

ainsi

$$\sigma_{rr} = \bar{T}(M, \bar{e}_r) \cdot \bar{e}_r = -p_0$$

d'où la relation :

$$A - 2 \frac{B}{r_0^3} = -p_0$$

Condition sur ∂S_1 , on a $\bar{F}^S = -p_1 \bar{e}_r$, et $\bar{n} = \bar{e}_r$, soit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_r) = -p_1 \bar{e}_r \quad \Rightarrow \quad \sigma_{rr} = -p_1$$

d'où la relation :

$$A - 2 \frac{B}{r_1^3} = -p_1$$

Question 3 - Les constantes A et B sont obtenues en résolvant le système linéaire 2×2 précédent, on obtient :

$$A = \frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}, \quad B = \frac{1}{2} (p_0 - p_1) \frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}$$

et donc

$$a = \frac{A}{3\lambda + 2\mu}; \quad b = \frac{B}{2\mu}$$

Bilan

On a déterminé un champ $\bar{\sigma}(M) \in (SA)$ et un déplacement $\bar{u}(M) \in (CA)$, le couple $(\bar{\sigma}(M), \bar{u}(M))$ est donc l'unique solution du problème d'élasticité posé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(M) = \left(\frac{B}{2\mu} \frac{1}{r^2} + \frac{A}{3\lambda + 2\mu} r \right) \bar{e}_r \\ \bar{\varepsilon}(M) = \left(-\frac{B}{\mu} \frac{1}{r^3} + \frac{A}{3\lambda + 2\mu} \right) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + \left(\frac{B}{2\mu} \frac{1}{r^3} + \frac{A}{3\lambda + 2\mu} \right) (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\phi \otimes \bar{e}_\phi) \\ \bar{\sigma}(M) = \left(-\frac{2B}{r^3} + A \right) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + \left(\frac{B}{r^3} + A \right) (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\phi \otimes \bar{e}_\phi) \\ A = \frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}, \quad B = \frac{1}{2} (p_0 - p_1) \frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \end{array} \right.$$

Remarque : ce problème peut également être résolu par la méthode des contraintes en utilisant une forme réduite des équations de Beltrami propre aux problème possédant une symétrie sphérique : une idée de DS!

FIN DU PROBLÈME

Plan du paragraphe

- ➦ Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- ➦ Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- ➦ Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
 - Position du problème
 - Résolution du problème d'élasticité
 - Cas de la sphère pleine
 - Limite initiale d'élasticité
 - Cas de la coque sphérique mince
- ➦ Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- ➦ Problèmes d'élasticité plane

Cas de la sphère pleine

Le cas de la sphère pleine correspond à $r_0 = 0$.

- La régularité de la solution pour $r = 0$ impose que $b = 0$ (sinon $\lim_{r \rightarrow 0} u_r(r) = \infty$),
d'où

$$B = 0$$

- La condition limite sur ∂S_1 permet de déterminer A :

$$A = -p_1$$

Cas de la sphère pleine

Le cas de la sphère pleine correspond à $r_0 = 0$.

- La régularité de la solution pour $r = 0$ impose que $b = 0$ (sinon $\lim_{r \rightarrow 0} u_r(r) = \infty$), d'où

$$B = 0$$

- La condition limite sur ∂S_1 permet de déterminer A :

$$A = -p_1$$

Ainsi, le champ de contrainte dans la sphère est donné par :

$$\bar{\sigma} = -p_1 \bar{\mathbf{1}} \quad (\text{contrainte isotrope})$$

et le champ de déplacement est donné par :

$$\bar{u}(r) = a r \bar{e}_r = -\frac{p_1}{3\lambda + 2\mu} r \bar{e}_r = -\frac{p_1}{3K} r \bar{e}_r$$

Remarque :

Cette solution reste valable quelque soit la forme du solide plein soumis à une pression normale uniforme. On retrouve un résultat déjà établis.

Plan du paragraphe

- ⑤ Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- ④ Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- ③ Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
 - Position du problème
 - Résolution du problème d'élasticité
 - Cas de la sphère pleine
 - **Limite initiale d'élasticité**
 - Cas de la coque sphérique mince
- ② Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- ① Problèmes d'élasticité plane

Limite initiale d'élasticité

On se place dans le cas où $p_0 = 0$ et on suppose que la limite élastique du matériau est régie par le critère de Tresca

$$f(\bar{\sigma}) = \max_{1 \leq i, j \leq 3} (|\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_s \leq 0$$

Exercice 2-8. Limite d'élasticité

- 1 Écrire la condition de non plastification en fonction de p_1, r_0, r_1, σ_s et r .

Limite initiale d'élasticité

On se place dans le cas où $p_0 = 0$ et on suppose que la limite élastique du matériau est régie par le critère de Tresca

$$f(\bar{\sigma}) = \max_{1 \leq i, j \leq 3} (|\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_s \leq 0$$

Exercice 2-8. Limite d'élasticité

- 1 Écrire la condition de non plastification en fonction de p_1, r_0, r_1, σ_s et r .
- 2 Tous les paramètres étant fixés, montrer que la contrainte limite est atteinte en premier lieu sur la paroi intérieure de la sphère.

On note p^* la valeur de la pression limite en ces points. Calculer p^* en fonction de r_0, r_1, σ_s .

Correction

Question 1 - Le repère sphérique étant principal, le critère de Tresca s'écrit directement

$$f(\bar{\sigma}) = \max_{1 \leq i, j \leq 3} (|\sigma_i - \sigma_j|) = |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| - \sigma_s \leq 0$$

soit,

$$\frac{3}{2} \frac{p_1}{r_1^3 - r_0^3} \frac{r_0^3 r_1^3}{r^3} \leq \sigma_s$$

Correction

Question 1 - Le repère sphérique étant principal, le critère de Tresca s'écrit directement

$$f(\bar{\sigma}) = \max_{1 \leq i, j \leq 3} (|\sigma_i - \sigma_j|) = |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| - \sigma_s \leq 0$$

soit,

$$\frac{3}{2} \frac{p_1}{r_1^3 - r_0^3} \frac{r_0^3 r_1^3}{r^3} \leq \sigma_s$$

Question 2 - Puisque r intervient au dénominateur, les points où le critère de Tresca est maximal sont situés sur la surface intérieure ∂S_0 (*i.e.* $r = r_0$).

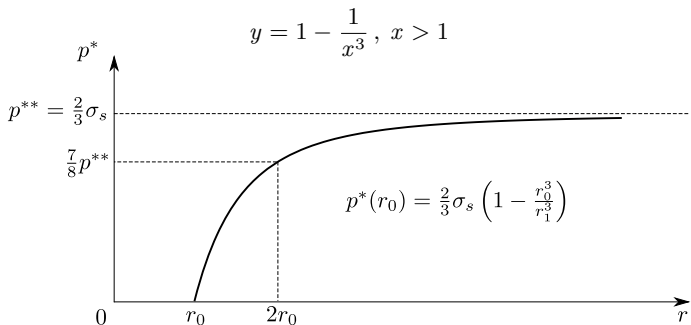
La pression extérieure maximale admissible p^* vérifie donc la relation

$$\frac{3}{2} \frac{p^* r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} = \sigma_s$$

soit

$$p^* = \frac{2}{3} \sigma_s \left(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3} \right)$$

Compléments - On fixe le rayon intérieur r_0 et on s'intéresse à la relation $r_1 \rightarrow p^*(r_1)$. Cette relation est de la forme



On a

$$p^*(r_0) = 0, \quad \lim_{r_1 \rightarrow \infty} p^*(r_1) = p^{**} = \frac{2}{3}\sigma_s$$

$$p^*(r_1 = 2r_0) = \frac{2}{3}\sigma_s \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{7}{8}p^{**}$$

Lorsque le rayon extérieur est deux fois plus grand que le rayon intérieur, la pression admissible vaut déjà 88% de la pression maximale admissible : on ne gagne donc pas grand chose à augmenter beaucoup l'épaisseur de la coque.

Commentaires

L'état de contrainte dans une sphère pleine en compression uniforme est donné par le tenseur sphérique

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p_1 \bar{\bar{1}}$$

Le critère de la contrainte tangentielle maximum (Tresca) n'est donc jamais violé : sa résistance à la compression est donc illimitée.

En revanche, pour une creuse, lorsque $r_0 \rightarrow 0$ on a $p^* = \frac{2}{3}\sigma_s$ et cela quelque soit r_1 .

Par conséquent, la présence d'un micro-défaut réduit considérablement la résistance à la compression uniforme.

Plan du paragraphe

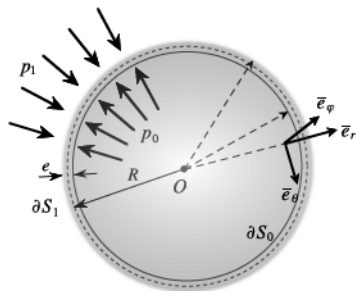
- ⑤ Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- ④ Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- ③ Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
 - Position du problème
 - Résolution du problème d'élasticité
 - Cas de la sphère pleine
 - Limite initiale d'élasticité
 - Cas de la coque sphérique mince
- ② Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- ① Problèmes d'élasticité plane

Cas de la coque sphérique mince

On reprend le cas de la sphère du problème général précédent et on note

$e = r_1 - r_0$ l'épaisseur de la coque

$R = \frac{1}{2} (r_0 + r_1)$ le rayon moyen



On s'intéresse au cas particulier où l'épaisseur est infiniment mince relativement au rayon, c'est-à-dire tel que

$$e \ll R \iff \frac{e}{R} \ll 1$$

Cas où la pression extérieure est supposée nulle : $p_1 = 0$

Exercice 2-9. Formule des chaudronniers

- 1 Calculer, à partir des formules générale, la composante circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$, dans le cas particulier où la pression extérieure est nulle.
- 2 Montrer que lorsque la coque est mince, la contrainte circonférentielle est approchée par

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_0 R}{2e}$$

Indication : on pose $h = e/2$, de telle sorte que

$$r_0 = R - h ; r_1 = R + h ; r = R + O(h)$$

Calculer au préalable $r_1^3 - r_0^3$.

On retrouve ainsi la formule des chaudronniers établis au chapitre 3.

Correction

Question 1 - L'application directe de la formule donne

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{B}{r^3} + A = \frac{p_0 r_0^3}{r_1^3 - r_0^3} \left(1 + \frac{r_1^3}{2r^3} \right) \quad (35)$$

Correction

Question 1 - L'application directe de la formule donne

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{B}{r^3} + A = \frac{p_0 r_0^3}{r_1^3 - r_0^3} \left(1 + \frac{r_1^3}{2r^3} \right) \quad (35)$$

Question 2 - On pose $h = e/2$, de telle sorte que

$r_0 = R - h$; $r_1 = R + h$; $r = R + O(h)$ et on cherche à approcher la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$.

On calcul

$$r_1^3 - r_0^3 = (R + h)^3 - (R - h)^3 = 6R^2h + 2h^3 = 6R^2h + O(h^3)$$

On peut également écrire

$$r_0^3 = R^3 + O(h) ; r_1^3 = R^3 + O(h)$$

En remplaçant les valeurs obtenues dans (35), et en ne conservant que les termes principaux par rapport à $h/R \ll 1$, avec le développement limité

$$\frac{1}{1+x} = 1 + O(x) \text{ avec } x = \frac{h}{R}$$

on obtient

$$\sigma_{\theta\theta} \simeq \frac{p_0 R}{6h} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{p_0 R}{2e}$$

Cas général

On considère $x = \frac{e}{R}$ comme infiniment petit et on exprime les grandeurs A et B précédentes en fonction de x .

On a :

$$r_0 = R - \frac{e}{2} = R \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$r_1 = R + \frac{e}{2} = R \left(1 + \frac{1}{2}x\right)$$

Cas général

On considère $x = \frac{e}{R}$ comme infiniment petit et on exprime les grandeurs A et B précédentes en fonction de x .

On a :

$$r_0 = R - \frac{e}{2} = R \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$r_1 = R + \frac{e}{2} = R \left(1 + \frac{1}{2}x\right)$$

En remplaçant dans les expressions de A et B , on obtient les développements limités à l'ordre 1 suivants :

$$A = \frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} = \frac{p_0 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 - p_1 \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^3}{\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^3 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3}$$

$$\simeq \frac{p_0 - p_1}{3x} - \frac{p_0 + p_1}{2} + O(x)$$

$$\frac{2B}{r^3} = \frac{1}{r^3} (p_0 - p_1) \frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} = (p_0 - p_1) \frac{R^3}{r^3} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^3}{\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^3 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3}$$

$$\simeq (p_0 - p_1) \frac{R^3}{r^3} \left(\frac{1}{3x} + O(x) \right)$$

Calcul des composantes de $\bar{\sigma}$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3} &\simeq -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \left(\frac{1}{3x} - \frac{R^3}{r^3} \frac{1}{3x} \right) \\
 &= -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \frac{r - R}{e} \left(\frac{R^3 + rR^2 + r^2R}{3r^3} \right) \\
 &\simeq -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \frac{r - R}{e}
 \end{aligned}$$

Calcul des composantes de $\bar{\sigma}$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= A - \frac{2B}{r^3} \simeq -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \left(\frac{1}{3x} - \frac{R^3}{r^3} \frac{1}{3x} \right) \\
 &= -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \frac{r - R}{e} \left(\frac{R^3 + rR^2 + r^2R}{3r^3} \right) \\
 &\simeq -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \frac{r - R}{e}
 \end{aligned}$$

On procède de même pour $\sigma_{\theta\theta}$ et on obtient finalement :

$$\left| \begin{array}{l}
 \sigma_{rr} = -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \frac{r - R}{e} \\
 \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{(p_0 - p_1) R}{2e} - \frac{p_0 + p_1}{2} - \frac{p_0 - p_1}{2} \frac{r - R}{e}
 \end{array} \right.$$

Exercice

Exercice 2-10. Application numérique

On considère une sphère de rayon moyen $R = 1 \text{ m}$, d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$ et soumise à une pression intérieure de $0,1 \text{ bar}$, soit :

$$R = 1 \text{ m}, e = 10^{-3} \text{ m}, p_0 = 10^4 \text{ Pa}, p_1 = 0$$

Montrer en appliquant les formules précédentes que

$$|\sigma_{rr}| \ll |\sigma_{\theta\theta}|$$

Exercice

Exercice 2-10. Application numérique

On considère une sphère de rayon moyen $R = 1 \text{ m}$, d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$ et soumise à une pression intérieure de $0,1 \text{ bar}$, soit :

$$R = 1 \text{ m}, e = 10^{-3} \text{ m}, p_0 = 10^4 \text{ Pa}, p_1 = 0$$

Montrer en appliquant les formules précédentes que

$$|\sigma_{rr}| \ll |\sigma_{\theta\theta}|$$

Réponse - En appliquant les formules précédentes, on obtient (en Pascal) :

$$\sigma_{rr} = -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \frac{r - R}{e} = -5 \cdot 10^3 + 10^4 \left(\frac{r - 1}{10^{-3}} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_0 - p_1) R}{2e} - \frac{p_0 + p_1}{2} - \frac{(p_0 - p_1)(r - R)}{2e} = 5 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 \left(\frac{r - 1}{10^{-3}} \right)$$

soit

$$|\sigma_{rr}| < 10^{-2} \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \sigma_{\theta\theta} \simeq 5 \text{ MPa}$$

On vérifie que

$$|\sigma_{rr}| \ll |\sigma_{\theta\theta}|$$

Analyse des résultats :

Notons $p > 0$ l'ordre de grandeur de la pression intérieure et extérieure, on a :

$$|r - R| \leq \frac{e}{2} \implies \left| \frac{r - R}{e} \right| \leq \frac{1}{2}$$

d'où

$$|\sigma_{rr}| = \left| -\frac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1) \frac{r - R}{e} \right| \leq p; \quad |\sigma_{\theta\theta}| \leq p \left(1 + \frac{R}{e} \right)$$

or

$$e \ll R \implies \frac{R}{e} \gg 1$$

Bilan :

$$|\sigma_{rr}| \ll |\sigma_{\theta\theta}|$$

et

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{(p_0 - p_1) R}{2e} \quad (36)$$

Approche élémentaire statique

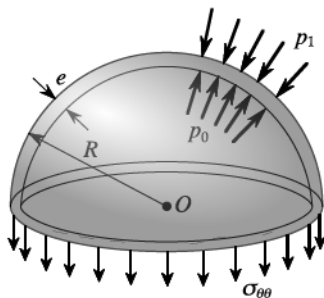
La formule des chaudronniers (36) peut être obtenue par un raisonnement de statique appliqué à une demi-coque sphérique en faisant l'hypothèse que la distribution de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est uniforme sur la section.

L'équilibre statique s'écrit :

$$\pi R^2 (p_0 - p_1) = 2\pi R e \sigma_{\theta\theta}$$

soit

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_0 - p_1) R}{2e}$$

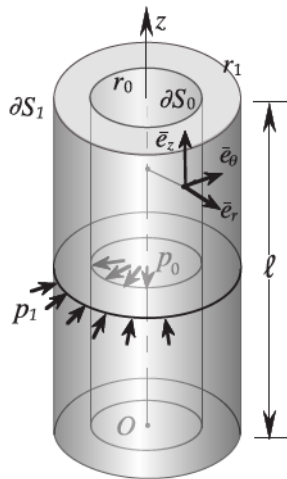


Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
 - Position du problème
 - Résolution
 - Cas du cylindre à paroi mince
- 1 Problèmes d'élasticité plane

Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression

Position du problème : on considère un tube cylindrique circulaire d'axe Oz , de rayons r_0 et r_1 et de longueur l . On se place dans un système de coordonnées cylindriques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$.

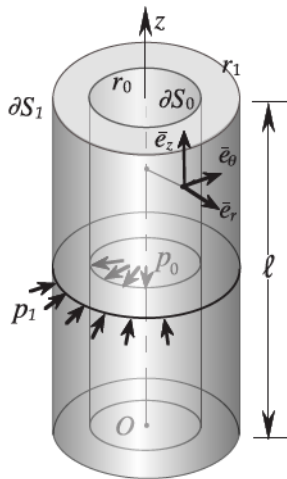


Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression

Position du problème : on considère un tube cylindrique circulaire d'axe Oz , de rayons r_0 et r_1 et de longueur l . On se place dans un système de coordonnées cylindriques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$.

- Les force de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$



Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression

Position du problème : on considère un tube cylindrique circulaire d'axe Oz , de rayons r_0 et r_1 et de longueur l . On se place dans un système de coordonnées cylindriques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$.

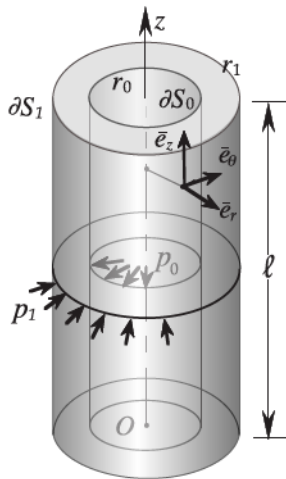
- Les forces de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

- Sur les parois intérieures et extérieures du tube :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$



Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression

Position du problème : on considère un tube cylindrique circulaire d'axe Oz , de rayons r_0 et r_1 et de longueur l . On se place dans un système de coordonnées cylindriques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$.

- Les forces de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

- Sur les parois intérieures et extérieures du tube :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

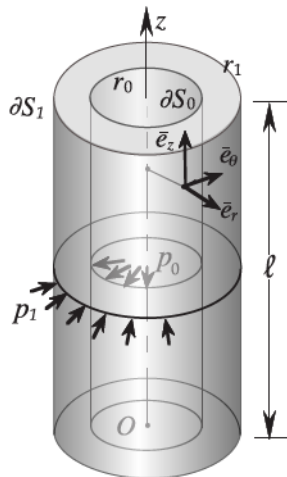
$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$

- Sur les sections extrémités :

$$F_r^S = F_\theta^S = 0 \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_l$$

$$\text{et } F_z^S = -\sigma \text{ sur } S_0; \quad F_z^S = \sigma \text{ sur } S_l$$

$$\text{ou } u_z^d = 0 \text{ sur } S_0; \quad u_z^d = \delta \text{ sur } S_l$$



Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression

Position du problème : on considère un tube cylindrique circulaire d'axe Oz , de rayons r_0 et r_1 et de longueur l . On se place dans un système de coordonnées cylindriques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$.

- Les forces de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

- Sur les parois intérieures et extérieures du tube :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

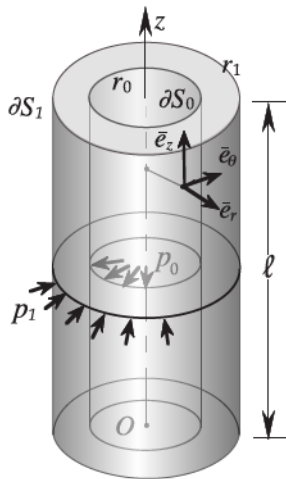
$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$

- Sur les sections extrémités :

$$F_r^S = F_\theta^S = 0 \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_l$$

$$\text{et } F_z^S = -\sigma \text{ sur } S_0; \quad F_z^S = \sigma \text{ sur } S_l$$

$$\text{ou } u_z^d = 0 \text{ sur } S_0; \quad u_z^d = \delta \text{ sur } S_l$$



On cherche à calculer $\bar{u}(M)$, $\bar{\varepsilon}(M)$, $\bar{\sigma}(M)$ en tout point du solide en utilisant la méthode du déplacement.

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
 - Position du problème
 - **Résolution**
 - Cas du cylindre à paroi mince
- 1 Problèmes d'élasticité plane

Résolution

La résolution est décomposée en 4 étapes (idem sphère).

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement.

Résolution

La résolution est décomposée en 4 étapes (idem sphère).

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement.
- 2 Calcul des tenseurs associés $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.

Résolution

La résolution est décomposée en 4 étapes (idem sphère).

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement.
- 2 Calcul des tenseurs associés $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.
- 3 Formulation et résolution de l'équation de Navier.

Résolution

La résolution est décomposée en 4 étapes (idem sphère).

- 1 Choix a priori d'une forme particulière pour le champ de déplacement.
- 2 Calcul des tenseurs associés $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.
- 3 Formulation et résolution de l'équation de Navier.
- 4 Détermination des constantes d'intégration en exploitant les conditions limites en efforts.

Étape 1

Les propriétés de symétrie de la géométrie et du chargement conduisent à prendre un champ de déplacement sous la forme découplée en r et en z :

$$\bar{u}(r, z) = rf(r) \bar{e}_r + g(z) \bar{e}_z$$

Le champ de déformation correspondant est donné par (annexe) :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = (f(r) + rf'(r)) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + f(r) \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + g'(z) \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z$$

Le champ de contrainte est donnée par la loi de Hooke

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} &= \lambda (rf'(r) + 2f(r) + g'(z)) \bar{\bar{1}} \\ &+ 2\mu (f(r) + rf'(r)) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r \\ &+ 2\mu f(r) \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta + 2\mu g'(z) \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z \end{aligned}$$

Comme le champ de déplacement est irrotationnel ($\overline{\nabla u}$ est symétrique) et que les forces volumiques sont nulles, l'équation de Navier devient :

$$\operatorname{div} \bar{u} = 2f(r) + rf'(r) + g'(z) = \text{constante} \quad \text{quelques soient } r \text{ et } z$$

d'où

$$\begin{cases} 2f(r) + rf'(r) & = 2a \\ g'(z) & = c \end{cases}$$

L'intégration de ce système donne (méthode du facteur intégrant) :

$$\bar{u} = \left(ar + \frac{b}{r} \right) \bar{e}_r + cz \bar{e}_z$$

où a, b, c sont des constantes à déterminer.

Les champs de déformation et de contrainte peuvent être explicités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2}, \quad \varepsilon_{zz} = c \\ \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} = C \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$A = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c, \quad B = 2\mu b, \quad C = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c$$

ou encore

$$a = \frac{1}{E} (A - \nu(A + C)), \quad b = \frac{B}{2\mu}, \quad c = \frac{1}{E} (C - 2\nu A)$$

Les champs de déformation et de contrainte peuvent être explicités :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = a - \frac{b}{r^2}, & \varepsilon_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2}, & \varepsilon_{zz} = c \\ \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, & \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}, & \sigma_{zz} = C \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

avec

$$A = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c, \quad B = 2\mu b, \quad C = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c$$

ou encore

$$a = \frac{1}{E}(A - \nu(A + C)), \quad b = \frac{B}{2\mu}, \quad c = \frac{1}{E}(C - 2\nu A)$$

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}$ doit vérifier les conditions limites données sur les parois intérieure et extérieure. Ces conditions permettent de déterminer A et B :

$$A = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \quad B = (p_0 - p_1) \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

ce qui définit totalement σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$. Il reste à déterminer C en exploitant les CL sur les sections droites

Cas où les CL portent sur les déplacements $\bar{u} = \left(ar + \frac{b}{r} \right) \bar{e}_r + cz \bar{e}_z$

$$u_z = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } u_z = \delta \text{ pour } z = l \Rightarrow c = \frac{\delta}{l}$$

et

$$c = \frac{1}{E} (C - 2\nu A) \Rightarrow C = 2\nu A + \frac{\delta E}{l}$$

Ainsi

$$\bar{u} = \left(\frac{r}{E} A (1 + \nu) (1 - 2\nu) + \frac{B}{2\mu r} - \nu \frac{\delta}{l} r \right) \bar{e}_r + z \frac{\delta}{l} \bar{e}_z$$

Cas où les CL portent sur les déplacements $\bar{u} = \left(ar + \frac{b}{r} \right) \bar{e}_r + cz \bar{e}_z$

$$u_z = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } u_z = \delta \text{ pour } z = l \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\delta}{l}$$

et

$$c = \frac{1}{E} (C - 2\nu A) \quad \Rightarrow \quad C = 2\nu A + \frac{\delta E}{l}$$

Ainsi

$$\bar{u} = \left(\frac{r}{E} A (1 + \nu) (1 - 2\nu) + \frac{B}{2\mu r} - \nu \frac{\delta}{l} r \right) \bar{e}_r + z \frac{\delta}{l} \bar{e}_z$$

Remarques : si la longueur du tube est maintenue constante, c-à-d si $\delta = 0$, on a

$$\bar{u} = \left(\frac{r}{E} A (1 + \nu) (1 - 2\nu) + \frac{B}{2\mu r} \right) \bar{e}_r$$

C'est le cas des déformations planes.

Cas où les CL portent sur les forces

Détermination de C :

On a

$$\sigma_{zz} = \sigma \quad \Rightarrow \quad C = \sigma$$

Ainsi :

$$\bar{u} = \left(\frac{(1 - \nu) A - \nu \sigma}{E} r + \frac{B}{2\mu r} \right) \bar{e}_r + \frac{1}{E} (\sigma - 2\nu A) z \bar{e}_z$$

Remarque : si $\sigma = 0$ alors $\sigma_{zz}(M) = 0$, on est dans le cas des contraintes planes

FIN DU PROBLÈME

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
 - Position du problème
 - Résolution
 - Cas du cylindre à paroi mince
- 1 Problèmes d'élasticité plane

Cas du cylindre à paroi mince

On note comme pour la sphère

$$e = r_1 - r_0 \quad \text{l'épaisseur de la coque}$$

$$R = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad \text{le rayon moyen}$$

et on s'intéresse au cas particulier où l'épaisseur est infiniment mince relativement au rayon, c'est-à-dire tel que

$$e \ll R \quad \iff \quad \frac{e}{R} \ll 1$$

Cas du cylindre à paroi mince

On note comme pour la sphère

$$e = r_1 - r_0 \quad \text{l'épaisseur de la coque}$$

$$R = \frac{1}{2} (r_0 + r_1) \quad \text{le rayon moyen}$$

et on s'intéresse au cas particulier où l'épaisseur est infiniment mince relativement au rayon, c'est-à-dire tel que

$$e \ll R \quad \iff \quad \frac{e}{R} \ll 1$$

Exercice 2-11. Montrer que lorsque la coque est mince, les contraintes se réduisent à

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_0 - p_1) R}{e}; \quad \sigma_{rr} = 0$$

Indication : on pose $h = e/2$, de telle sorte que

$$r_0 = R - h; \quad r_1 = R + h; \quad r = R + O(h)$$

Correction

Les contraintes sont données par

$$A = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \quad B = (p_0 - p_1) \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

On a

$$r_0^2 = R^2 + h^2 - 2Rh; \quad r_1^2 = R^2 + h^2 + 2Rh$$

alors

$$r_1^2 - r_0^2 = 4Rh; \quad r_1^2 r_0^2 = R^4 - 2R^2 h^2 + h^4$$

En remplaçant dans les expressions de A et B ci-dessus, et en ne conservant que les termes principaux par rapport à h/R , on obtient

$$A = \frac{p_0 R^2 - p_1 R^2 + O(h)}{4Rh} = \frac{(p_0 - p_1) R}{2e} + O(1)$$

$$B = (p_0 - p_1) \frac{R^4 - 2R^2 h^2 + h^4}{4Rh} = (p_0 - p_1) \frac{R^3}{2e} + O(1)$$

Ainsi

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \simeq \frac{(p_0 - p_1) R}{2e} - (p_0 - p_1) \frac{R}{2e} = 0$$

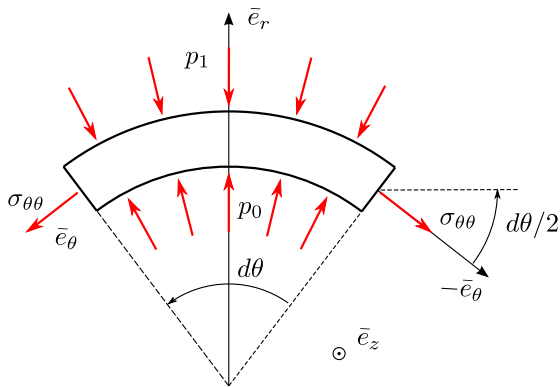
$$\sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \simeq \frac{(p_0 - p_1) R}{2e} - (p_0 - p_1) \frac{R}{2e} = \frac{(p_0 - p_1) R}{e}$$

Approche élémentaire statique

Ce résultat peut être obtenu directement par une approche statique en supposant la contrainte circonférentielle uniformément répartie dans l'épaisseur de la coque.

Exercice 2-12. Approche statique du cylindre mince. On considère le secteur de tube d'angle $d\theta$ et de hauteur dz .

- 1 Calculer la résultante des forces de pression (forces externes) et des forces (internes) dues à la contrainte circonférentielle que l'on suppose implicitement homogène dans l'épaisseur.
- 2 En déduire la valeur de $\sigma_{\theta\theta}$



Correction

Calcul de la résultante des forces sur cet élément de volume dans la direction Or :

- pression appliquée :

$$(p_0 - p_1) R d\theta dz$$

- composante de la réaction du tube :

$$2\sigma_{\theta\theta} \sin \frac{d\theta}{2} edz \simeq e\sigma_{\theta\theta} d\theta dz$$

En égalant ces 2 forces on obtient

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_0 - p_1) R}{e}$$

Problèmes d'élasticité plane

Objectifs : exploiter les propriétés géométriques pour limiter au maximum le nombre d'inconnues

Cas de l'élasticité plane :

- 1 les phénomènes intéressants se passent dans un plan ;
- 2 on écrit des conditions simplifiées pour ce qui se passe dans la troisième direction.

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane
 - Déformations planes
 - Contraintes planes
 - Problème type de contrainte plane
 - Fonctions de contraintes
 - Concentration de contraintes
 - Demi-anneau en flexion

Champ de déplacement de déformation plane

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . On s'intéresse aux champs de déplacements de la forme

$$\bar{u}(M) = u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) \quad (37)$$

Le champ de déformation donné par la formule

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

a comme composantes

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{array} \right.$$

Champ de déplacement de déformation plane

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . On s'intéresse aux champs de déplacements de la forme

$$\bar{u}(M) = u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) \quad (37)$$

Le champ de déformation donné par la formule

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

a comme composantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{array} \right.$$

D'où la forme de la matrice

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant la loi de Hooke on obtient un tenseur des contraintes de la forme

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (38)$$

En utilisant la forme inverse de la loi de Hooke

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}}$$

et en écrivant la condition $\epsilon_{33} = 0$ on obtient

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

En appliquant la loi de Hooke on obtient un tenseur des contraintes de la forme

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (38)$$

En utilisant la forme inverse de la loi de Hooke

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}}$$

et en écrivant la condition $\epsilon_{33} = 0$ on obtient

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

On peut alors donner une forme purement bidimensionnelle à la loi d'élasticité :

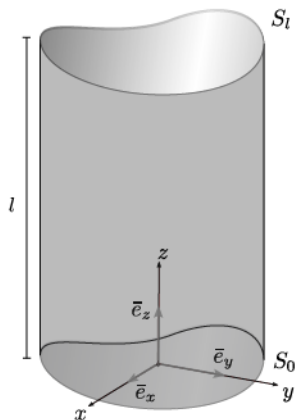
$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1 - \nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Problème type de déformation plane

On considère un solide Ω de forme cylindrique parallèle à (Oxy) .

Les données du problème d'équilibre élastique sont supposées de la forme suivante.

- les forces volumiques \bar{f}^v sont parallèles à (Oxy) et indépendantes de z ;
- sur les surfaces S_0 et S_l la composante u_z du déplacement est imposée nulle et les composantes F_x^S et F_y^S de la force surfacique sont imposées nulles ;
- les données sur la surface latérale sont parallèles à (Oxy) et indépendantes de z , elles peuvent être de type déplacements imposés ou forces imposées.



Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane
 - Déformations planes
 - **Contraintes planes**
 - Problème type de contrainte plane
 - Fonctions de contraintes
 - Concentration de contraintes
 - Demi-anneau en flexion

Contraintes planes

L'état de contraintes planes correspond à la forme suivante du tenseur des contraintes dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$[\sigma (M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} (x_1, x_2) & \sigma_{12} (x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21} (x_1, x_2) & \sigma_{22} (x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

En élasticité isotrope le tenseur des déformations prend la forme

$$[\varepsilon (M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} (x_1, x_2) & \varepsilon_{12} (x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21} (x_1, x_2) & \varepsilon_{22} (x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} (x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Contraintes planes

L'état de contraintes planes correspond à la forme suivante du tenseur des contraintes dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

En élasticité isotrope le tenseur des déformations prend la forme

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

On peut alors donner une forme purement bidimensionnelle à la loi d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

La troisième composante normale de déformation doit être telle que la contrainte σ_{33} s'annule ce qui implique que

$$\epsilon_{33} = \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

Remarque : les conditions de compatibilité montrent qu'en fait ϵ_{33} dépend de x_3 . Si la structure est suffisamment mince on peut négliger cette dépendance et considérer que l'on est en présence d'un vrai problème 2d.

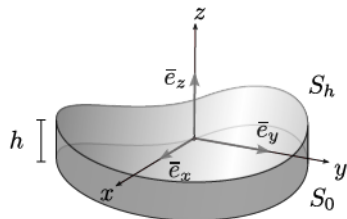
Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane
 - Déformations planes
 - Contraintes planes
 - **Problème type de contrainte plane**
 - Fonctions de contraintes
 - Concentration de contraintes
 - Demi-anneau en flexion

Problème type de contrainte plane

Soit un solide Ω de forme cylindrique, parallèle à (Oxy) , d'épaisseur h , soumis aux chargements suivants :

- les forces volumiques \bar{f}^v sont parallèles à (Oxy) et indépendantes de z ;
- les surfaces S_0 et S_h sont libres de contrainte ;
- les forces de contour sur la surface latérale sont parallèles à (Oxy) et indépendantes de z :

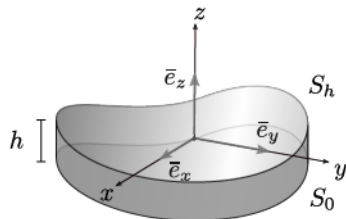


$$\bar{F}^S(M) = F_x(x, y) \bar{e}_x + F_y(x, y) \bar{e}_y$$

Problème type de contrainte plane

Soit un solide Ω de forme cylindrique, parallèle à (Oxy) , d'épaisseur h , soumis aux chargements suivants :

- les forces volumiques \bar{f}^v sont parallèles à (Oxy) et indépendantes de z ;
- les surfaces S_0 et S_h sont libres de contrainte ;
- les forces de contour sur la surface latérale sont parallèles à (Oxy) et indépendantes de z :



$$\bar{F}^S(M) = F_x(x, y) \bar{e}_x + F_y(x, y) \bar{e}_y$$

Le champ de contrainte solution de ce problème d'élasticité n'est en général pas plan. On a cependant le résultat suivant :

Lorsque l'épaisseur h est faible devant S_0 , ce problème peut être ramené à l'étude d'un problème plan. Cette simplification est appelée l'approximation des tranches minces.

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane
 - Déformations planes
 - Contraintes planes
 - Problème type de contrainte plane
 - **Fonctions de contraintes**
 - Concentration de contraintes
 - Demi-anneau en flexion

Fonctions de contraintes - En coordonnées cartésiennes

Les deux premières équations d'équilibre s'écrivent

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0$$

D'après un théorème d'analyse, la première équation implique qu'il existe une fonction $f_1(x_1, x_2)$ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

et la seconde, qu'il existe une fonction $f_2(x_1, x_2)$ telle que

$$\sigma_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \sigma_{21} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

De plus, le tenseur des contraintes étant symétrique *i.e.* $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, on doit avoir

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Il existe une fonction $\phi(x_1, x_2)$ telle que

$$f_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \quad f_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

Il en résulte que les contraintes planes s'expriment à l'aide d'une seule fonction ϕ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

fonction d'Airy

Il existe une fonction ϕ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (40)$$

Bilan : on remplace la recherche de 3 fonctions par la recherche d'une seule fonction $\phi(x_1, x_2)$; cette fonction est appelée la *fonction de contrainte* ou *fonction d'Airy*¹.

¹G. B. Airy (1801,1892)

Le champ de contrainte précédent doit donner accès à un champ de déformation compatible.

Équation de compatibilité précédente plus la loi d'élasticité isotrope (en contraintes planes et en déformations planes) conduisent à la relation suivante

$$\sigma_{11,22} - \nu\sigma_{22,22} + \sigma_{22,11} - \nu\sigma_{11,11} - 2(1 + \nu)\sigma_{12,12} = 0$$

(qui n'est autre que l'une des équations de Beltrami en contraintes planes)

L'équation aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction de contrainte ϕ s'en déduit :

$$\Delta_2\Delta_2\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4} = 0$$

où Δ_2 désigne le laplacien en dimension 2 (voir annexe). L'équation est la même en contraintes planes qu'en déformations planes.

Bilan

Les fonctions ϕ recherchées sont à bilaplacien nul :

$$\Delta_2\Delta_2\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4} = 0$$

elles sont appelées *biharmoniques*.

Fonctions de contraintes - En coordonnées cylindriques

Résultat

Pour un champ de contraintes recherché de la forme

$$\sigma_{rr}(r, \theta), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta), \sigma_{r\theta}(r, \theta), \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

Il existe une fonction contraintes $\phi(r, \theta)$ telle que

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (41)$$

Fonctions de contraintes - En coordonnées cylindriques

Résultat

Pour un champ de contraintes recherché de la forme

$$\sigma_{rr}(r, \theta), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta), \sigma_{r\theta}(r, \theta), \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

Il existe une fonction contraintes $\phi(r, \theta)$ telle que

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (41)$$

Opérateur bilaplacien en coordonnées cylindrique

$$\Delta_2 \Delta_2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Fonctions de contraintes - En coordonnées cylindriques

Résultat

Pour un champ de contraintes recherché de la forme

$$\sigma_{rr}(r, \theta), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta), \sigma_{r\theta}(r, \theta), \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

Il existe une fonction contraintes $\phi(r, \theta)$ telle que

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (41)$$

Opérateur bilaplacien en coordonnées cylindrique

$$\Delta_2 \Delta_2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Propriété

Une large classe de fonctions biharmoniques s'obtient sous la forme

$$\phi = \phi_1(r, \theta) + r^2 \phi_2(r, \theta)$$

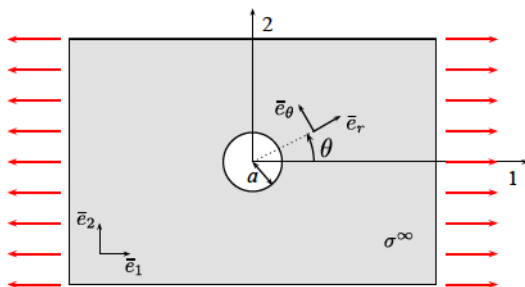
où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions harmoniques (*i.e.* telles que $\Delta_2 \phi = 0$).

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane
 - Déformations planes
 - Contraintes planes
 - Problème type de contrainte plane
 - Fonctions de contraintes
 - **Concentration de contraintes**
 - Demi-anneau en flexion

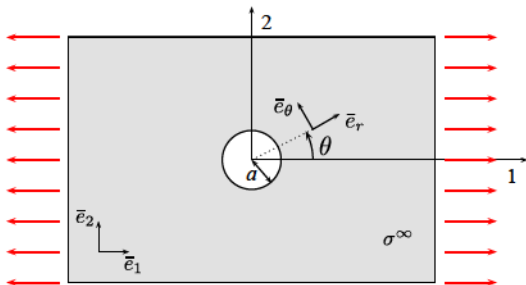
Concentration de contraintes

Position du problème : plaque d'épaisseur $2h$, percée trou cylindrique de rayon a est soumise à ses extrémités à un état de traction simple.



Concentration de contraintes

Position du problème : plaque d'épaisseur $2h$, percée trou cylindrique de rayon a est soumise à ses extrémités à un état de traction simple.



État de contrainte loin du trou (état homogène) :

$$\bar{\sigma}^{\infty} = \sigma^{\infty} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 \quad (42)$$

Le champ de contraintes est recherché sous la forme

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Champ de contraintes loin du trou

Exercice 2-13.

(i) Donner dans le système de coordonnées cylindriques les composantes du tenseur des contraintes loin du trou donné par $\bar{\bar{\sigma}}^\infty = \sigma^\infty \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1$.

(ii) Donner une fonction de contraintes $\phi(r, \theta)$ correspondant à un champ de traction simple en intégrant les relations (41) reliant ϕ aux composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$.

Champ de contraintes loin du trou

Exercice 2-13.

(i) Donner dans le système de coordonnées cylindriques les composantes du tenseur des contraintes loin du trou donné par $\bar{\bar{\sigma}}^\infty = \sigma^\infty \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1$.

(ii) Donner une fonction de contraintes $\phi(r, \theta)$ correspondant à un champ de traction simple en intégrant les relations (41) reliant ϕ aux composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$.

Réponse.

(i) On substitue

$$\bar{e}_1 = \cos \theta \bar{e}_r - \sin \theta \bar{e}_\theta$$

dans pour trouver

$$\bar{\bar{\sigma}}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} [(1 + \cos 2\theta) \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + (1 - \cos 2\theta) \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta - \sin 2\theta (\bar{e}_r \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_r)] \quad (43)$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^\infty = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (44)$$

(ii) Pour trouver une fonction de contraintes conduisant au champ de traction simple, on intègre l'équation la plus simple

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

ce qui donne

$$\phi = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} + g(\theta) r + h(\theta)$$

(ii) Pour trouver une fonction de contraintes conduisant au champ de traction simple, on intègre l'équation la plus simple

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

ce qui donne

$$\phi = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} + g(\theta) r + h(\theta)$$

Détermination de g et h :

En reportant ϕ dans $\sigma_{r\theta}$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta - \frac{h'(\theta)}{2}$$

on montre que nécessairement $h' = 0$, soit $h = Cste$, puisque par ailleurs

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta$$

En exploitant la relation

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

on trouve que g s'écrit nécessairement sous la forme

$$g = g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta$$

On vérifie que la contribution des termes en h, g_1, g_2 est nulle de sorte qu'on ne perd pas en généralité en prenant $h = g_1 = g_2 = 0$.

Finalement

$$\phi = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} \quad (45)$$

Forme générale des contraintes

Le résultat précédent nous incite à rechercher la fonction de contraintes (*i.e.* biharmonique) sous la forme :

$$\phi(r, \theta) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + \left(A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta \quad (46)$$

où $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont des constantes à déterminer.

Forme générale des contraintes

Le résultat précédent nous incite à rechercher la fonction de contraintes (*i.e.* biharmonique) sous la forme :

$$\phi(r, \theta) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + \left(A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta \quad (46)$$

où $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont des constantes à déterminer.

Exercice 2-14.

(i) En utilisant les expression (41) donner l'expression du champ de contraintes général associé à la famille de fonctions de contraintes donnée par (46).

(ii) Identifier certaines des constantes grâce à l'expression du champ de contraintes à l'infini mise en évidence dans l'exercice précédent.

Réponse. La famille de fonctions de contraintes choisie conduit au champ de contraintes suivant :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C + \left(-2A_2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (47)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C + \left(2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (48)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \sin 2\theta \left(A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2} \right) \quad (49)$$

Réponse. La famille de fonctions de contraintes choisie conduit au champ de contraintes suivant :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C + \left(-2A_2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (47)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C + \left(2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (48)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \sin 2\theta \left(A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2} \right) \quad (49)$$

Loin du trou, *i.e.* lorsque $r \rightarrow \infty$, on a

$$\sigma_{rr}^{\infty} = 2B \ln r + B + 2C - 2A_2 \cos 2\theta \quad (50)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\infty} = 2B \ln r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2) \cos 2\theta \quad (51)$$

$$\sigma_{r\theta}^{\infty} = 2 \sin 2\theta (A_2 + 3B_2 r^2) \quad (52)$$

L'identification entre ce champ et celui de traction simple (43) permet de déterminer les constantes :

$$B = 0, \quad C = \frac{\sigma^{\infty}}{4}, \quad A_2 = -\frac{\sigma^{\infty}}{4}, \quad B_2 = 0$$

Prise en compte des conditions à la frontière

Exercice 2-15.

Utiliser les conditions aux limites non encore exploitées pour déterminer complètement le champ de contraintes.

Prise en compte des conditions à la frontière

Exercice 2-15.

Utiliser les conditions aux limites non encore exploitées pour déterminer complètement le champ de contraintes.

Réponse.

Les bords du trou sont libres d'effort : $\bar{\sigma}(r = a) \cdot \bar{e}_r = 0 \Rightarrow (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta})(r = a) = 0$:

$$\sigma_{rr}(r = a) = \frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + \left(\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} \right) \cos 2\theta = 0$$

$$\sigma_{r\theta}(r = a) = 2 \sin 2\theta \left(-\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{a^4} - \frac{D_2}{a^2} \right) = 0$$

Il en découle un système linéaire portant sur les inconnues A, C_2, D_2 :

$$\frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{4} + \frac{3C_2}{a^4} + \frac{D_2}{a^2} = 0$$

dont la solution donne

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{2} a^2, \quad C_2 = -\frac{\sigma^\infty}{4} a^4, \quad D_2 = \frac{\sigma^\infty}{2} a^2$$

Finalement, le champ de contraintes et la fonction de contraintes identifiés sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (53)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (54)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (55)$$

$$\phi = -\frac{\sigma^\infty}{2} a^2 \ln r + \frac{\sigma^\infty}{4} r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left(-r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (56)$$

Résumé de la méthode

1. Choix des hypothèses simplificatrices en fonction des symétries du problème
→ contraintes planes

Résumé de la méthode

1. Choix des hypothèses simplificatrices en fonction des symétries du problème
→ contraintes planes
2. Calcul de σ^∞ et des ses composantes dans le repère cylindrique.

Résumé de la méthode

1. Choix des hypothèses simplificatrices en fonction des symétries du problème
→ contraintes planes
2. Calcul de σ^∞ et des ses composantes dans le repère cylindrique.
3. Détermination de $\phi^\infty(r, \theta)$, fonction de contrainte « loin » du trou, par intégration.

Résumé de la méthode

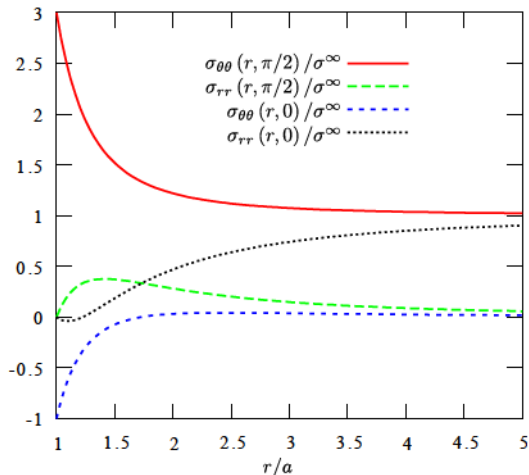
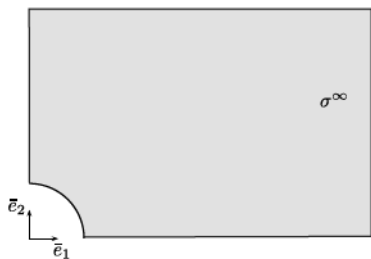
1. Choix des hypothèses simplificatrices en fonction des symétries du problème
→ contraintes planes
2. Calcul de σ^∞ et des ses composantes dans le repère cylindrique.
3. Détermination de $\phi^\infty(r, \theta)$, fonction de contrainte « loin » du trou, par intégration.
4. Choix d'une forme particulière pour $\phi(r, \theta)$.

Résumé de la méthode

1. Choix des hypothèses simplificatrices en fonction des symétries du problème
→ contraintes planes
2. Calcul de σ^∞ et des ses composantes dans le repère cylindrique.
3. Détermination de $\phi^\infty(r, \theta)$, fonction de contrainte « loin » du trou, par intégration.
4. Choix d'une forme particulière pour $\phi(r, \theta)$.
5. Calcul de $\phi(r, \theta)$ par intégration et calcul des constantes en exploitant les CL.

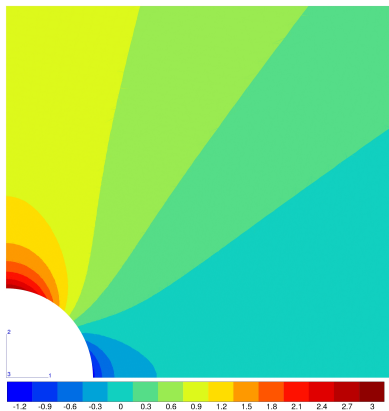
Concentration de contrainte au bord du trou

Profils des contraintes radiale et orthoradiale (normalisées par la contrainte infinie).

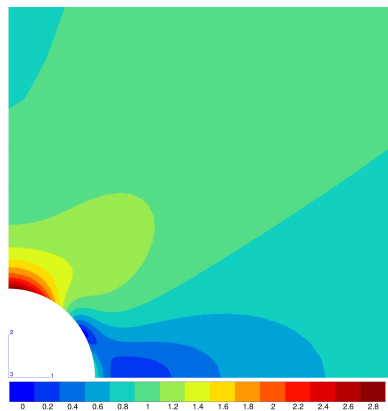


Observations : (i) la décroissance rapide en $1/r^2$ assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou.

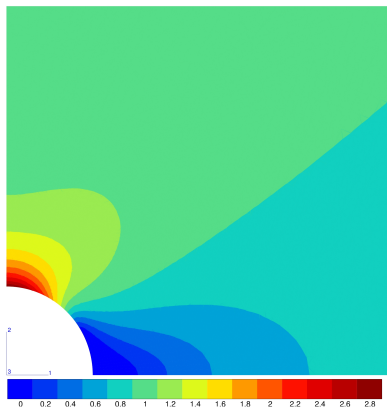
(ii) Loin du trou le champ de contraintes peut être considéré comme homogène.



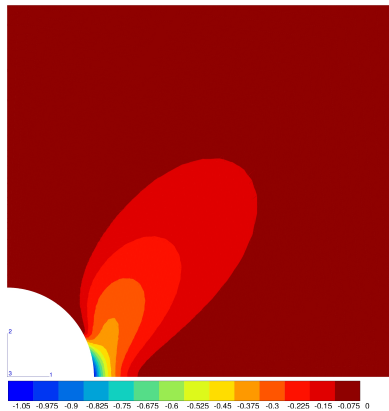
$$\sigma_{\theta\theta}/\sigma^\infty$$



$$\sigma_{eq}/\sigma^\infty$$



$$\sigma_1/\sigma^\infty$$



$$\sigma_2/\sigma^\infty$$

Facteur de concentration de contrainte

Exercice 2-16.

- (i) Donner la valeur de la contrainte orthoradiale au bord du trou en fonction de l'angle θ .
- (ii) Indiquer à quel endroit cette contrainte est maximale et quelle valeur elle y prend.
- (iii) Calculer le facteur de concentration de contrainte défini par

$$K_t = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\max}}{|\sigma^\infty|}$$

Facteur de concentration de contrainte

Exercice 2-16.

- (i) Donner la valeur de la contrainte orthoradiale au bord du trou en fonction de l'angle θ .
- (ii) Indiquer à quel endroit cette contrainte est maximale et quelle valeur elle y prend.
- (iii) Calculer le facteur de concentration de contrainte défini par

$$K_t = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\max}}{|\sigma^\infty|}$$

Réponse. La contrainte orthoradiale au bord du trou vaut

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma^\infty (1 - 2 \cos 2\theta)$$

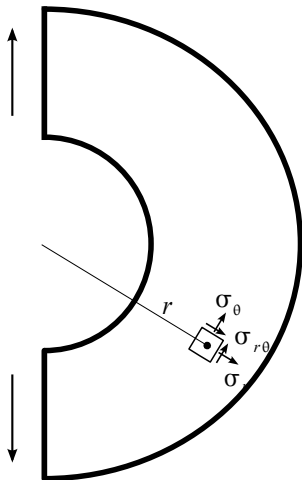
En traction simple, la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $\theta = \pm\pi/2$ et vaut 3 fois la contrainte appliquée. Le facteur de concentration de contrainte vaut donc

$$K_t^{\text{traction}} = 3$$

Plan du paragraphe

- 5 Problème 1 : Traction-compression d'une barre cylindrique
- 4 Problème 2 - Torsion infinitésimale d'une barre cylindrique
- 3 Problème 3 : Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression
- 2 Problème 4 : Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression
- 1 Problèmes d'élasticité plane
 - Déformations planes
 - Contraintes planes
 - Problème type de contrainte plane
 - Fonctions de contraintes
 - Concentration de contraintes
 - Demi-anneau en flexion

Demi-anneau en flexion



A faire...