

MÉCANIQUE DES STRUCTURES I
I3-5
SOLIDES ÉLASTIQUES

FRANK PETITJEAN

Icam Toulouse
Département Génie Mécanique

Septembre 2011

Mécanique des Structures I : Contenu de la formation pour la partie Élasticité

- 4 séances de cours (8 heures)
 - ▶ Cours vidéo-projeté
 - ▶ Support de cours à compléter
- 3 séances de TD par 1/3 de promo
- Déroulement : cours, cours, TD, cours, TD, cours

Mécanique des Structures I : Contenu de la formation pour la partie Élasticité

- 4 séances de cours (8 heures)
 - ▶ Cours vidéo-projeté
 - ▶ Support de cours à compléter
- 3 séances de TD par 1/3 de promo
- Déroulement : cours, cours, TD, cours, TD, cours
- Examen : 2 heures sans support de cours

Mécanique des Structures I : Contenu de la formation pour la partie Élasticité

- 4 séances de cours (8 heures)
 - ▶ Cours vidéo-projeté
 - ▶ Support de cours à compléter
- 3 séances de TD par 1/3 de promo
- Déroulement : cours, cours, TD, cours, TD, cours
- Examen : 2 heures sans support de cours
- 3 séances de TP avec préparation et compte rendu à remettre en fin de séance
 - ▶ Essais de traction et extensométrie
 - ▶ Tube instrumenté en flexion-torsion
 - ▶ Demi-anneau en contrainte plane

Ce cours se prolonge en I3-6 dans MdS-2

Sommaire du cours

Introduction à l'élasticité

Chapitre 1 - Équations d'équilibre

Chapitre 2 - Contraintes

Chapitre 3 - Déformations

Chapitre 4 - Comportement des matériaux

Introduction à l'élasticité

Objectif : montrer l'intérêt de cette discipline en présentant des applications et son utilisation dans les projets du département.

Sommaire

- 1 Qu'est-ce que l'élasticité
- 2 Expériences de traction
- 3 Photoélasticimétrie
- 4 Projets du département Génie Mécanique

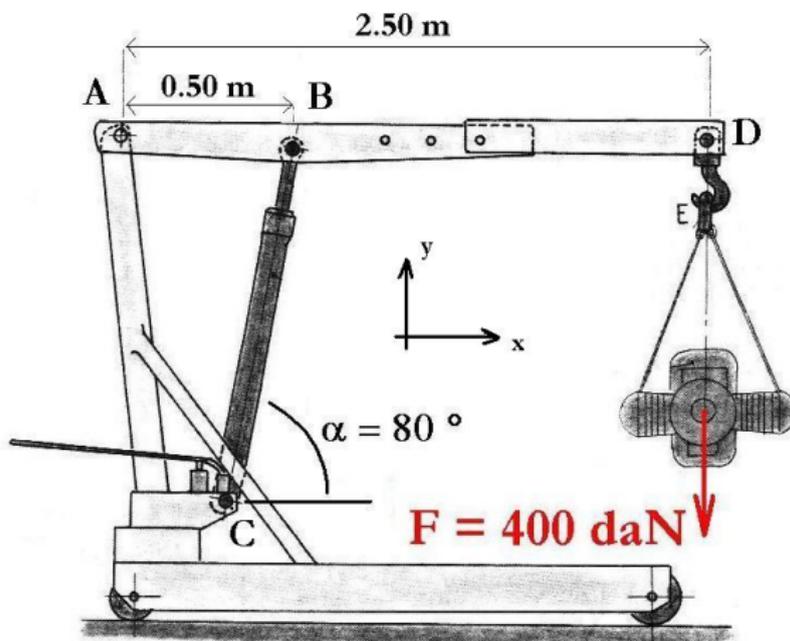
Plan du chapitre

- 1 Qu'est-ce que l'élasticité
- 2 Expériences de traction
- 3 Photoélasticimétrie
- 4 Projets du département Génie Mécanique

Qu'est-ce que l'élasticité

Elle vise l'étude des corps solides dont les déformations sont réversibles (élastiques). Ces corps peuvent être 1d (théorie des poutres), 2d (théorie des plaques) ou 3d (cas général).

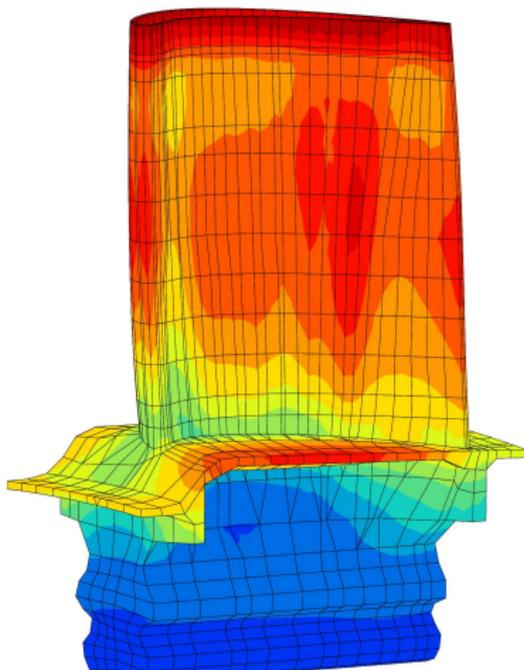
Système de levage, peut être modélisé par des poutres (approche RdS)



Qu'est-ce que l'élasticité

Elle vise l'étude des corps solides dont les déformations sont réversibles (élastiques). Ces corps peuvent être 1d (théorie des poutres), 2d (théorie des plaques) ou 3d (cas général).

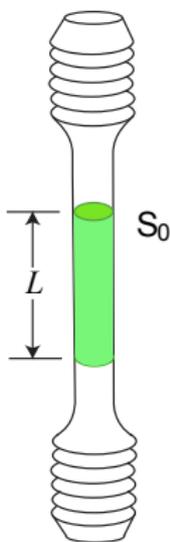
Aube de turbine, modélisation 3d et résolution par ordinateur



Plan du chapitre

- 1 Qu'est-ce que l'élasticité
- 2 Expériences de traction**
- 3 Photoélasticimétrie
- 4 Projets du département Génie Mécanique

Expériences de traction : traction uniaxiale



L'expérience de traction sur un métal fait apparaître une relation linéaire entre la force appliquée F et l'allongement de l'éprouvette $u = L - L_0$:

$$F = k \times u$$

Comme l'effort normal $N = F$ est uniformément réparti sur la section droite d'aire S , on peut définir la contrainte uniaxiale par

$$\sigma = \frac{N}{S_0} \quad (1)$$

De même, l'allongement étant homogène sur toute la longueur de l'éprouvette, on peut définir l'allongement unitaire par

$$\varepsilon = \frac{u}{L_0}$$

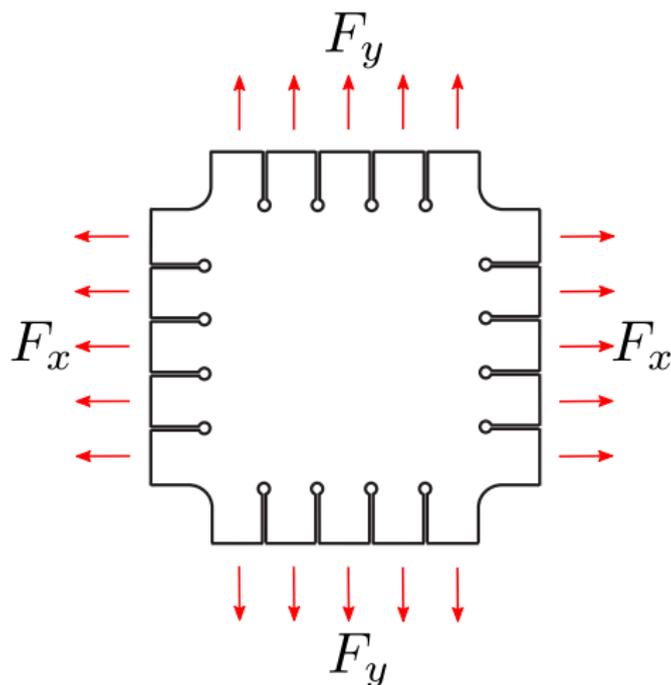
De la relation (1), on tire

$$\sigma = \frac{N}{S_0} = \frac{kL_0}{S_0} \frac{u}{L_0} = E\varepsilon$$

qui est la loi de Hooke uniaxiale. Ces grandeurs ont été définies dans le cours de résistance des structures (I1, I2).

Expériences de traction : traction biaxiale

Qu'en est-il si l'on réalise une traction suivant deux directions orthogonales ?



La réponse est donnée dans ce cours et bien d'autres choses encore...

Comparaison RDS - Élasticité

Résistance des structures (RdS) \longleftrightarrow Mécanique des milieux continus (MMC)

	MMC	RdS
Hypothèses	Cas général solide 3D	Géométrie 1D

Comparaison RDS - Élasticité

Résistance des structures (RdS) \longleftrightarrow Mécanique des milieux continus (MMC)

	MMC	RdS
Hypothèses	Cas général solide 3D	Géométrie 1D
Domaine d'intérêts	Mécanique théorique	Approche ingénieur

Comparaison RDS - Élasticité

Résistance des structures (RdS) \longleftrightarrow Mécanique des milieux continus (MMC)

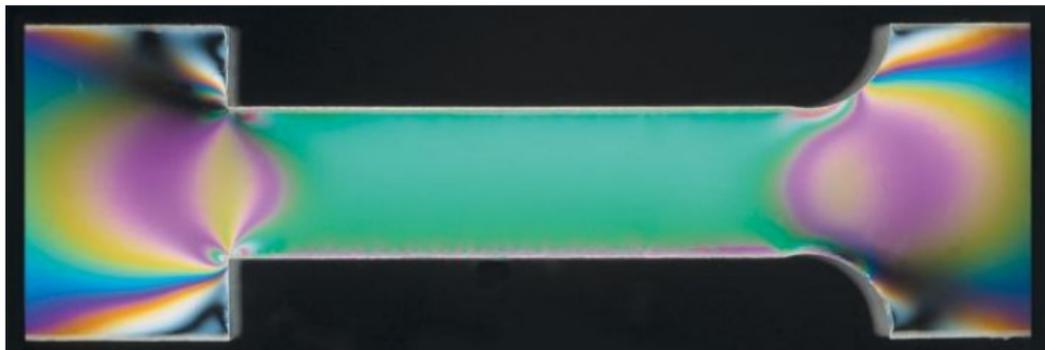
	MMC	RdS
Hypothèses	Cas général solide 3D	Géométrie 1D
Domaine d'intérêts	Mécanique théorique	Approche ingénieur
Usage	A la base des logiciels de calculs (MEF)	Calculs simplifiés (prédimensionnement)

Plan du chapitre

- 1 Qu'est-ce que l'élasticité
- 2 Expériences de traction
- 3 Photoélasticimétrie**
- 4 Projets du département Génie Mécanique

Mesure du champ de déformation par photoélasticimétrie

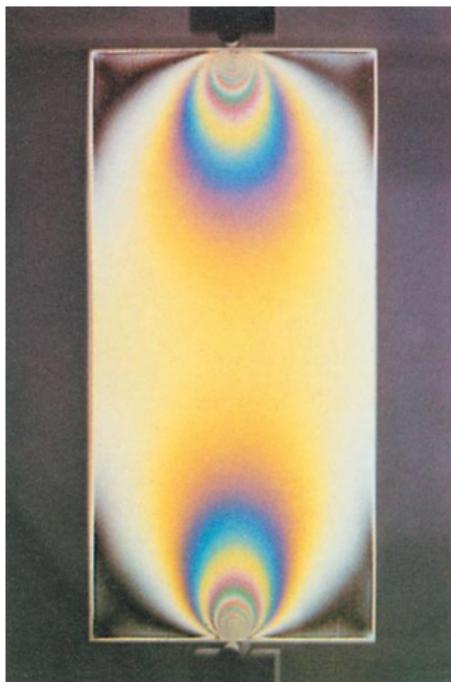
Essai de traction, éprouvette avec 2 congés différents



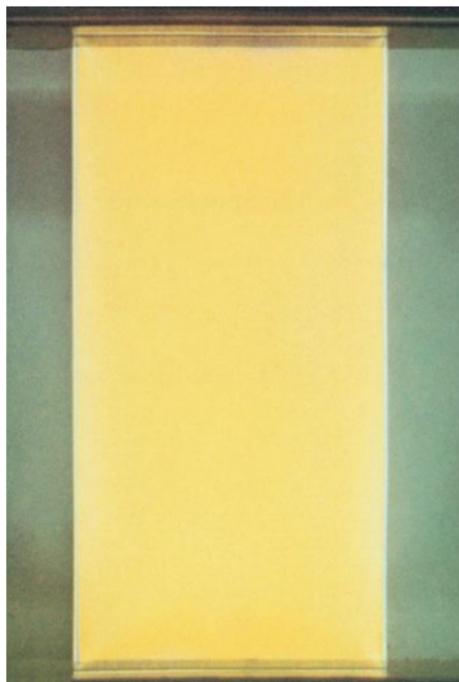
Mesure du champ de déformation par photoélasticimétrie

Essais de compression sur une plaque

Appuis ponctuels

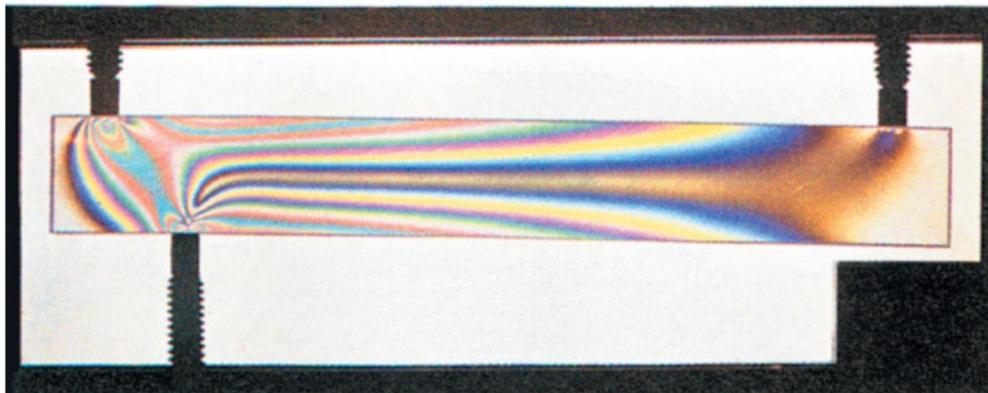
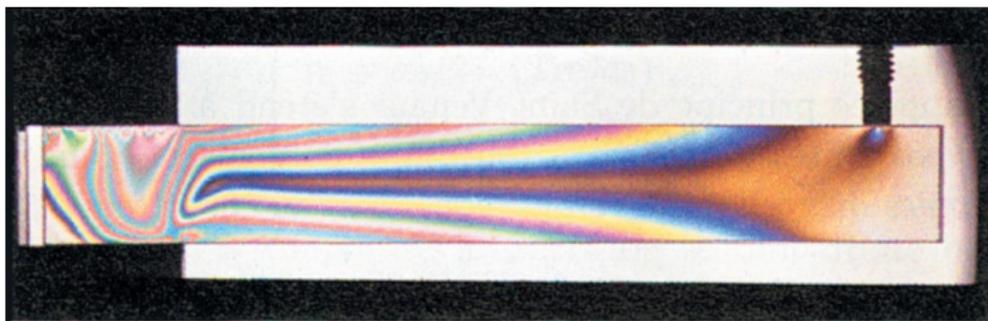


Appuis répartis



Mesure du champ de déformation par photoélasticimétrie

Flexion d'une poutre console

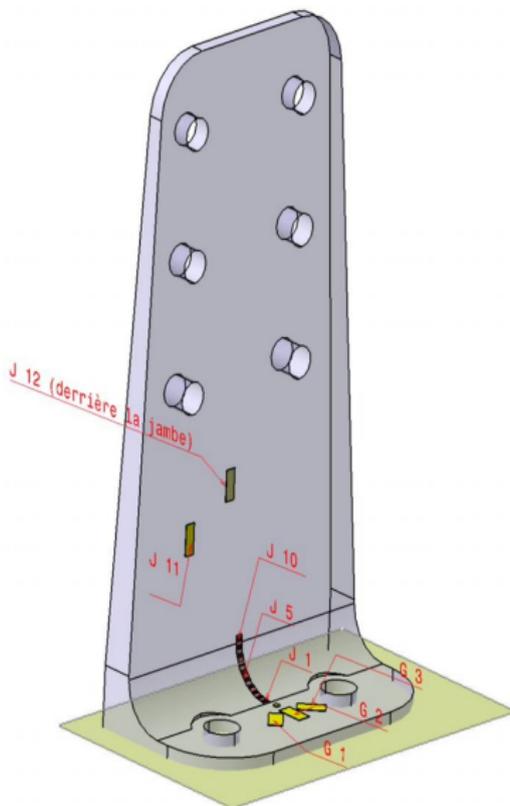


Plan du chapitre

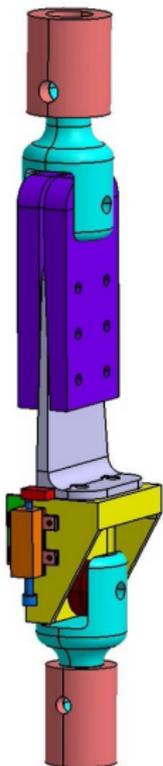
- 1 Qu'est-ce que l'élasticité
- 2 Expériences de traction
- 3 Photoélasticimétrie
- 4 Projets du département Génie Mécanique**

Airbus - Dépliage de cornières - Modèle CAO

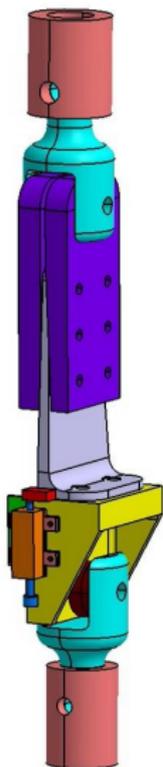
Objectif : Évaluer et comparer les méthodes Airbus de prédimensionnement



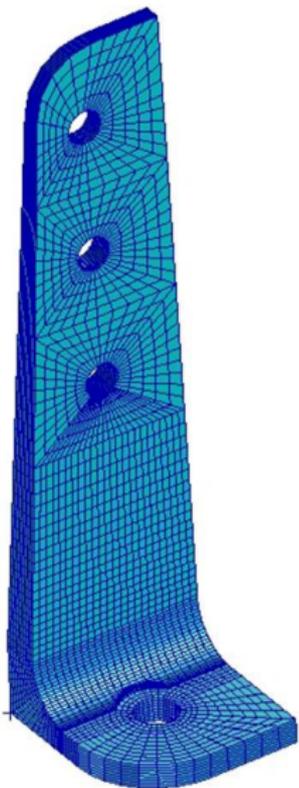
Airbus - Dépliage de cornières - Essais de traction



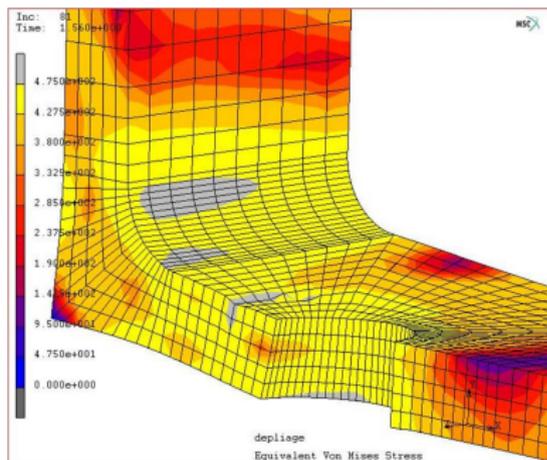
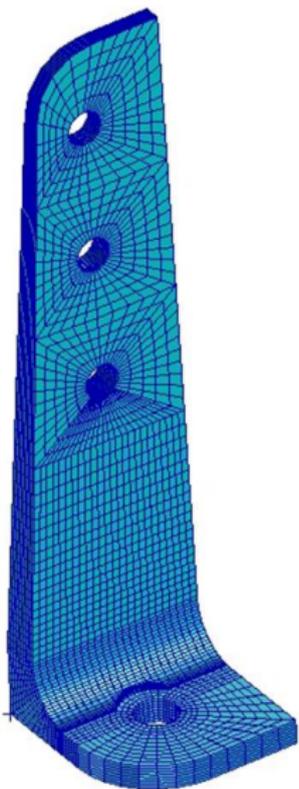
Airbus - Dépliage de cornières - Essais de traction



Airbus - Dépliage de cornières - Modèle éléments finis

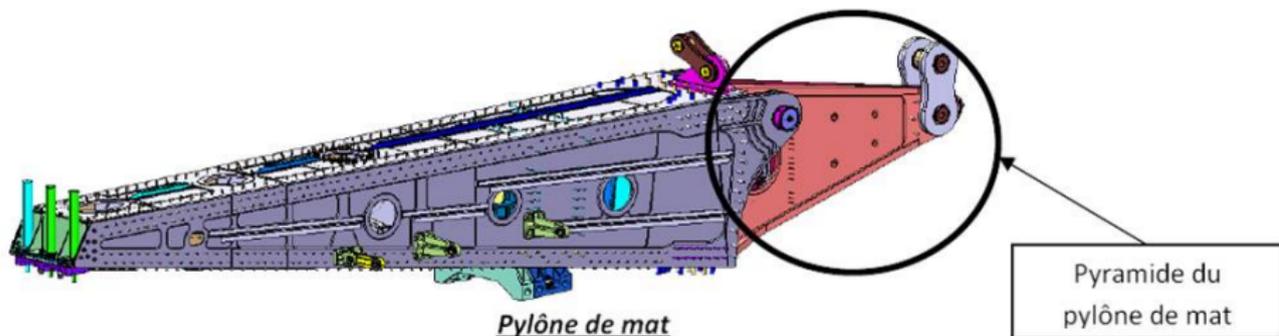


Airbus - Dépliage de cornières - Modèle éléments finis



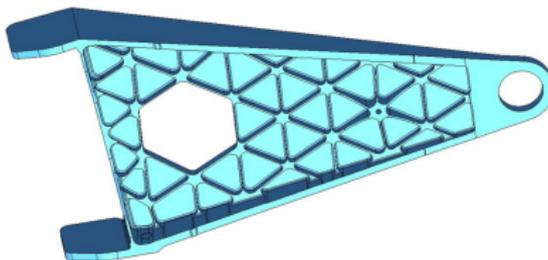
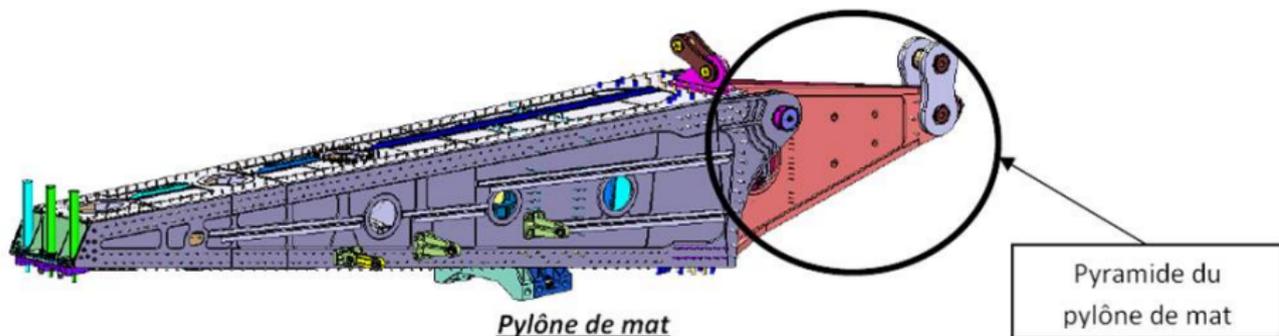
Airbus - Panneaux Isogrid - Situation

Objectif : développer une nouvelle structure du mat réacteur (gain de masse)

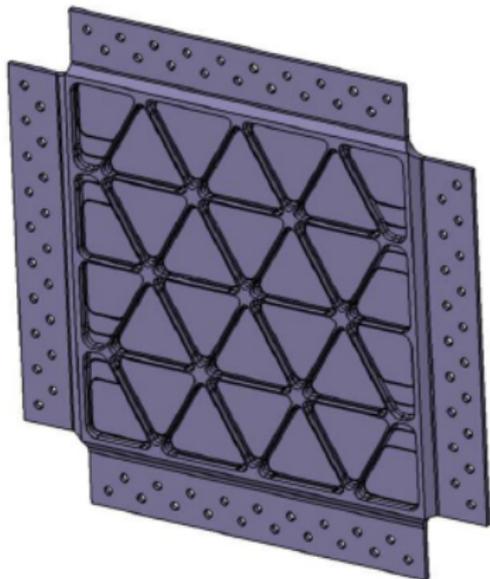


Airbus - Panneaux Isogrid - Situation

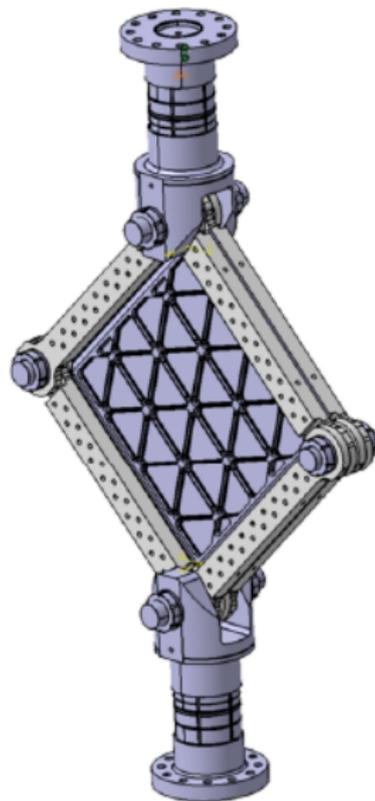
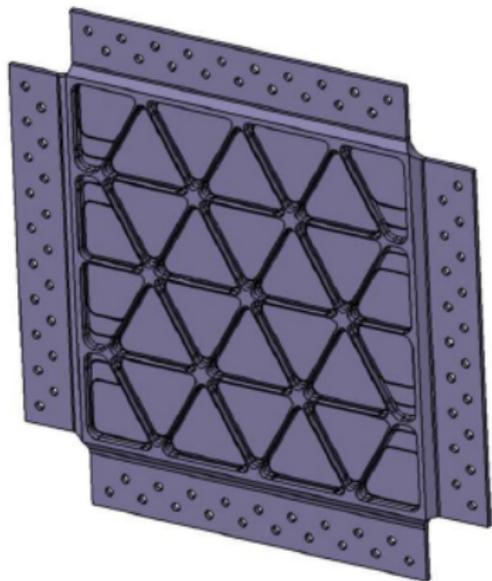
Objectif : développer une nouvelle structure du mat réacteur (gain de masse)



Airbus - Panneaux Isogrid - Éprouvette d'essai



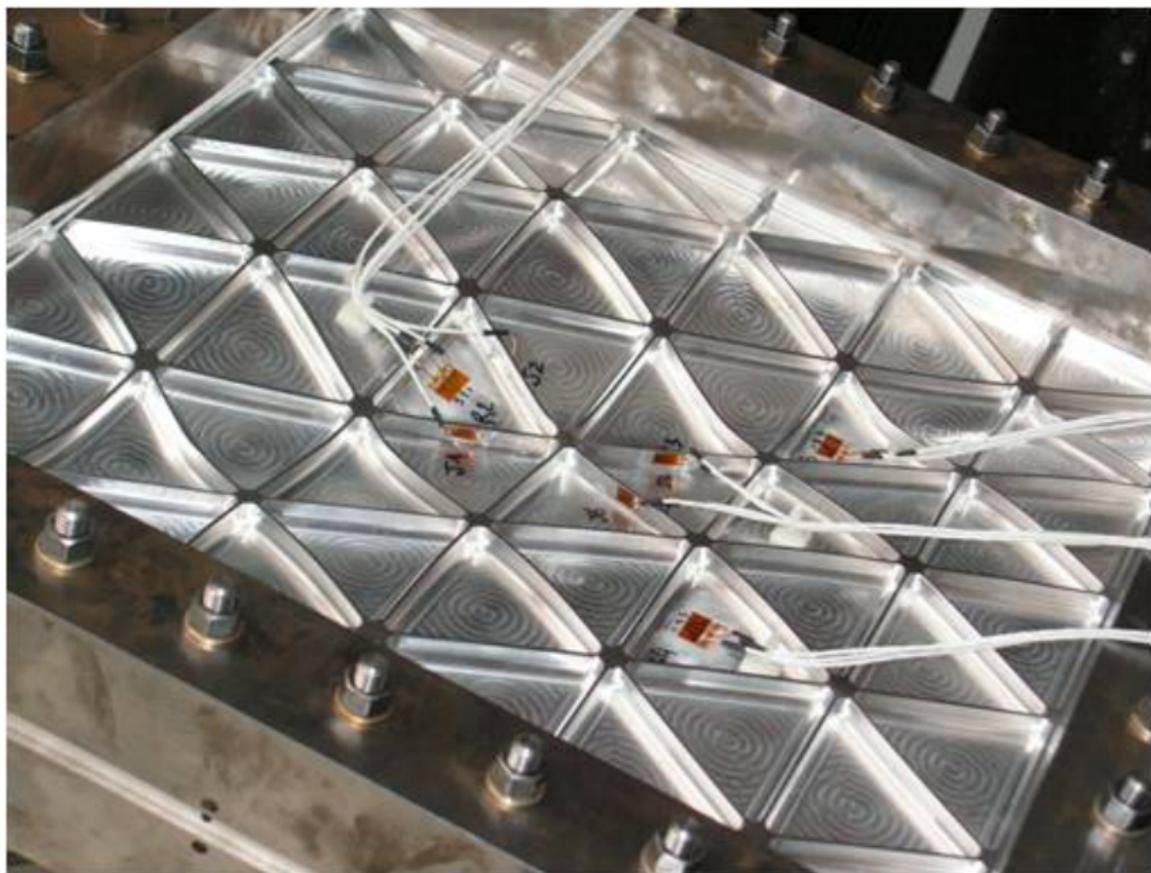
Airbus - Panneaux Isogrid - Éprouvette d'essai



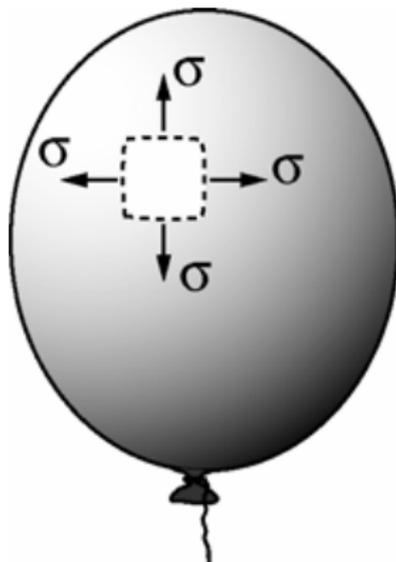
Airbus - Panneaux Isogrid - Photos essais



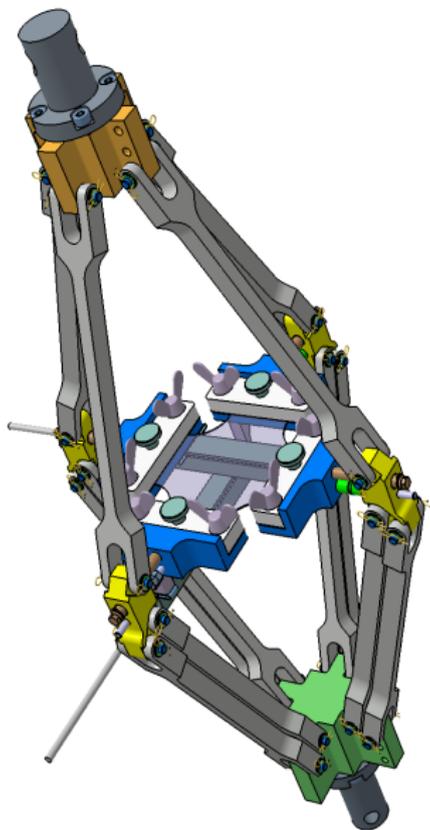
Airbus - Panneaux Isogrid - Photos essais



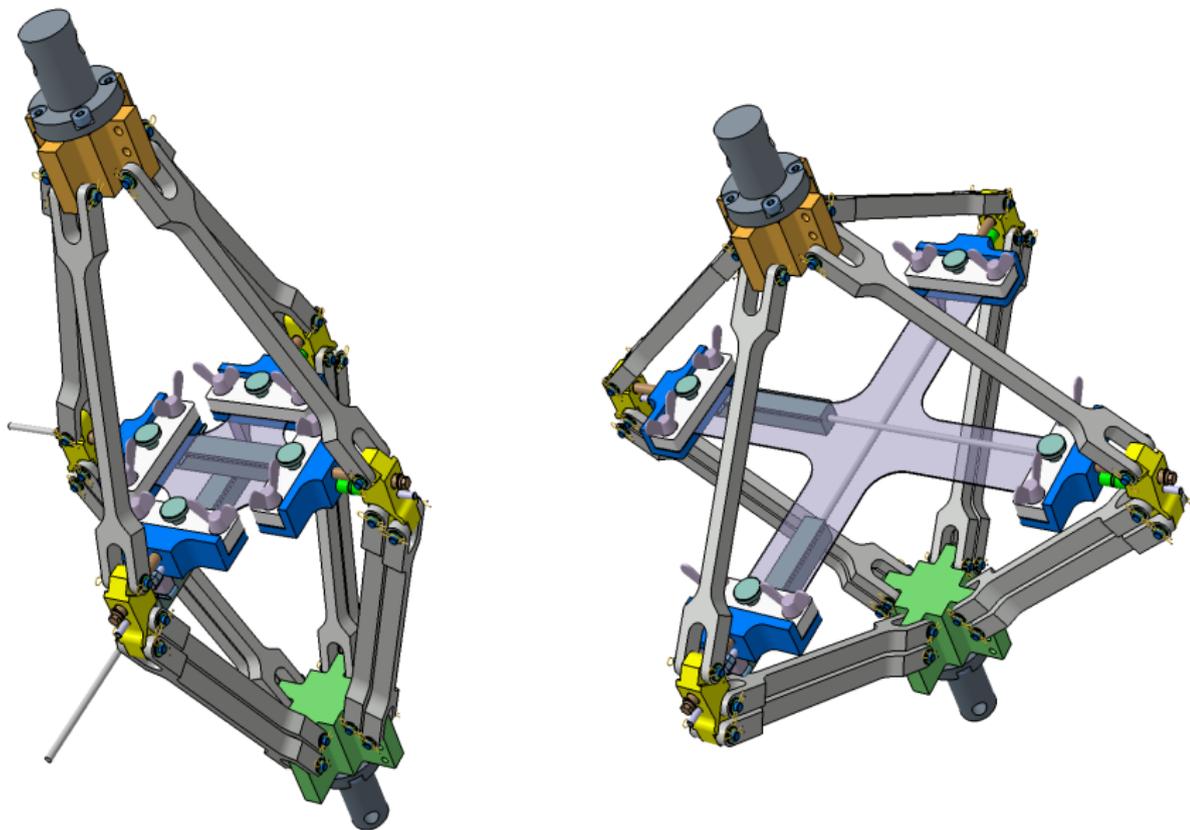
Cnes - Ballons stratosphériques



Cnes - Ballons stratosphériques - Moyen d'essai biaxial (ICAM)



Cnes - Ballons stratosphériques - Moyen d'essai biaxial (ICAM)



Chapitre I - Équations d'équilibre

Objectifs :

1. Modéliser les efforts extérieurs et intérieurs
2. Établir les équations d'équilibre

Sommaire

- 1 Modélisation des efforts
- 2 Tenseur des contraintes de Cauchy
- 3 Équations d'équilibre
- 4 Exemples d'équilibre élastique
- 5 Équations du mouvement
- 6 Cas des Poutres

Plan du chapitre

- 1 Modélisation des efforts
- 2 Tenseur des contraintes de Cauchy
- 3 Équations d'équilibre
- 4 Exemples d'équilibre élastique
- 5 Équations du mouvement
- 6 Cas des Poutres

Vecteurs et produit scalaire

On désigne par $(\bar{e}_i) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ une base de \mathbb{R}^3 .

Un **vecteur** \bar{u} s'écrit :

$$\bar{u} = \sum_i u_i \bar{e}_i; \quad \bar{u} = (u_i); \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

u_i , $i = 1, 2, 3$, sont les composantes de \bar{u} dans la base (\bar{e}_i) .

Vecteurs et produit scalaire

On désigne par $(\bar{e}_i) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ une base de \mathbb{R}^3 .

Un **vecteur** \bar{u} s'écrit :

$$\bar{u} = \sum_i u_i \bar{e}_i; \quad \bar{u} = (u_i); \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

u_i , $i = 1, 2, 3$, sont les composantes de \bar{u} dans la base (\bar{e}_i) .

Produit scalaire :

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \sum_i u_i v_i = {}^t\{u\} \{v\}$$

Exemple :

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Résultat indépendant du système de coordonnées, soit $[Q]$ matrice de rotation

$${}^t([Q] \{u\}) [Q] \{v\} = {}^t\{u\} {}^t[Q] [Q] \{v\} = {}^t\{u\} \{v\}$$

Vecteurs et produit tensoriel

Produit tensoriel :

$$\bar{u} \otimes \bar{v} = \{u\} {}^t\{v\} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{bmatrix} & & j \\ 0 & \vdots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} i$$

Remarque : indépendant du système de coordonnées (à montrer).

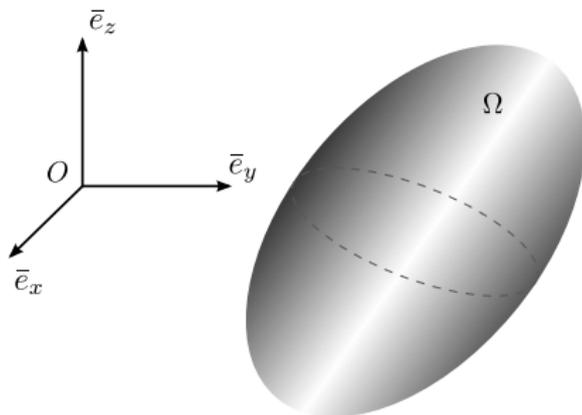
Exercice Calculer les expressions suivantes

$$\sum_{i=1,3} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i ; \quad (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot \bar{e}_k ; \quad {}^t(\bar{u} \otimes \bar{v})$$

Hypothèses géométriques

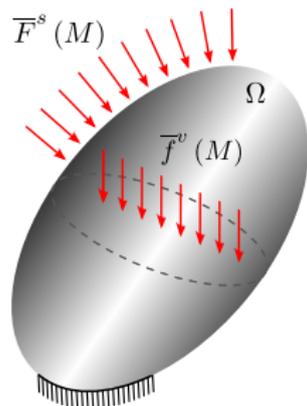
La Mécanique des Milieux Continus étudie les corps tridimensionnels.

Il n'y a pas d'hypothèse particulière sur le solide : $\Omega \in \mathbb{R}^3$



Efforts extérieurs

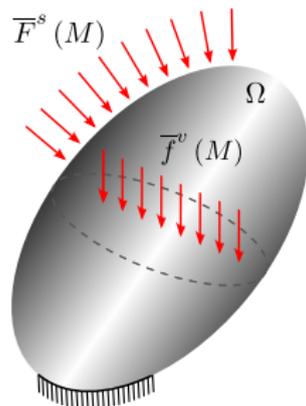
On distingue 2 systèmes de forces



Efforts extérieurs

On distingue 2 systèmes de forces

- **Forces de contour**

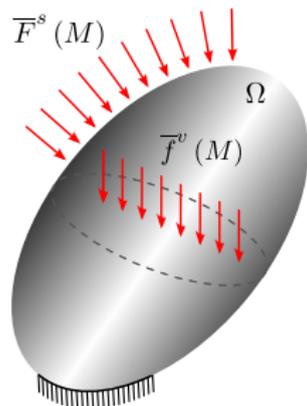


$$\bar{F}^s(M), M \in \partial\Omega$$

c'est une densité de force surfacique exercée sur élément du contour $\partial\Omega$ de Ω d'aire élémentaire da ; elle représente les actions de contact.

Efforts extérieurs

On distingue 2 systèmes de forces



- **Forces de contour**

$$\bar{F}^s(M), M \in \partial\Omega$$

c'est une densité de force surfacique exercée sur élément du contour $\partial\Omega$ de Ω d'aire élémentaire da ; elle représente les actions de contact.

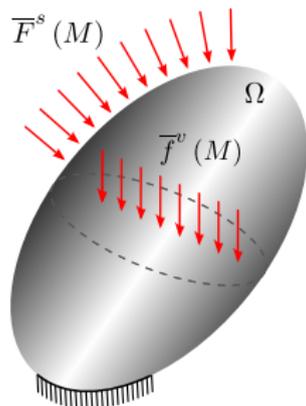
- **Force volumique**

$$\bar{f}^v(M), M \in \Omega$$

c'est une densité volumique de force agissant sur chaque élément de volume élémentaire $d\Omega$ de Ω ; elle représente les actions à distance.

Efforts extérieurs

On distingue 2 systèmes de forces



- **Forces de contour**

$$\bar{F}^s(M), M \in \partial\Omega$$

c'est une densité de force surfacique exercée sur élément du contour $\partial\Omega$ de Ω d'aire élémentaire da ; elle représente les actions de contact.

- **Force volumique**

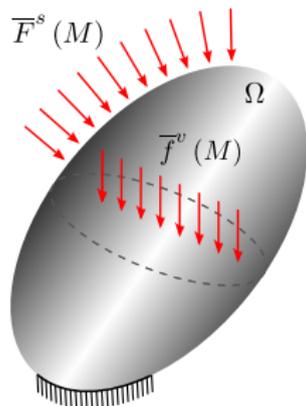
$$\bar{f}^v(M), M \in \Omega$$

c'est une densité volumique de force agissant sur chaque élément de volume élémentaire $d\Omega$ de Ω ; elle représente les actions à distance.

Exemples de forces volumiques :

Efforts extérieurs

On distingue 2 systèmes de forces



- **Forces de contour**

$$\bar{F}^s(M), M \in \partial\Omega$$

c'est une densité de force surfacique exercée sur élément du contour $\partial\Omega$ de Ω d'aire élémentaire da ; elle représente les actions de contact.

- **Force volumique**

$$\bar{f}^v(M), M \in \Omega$$

c'est une densité volumique de force agissant sur chaque élément de volume élémentaire $d\Omega$ de Ω ; elle représente les actions à distance.

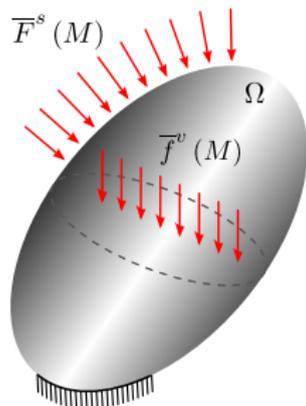
Exemples de forces volumiques :

- Forces de gravité : poids propre

$$\bar{f}^v(M) = \rho(M) \bar{g} \quad \text{alors} \quad \bar{P} = \int_{\Omega} \bar{f}^v(M) dv = m\bar{g}$$

Efforts extérieurs

On distingue 2 systèmes de forces



- **Forces de contour**

$$\bar{F}^s(M), M \in \partial\Omega$$

c'est une densité de force surfacique exercée sur élément du contour $\partial\Omega$ de Ω d'aire élémentaire da ; elle représente les actions de contact.

- **Force volumique**

$$\bar{f}^v(M), M \in \Omega$$

c'est une densité volumique de force agissant sur chaque élément de volume élémentaire $d\Omega$ de Ω ; elle représente les actions à distance.

Exemples de forces volumiques :

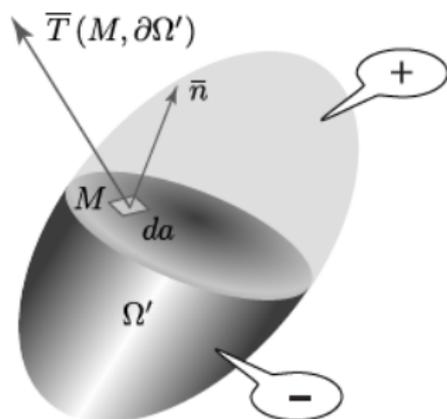
- Forces de gravité : poids propre

$$\bar{f}^v(M) = \rho(M) \bar{g} \quad \text{alors} \quad \bar{P} = \int_{\Omega} \bar{f}^v(M) dv = m\bar{g}$$

- Forces d'inertie : disque en rotation (en coordonnées polaires)

$$\bar{f}^v(M) = \rho\omega^2 r$$

Efforts intérieurs



Premier postulat de Cauchy (principe de la coupure) :

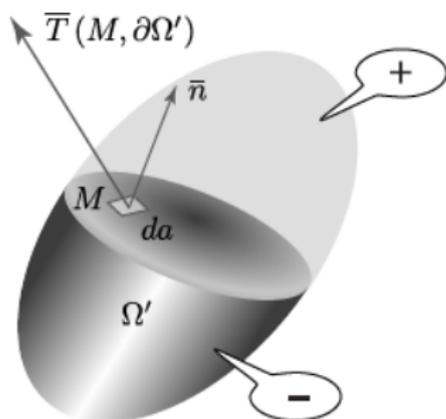
En un point M quelconque, les efforts s'exerçant sur un sous domaine Ω' intérieur à Ω se réduisent à une densité surfacique d'efforts de contact

$$\overline{df} = \overline{T} (M, \partial\Omega') da$$

exercés sur chaque éléments de frontière da .

Cette densité dépend a priori de la forme locale de l'interface $\partial\Omega'$.

Efforts intérieurs



Premier postulat de Cauchy (principe de la coupure) :

En un point M quelconque, les efforts s'exerçant sur un sous domaine Ω' intérieur à Ω se réduisent à une densité surfacique d'efforts de contact

$$\overline{df} = \overline{T}(M, \partial\Omega') da$$

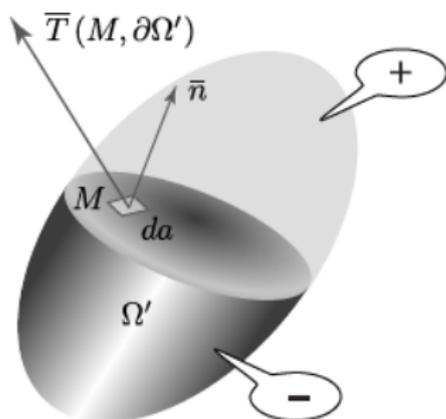
exercés sur chaque éléments de frontière da .

Cette densité dépend a priori de la forme locale de l'interface $\partial\Omega'$.

Définition

La densité surfacique $\overline{T}(M, \partial\Omega')$ à travers une interface intérieur $\partial\Omega'$ est appelée **vecteur contrainte**. Elle mesure la densité surfacique d'efforts exercés à travers la face d'aire da et de normale \bar{n} par la partie située à l'extérieur de Ω' (signe +) sur la partie située à l'intérieur (signe -).

Efforts intérieurs



Premier postulat de Cauchy (principe de la coupure) :

En un point M quelconque, les efforts s'exerçant sur un sous domaine Ω' intérieur à Ω se réduisent à une densité surfacique d'efforts de contact

$$\overline{df} = \overline{T} (M, \partial\Omega') da$$

exercés sur chaque éléments de frontière da .

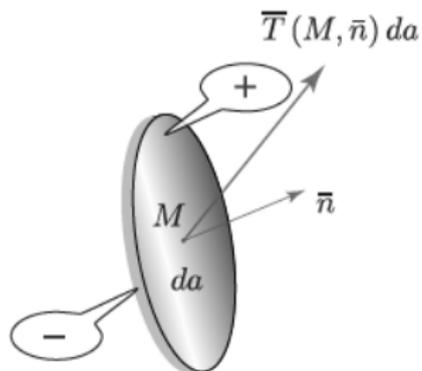
Cette densité dépend a priori de la forme locale de l'interface $\partial\Omega'$.

Définition

La densité surfacique $\overline{T} (M, \partial\Omega')$ à travers une interface intérieur $\partial\Omega'$ est appelée **vecteur contrainte**. Elle mesure la densité surfacique d'efforts exercés à travers la face d'aire da et de normale \bar{n} par la partie située à l'extérieur de Ω' (signe +) sur la partie située à l'intérieur (signe -).

Remarque : le vecteur contrainte est parfois défini comme la limite

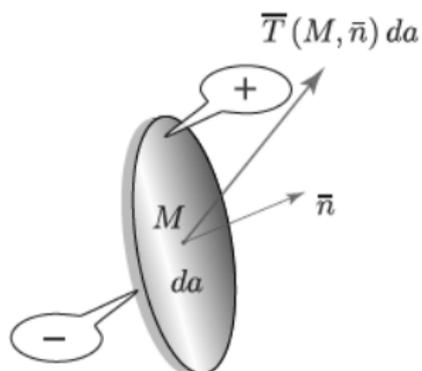
$$\overline{T} (M, \partial\Omega') = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{\overline{df}}{da}$$



Second postulat de Cauchy :

Le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \partial\Omega')$ représentant la densité d'efforts surfacique, au point M , exercée sur le sous système Ω' par le reste du milieu, à travers une interface $\partial\Omega'$, ne dépend que de la normale \bar{n} à la surface

$$\bar{T}(M, \partial\Omega') = \bar{T}(M, \bar{n})$$



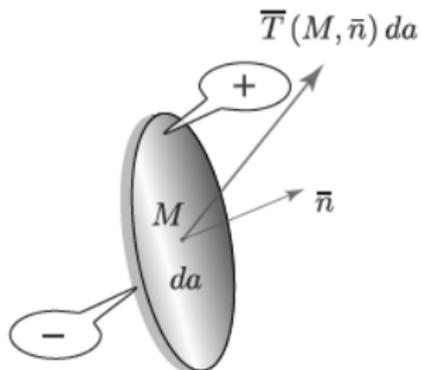
Second postulat de Cauchy :

Le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \partial\Omega')$ représentant la densité d'efforts surfacique, au point M , exercée sur le sous système Ω' par le reste du milieu, à travers une interface $\partial\Omega'$, ne dépend que de la normale \bar{n} à la surface

$$\bar{T}(M, \partial\Omega') = \bar{T}(M, \bar{n})$$

Remarques :

- 1 L'effort de contact au point M , à l'intérieur du milieu, est le même pour deux interfaces de même normale mais de courbure différente.



Second postulat de Cauchy :

Le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \partial\Omega')$ représentant la densité d'efforts surfacique, au point M , exercée sur le sous système Ω' par le reste du milieu, à travers une interface $\partial\Omega'$, ne dépend que de la normale \bar{n} à la surface

$$\bar{T}(M, \partial\Omega') = \bar{T}(M, \bar{n})$$

Remarques :

- 1 L'effort de contact au point M , à l'intérieur du milieu, est le même pour deux interfaces de même normale mais de courbure différente.
- 2 Cette hypothèse est en particulier vraie pour un liquide exerçant une pression $-p\bar{n}$ sur toute surface de normale \bar{n} .

Pour un solide, l'effort de contact dépend également de la normale mais n'est plus nécessairement orienté suivant cette normale (Cauchy parle de pression oblique).

A priori le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ est une fonction quelconque de \bar{n} .

A priori le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ est une fonction quelconque de \bar{n} .

Théorème de Cauchy

Le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ exercé sur la face intérieure du milieu continu dépend linéairement de la normale \bar{n} à cette interface :

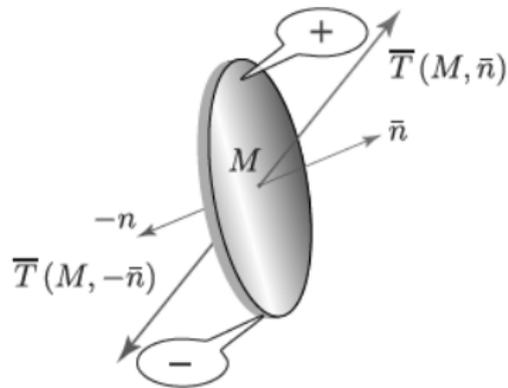
$$\overline{T}(M, n_1 \bar{e}_1 + n_2 \bar{e}_2 + n_3 \bar{e}_3) = n_1 \overline{T}(M, \bar{e}_1) + n_2 \overline{T}(M, \bar{e}_2) + n_3 \overline{T}(M, \bar{e}_3) \quad (2)$$

A priori le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ est une fonction quelconque de \bar{n} .

Théorème de Cauchy

Le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ exercé sur la face intérieure du milieu continu dépend linéairement de la normale \bar{n} à cette interface :

$$\overline{T}(M, n_1 \bar{e}_1 + n_2 \bar{e}_2 + n_3 \bar{e}_3) = n_1 \overline{T}(M, \bar{e}_1) + n_2 \overline{T}(M, \bar{e}_2) + n_3 \overline{T}(M, \bar{e}_3) \quad (2)$$



Principe de l'action réaction

La propriété de linéarité du vecteur contrainte est conforme avec le principe de l'action réaction :

$$\overline{T}(M, \bar{n}) = -\overline{T}(M, -\bar{n})$$

Plan du chapitre

- 1 Modélisation des efforts
- 2 Tenseur des contraintes de Cauchy**
- 3 Équations d'équilibre
- 4 Exemples d'équilibre élastique
- 5 Équations du mouvement
- 6 Cas des Poutres

Notion de tenseurs

Propriété

Les tenseurs $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ forment une base des tenseurs (euclidiens) d'ordre 2

Notion de tenseurs

Propriété

Les tenseurs $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ forment une base des tenseurs (euclidiens) d'ordre 2

Corrolaire

Un **tenseur** $\bar{\sigma}$ (d'ordre 2) s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j ; \quad \bar{\sigma} = (\sigma_{ij}) ; \quad [\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

- ① Un indice ne doit apparaître au plus 2 fois dans un monôme.

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

- 1 Un indice ne doit apparaître au plus 2 fois dans un monôme.
- 2 Si un indice apparaît deux fois il est dit **muet** ; le monôme est alors sommé 3 fois (pour l'indice de 1 à 3).

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

- 1 Un indice ne doit apparaître au plus 2 fois dans un monôme.
- 2 Si un indice apparaît deux fois il est dit **muet** ; le monôme est alors sommé 3 fois (pour l'indice de 1 à 3).
- 3 Si un indice apparaît une fois il est dit **libre** ; tous les monômes dans une expression doivent avoir les mêmes indices libres.

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

- ① Un indice ne doit apparaître au plus 2 fois dans un monôme.
- ② Si un indice apparaît deux fois il est dit **muet** ; le monôme est alors sommé 3 fois (pour l'indice de 1 à 3).
- ③ Si un indice apparaît une fois il est dit **libre** ; tous les monômes dans une expression doivent avoir les mêmes indices libres.

Exemples :

$$\bar{u} = u_i \bar{e}_i ; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_i$$

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

- ① Un indice ne doit apparaître au plus 2 fois dans un monôme.
- ② Si un indice apparaît deux fois il est dit **muet** ; le monôme est alors sommé 3 fois (pour l'indice de 1 à 3).
- ③ Si un indice apparaît une fois il est dit **libre** ; tous les monômes dans une expression doivent avoir les mêmes indices libres.

Exemples :

$$\bar{u} = u_i \bar{e}_i ; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_i$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j ; \quad \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \sigma_{ij} n_j \bar{e}_i ; \quad \text{tr} \bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{kk}$$

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

- ① Un indice ne doit apparaître au plus 2 fois dans un monôme.
- ② Si un indice apparaît deux fois il est dit **muet** ; le monôme est alors sommé 3 fois (pour l'indice de 1 à 3).
- ③ Si un indice apparaît une fois il est dit **libre** ; tous les monômes dans une expression doivent avoir les mêmes indices libres.

Exemples :

$$\bar{u} = u_i \bar{e}_i ; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_i$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j ; \quad \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \sigma_{ij} n_j \bar{e}_i ; \quad \text{tr} \bar{\sigma} = \sigma_{kk}$$

$$(\bar{e}_i) \text{ base propre de } \bar{\sigma} \Leftrightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{ii} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i$$

Notation indicielle

Les écritures tensorielles utilisent intensivement les indices, certains étant fixes et d'autres interviennent dans des sommations de 1 à 3 (indices répétés).

Il existe une convention d'écriture qui permet de simplifier les écritures :

Conventions

- ① Un indice ne doit apparaître au plus 2 fois dans un monôme.
- ② Si un indice apparaît deux fois il est dit **muet** ; le monôme est alors sommé 3 fois (pour l'indice de 1 à 3).
- ③ Si un indice apparaît une fois il est dit **libre** ; tous les monômes dans une expression doivent avoir les mêmes indices libres.

Exemples :

$$\bar{u} = u_i \bar{e}_i ; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_i$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j ; \quad \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \sigma_{ij} n_j \bar{e}_i ; \quad \text{tr} \bar{\sigma} = \sigma_{kk}$$

$$(\bar{e}_i) \text{ base propre de } \bar{\sigma} \Leftrightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{ii} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i$$

$$\bar{u} = \bar{e}_i \Rightarrow \text{vecteur } \bar{u} = \text{vecteur } \bar{e}_i, \text{ sans intérêt !}$$

Exercice

Exercice - Les expressions suivantes sont-elles correctes ?

- $v_i = a_{ik} b_{kj}$
- $v_i = a_{ik} b_{kj} c_j$
- $a_{kk} a_{ij} = a_{ii} a_{ij}$
- $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

Exercice

Exercice - Les expressions suivantes sont-elles correctes ?

- $v_i = a_{ik} b_{kj}$

Réponse : non, la règle 3 n'est pas respectée

- $v_i = a_{ik} b_{kj} c_j$

- $a_{kk} a_{ij} = a_{ii} a_{ij}$

- $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

Exercice

Exercice - Les expressions suivantes sont-elles correctes ?

- $v_i = a_{ik} b_{kj}$

Réponse : non, la règle 3 n'est pas respectée

- $v_i = a_{ik} b_{kj} c_j$

Réponse : oui

- $a_{kk} a_{ij} = a_{ii} a_{ij}$

- $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

Exercice

Exercice - Les expressions suivantes sont-elles correctes ?

- $v_i = a_{ik} b_{kj}$ Réponse : non, la règle 3 n'est pas respectée
- $v_i = a_{ik} b_{kj} c_j$ Réponse : oui
- $a_{kk} a_{ij} = a_{ii} a_{ij}$ Réponse : non, la règle 1 n'est pas respectée
- $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

Exercice

Exercice - Les expressions suivantes sont-elles correctes ?

- $v_i = a_{ik} b_{kj}$ Réponse : non, la règle 3 n'est pas respectée
- $v_i = a_{ik} b_{kj} c_j$ Réponse : oui
- $a_{kk} a_{ij} = a_{ii} a_{ij}$ Réponse : non, la règle 1 n'est pas respectée
- $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ Réponse : oui (loi de Hooke)

Simple produit contracté

On définit le produit contracté une fois entre 2 grandeurs tensorielles d'ordre 0, 1 et 2, il est noté par un point.

si n, p est l'ordre des tenseurs de départ, le résultat de l'opération est un tenseur d'ordre $n - 1 + p - 1$.

Simple produit contracté

On définit le produit contracté une fois entre 2 grandeurs tensorielles d'ordre 0, 1 et 2, il est noté par un point.

si n, p est l'ordre des tenseurs de départ, le résultat de l'opération est un tenseur d'ordre $n - 1 + p - 1$.

- 1 Simple produit contracté entre 2 vecteurs :

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_i$$

le résultat est un scalaire ; cette opération correspond au produit scalaire des 2 vecteurs ${}^t\{u\} \{v\}$.

Simple produit contracté

On définit le produit contracté une fois entre 2 grandeurs tensorielles d'ordre 0, 1 et 2, il est noté par un point.

si n, p est l'ordre des tenseurs de départ, le résultat de l'opération est un tenseur d'ordre $n - 1 + p - 1$.

- ① Simple produit contracté entre 2 vecteurs :

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_i$$

le résultat est un scalaire ; cette opération correspond au produit scalaire des 2 vecteurs ${}^t\{u\} \{v\}$.

- ② Simple produit contracté entre 2 tenseurs :

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} = \sigma_{ik} \varepsilon_{kj} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

le résultat est un tenseur de composantes $\sigma_{ik} \varepsilon_{kj}$; cette opération correspond au produit matriciel $[\sigma] [\varepsilon]$.

Simple produit contracté

On définit le produit contracté une fois entre 2 grandeurs tensorielles d'ordre 0, 1 et 2, il est noté par un point.

si n, p est l'ordre des tenseurs de départ, le résultat de l'opération est un tenseur d'ordre $n - 1 + p - 1$.

- ❶ Simple produit contracté entre 2 vecteurs :

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_i$$

le résultat est un scalaire ; cette opération correspond au produit scalaire des 2 vecteurs ${}^t\{u\} \{v\}$.

- ❷ Simple produit contracté entre 2 tenseurs :

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} = \sigma_{ik} \varepsilon_{kj} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

le résultat est un tenseur de composantes $\sigma_{ik} \varepsilon_{kj}$; cette opération correspond au produit matriciel $[\sigma] [\varepsilon]$.

- ❸ Simple produit contracté entre un tenseur d'ordre 2 et un vecteur :

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \sigma_{ij} n_j \bar{e}_i$$

le résultat est un vecteur donc les composantes sont données par le produit matrice-vecteur $[\sigma] \{n\}$.

Remarque : ces relations sont valables dans n'importe quel système de coordonnées

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Exemples

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Exemples

- $\bar{\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{1}} = \bar{\mathbf{1}}$ ou $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$ (étudier les cas $i = k$ et $i \neq k$)

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Exemples

- $\bar{\mathbb{1}} \cdot \bar{\mathbb{1}} = \bar{\mathbb{1}}$ ou $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$ (étudier les cas $i = k$ et $i \neq k$)
- $\bar{\mathbb{1}} : \bar{\mathbb{1}} = 3$

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Exemples

- $\bar{\mathbb{1}} \cdot \bar{\mathbb{1}} = \bar{\mathbb{1}}$ ou $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$ (étudier les cas $i = k$ et $i \neq k$)
- $\bar{\mathbb{1}} : \bar{\mathbb{1}} = 3$
- $\text{tr} \bar{\sigma} = \sigma_{kk} = \bar{\sigma} : \bar{\mathbb{1}}$

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Exemples

- $\bar{\mathbb{1}} \cdot \bar{\mathbb{1}} = \bar{\mathbb{1}}$ ou $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$ (étudier les cas $i = k$ et $i \neq k$)
- $\bar{\mathbb{1}} : \bar{\mathbb{1}} = 3$
- $\text{tr} \bar{\sigma} = \sigma_{kk} = \bar{\sigma} : \bar{\mathbb{1}}$
- $\text{tr} \bar{\sigma}^2 = \sigma_{ij}^2 = \bar{\sigma} : \bar{\sigma} = \|\bar{\sigma}\|^2$

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Exemples

- $\bar{\mathbb{1}} \cdot \bar{\mathbb{1}} = \bar{\mathbb{1}}$ ou $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$ (étudier les cas $i = k$ et $i \neq k$)
- $\bar{\mathbb{1}} : \bar{\mathbb{1}} = 3$
- $\text{tr} \bar{\sigma} = \sigma_{kk} = \bar{\sigma} : \bar{\mathbb{1}}$
- $\text{tr} \bar{\sigma}^2 = \sigma_{ij}^2 = \bar{\sigma} : \bar{\sigma} = \|\bar{\sigma}\|^2$
- $\frac{\partial \text{tr} \bar{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}} = \bar{\mathbb{1}}$

Double produit contracté

Le double produit contracté est défini entre 2 tenseurs et il est représenté par le symbole " : "

$$\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

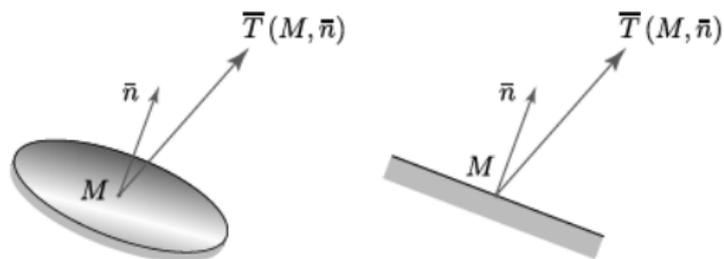
Le résultat est un scalaire (dimension $n - 2 + p - 2$ avec $n = p = 2$)

Exemples

- $\bar{\mathbb{1}} \cdot \bar{\mathbb{1}} = \bar{\mathbb{1}}$ ou $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$ (étudier les cas $i = k$ et $i \neq k$)
- $\bar{\mathbb{1}} : \bar{\mathbb{1}} = 3$
- $\text{tr} \bar{\sigma} = \sigma_{kk} = \bar{\sigma} : \bar{\mathbb{1}}$
- $\text{tr} \bar{\sigma}^2 = \sigma_{ij}^2 = \bar{\sigma} : \bar{\sigma} = \|\bar{\sigma}\|^2$
- $\frac{\partial \text{tr} \bar{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}} = \bar{\mathbb{1}}$
- $\frac{\partial \text{tr}(\bar{\sigma}^2)}{\partial \bar{\sigma}} = 2\bar{\sigma}$

Notion de vecteur contraint

Le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ représente la densité d'efforts surfaciques, au point M , exercée à travers une interface de normale \bar{n} .



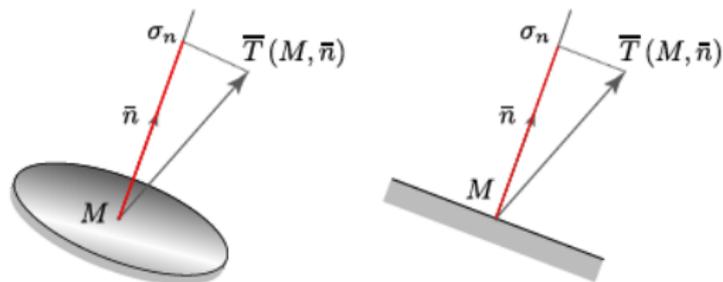
Notion de vecteur contrainte

Le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ représente la densité d'efforts surfaciques, au point M , exercée à travers une interface de normale \bar{n} .

On définit la **composante normale** (ou contrainte normale) par

$$\sigma_n = \overline{T}(M, \bar{n}) \cdot \bar{n} \quad (3)$$

c'est une grandeur scalaire qui est positive en traction (c'est à dire quand l'extérieur exerce un effort dirigé vers l'extérieur) et négative en compression.



Notion de vecteur contraint

Le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ représente la densité d'efforts surfaciques, au point M , exercée à travers une interface de normale \bar{n} .

On définit la **composante normale** (ou contrainte normale) par

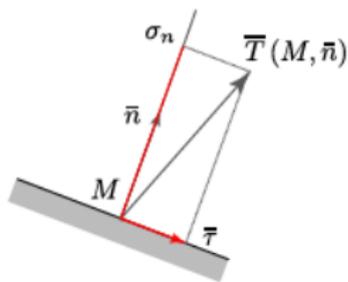
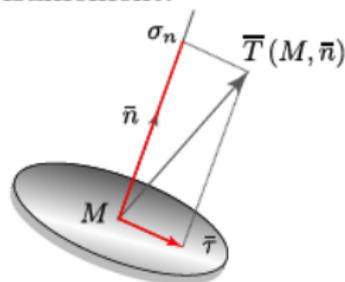
$$\sigma_n = \overline{T}(M, \bar{n}) \cdot \bar{n} \quad (3)$$

c'est une grandeur scalaire qui est positive en traction (c'est à dire quand l'extérieur exerce un effort dirigé vers l'extérieur) et négative en compression.

On définit la **composante tangentielle** (ou contrainte tangentielle) comme la partie complémentaire :

$$\bar{\tau} = \overline{T}(M, \bar{n}) - \sigma_n \bar{n} \quad (4)$$

c'est une grandeur vectorielle portée par la facette ; elle correspond à un effort de cisaillement.



Notion de vecteur contraint

Le vecteur contrainte $\overline{T}(M, \bar{n})$ représente la densité d'efforts surfaciques, au point M , exercée à travers une interface de normale \bar{n} .

On définit la **composante normale** (ou contrainte normale) par

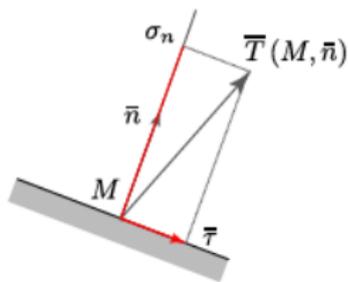
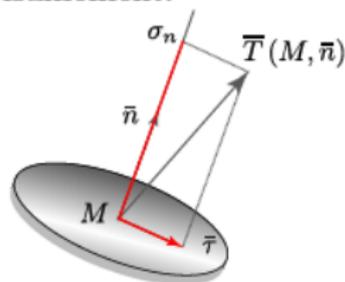
$$\sigma_n = \overline{T}(M, \bar{n}) \cdot \bar{n} \quad (3)$$

c'est une grandeur scalaire qui est positive en traction (c'est à dire quand l'extérieur exerce un effort dirigé vers l'extérieur) et négative en compression.

On définit la **composante tangentielle** (ou contrainte tangentielle) comme la partie complémentaire :

$$\bar{\tau} = \overline{T}(M, \bar{n}) - \sigma_n \bar{n} \quad (4)$$

c'est une grandeur vectorielle portée par la facette ; elle correspond à un effort de cisaillement.



On a la relation de Pythagore :

$$|\overline{T}(M, \bar{n})|^2 = \sigma_n^2 + |\bar{\tau}|^2 \quad (5)$$

Formule de Cauchy

Formule de Cauchy

La propriété de linéarité (2) du théorème de Cauchy implique l'existence d'un tenseur d'ordre 2, noté $\bar{\sigma}(M)$, tel que, pour tout vecteur \bar{n}

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} \quad (6)$$

la grandeur $\bar{\sigma}(M)$ est appelé le **tenseur des contraintes de Cauchy** au point M .

Formule de Cauchy

Formule de Cauchy

La propriété de linéarité (2) du théorème de Cauchy implique l'existence d'un tenseur d'ordre 2, noté $\bar{\sigma}(M)$, tel que, pour tout vecteur \bar{n}

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} \quad (6)$$

la grandeur $\bar{\sigma}(M)$ est appelé le **tenseur des contraintes de Cauchy** au point M .

Le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ définit une application linéaire par la relation (6). Il peut être représenté par la matrice de ses composantes dans la base quelconque $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$[\sigma(M)]_{(\bar{e}_i)} = \begin{matrix} & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \bar{e}_1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \bar{e}_2 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \bar{e}_3 & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix}$$

Formule de Cauchy

Formule de Cauchy

La propriété de linéarité (2) du théorème de Cauchy implique l'existence d'un tenseur d'ordre 2, noté $\bar{\sigma}(M)$, tel que, pour tout vecteur \bar{n}

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} \quad (6)$$

la grandeur $\bar{\sigma}(M)$ est appelé le **tenseur des contraintes de Cauchy** au point M .

Le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ définit une application linéaire par la relation (6). Il peut être représenté par la matrice de ses composantes dans la base quelconque $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$[\sigma(M)]_{(\bar{e}_i)} = \begin{matrix} & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \bar{e}_1 & \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right] & & \end{matrix}$$

La formule de Cauchy (6) s'écrit alors sous la forme du produit matrice-vecteur :

$$\{T(M, \bar{n})\} = [\sigma(M)] \{n\} \iff T_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \quad (7)$$

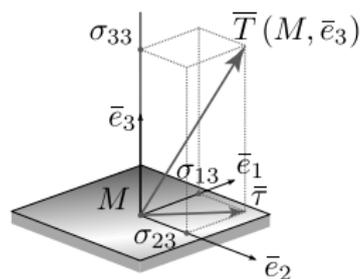
Interprétation des composantes du tenseur de Cauchy

On note σ_{ij} les composantes du tenseur $\bar{\sigma}$ dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Par définition, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ relatif à la facette de normal $\bar{n} = \bar{e}_3$ s'écrit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_3) = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 = \sigma_{33}\bar{n} + \bar{\tau}$$

avec $\bar{\tau} = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2$.



Interprétation des composantes du tenseur de Cauchy

On note σ_{ij} les composantes du tenseur $\bar{\sigma}$ dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

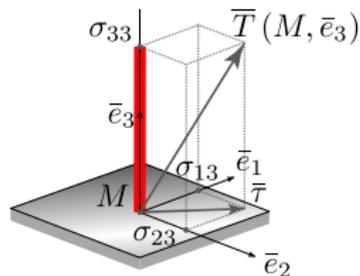
Par définition, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ relatif à la facette de normal $\bar{n} = \bar{e}_3$ s'écrit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_3) = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 = \sigma_{33}\bar{n} + \bar{\tau}$$

avec $\bar{\tau} = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2$.

Interprétation :

- σ_{33} est la composante normale ;



Interprétation des composantes du tenseur de Cauchy

On note σ_{ij} les composantes du tenseur $\bar{\sigma}$ dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

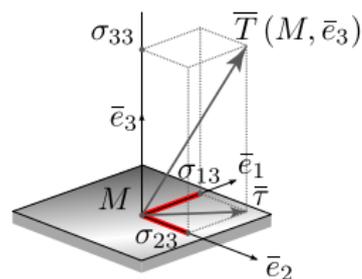
Par définition, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ relatif à la facette de normal $\bar{n} = \bar{e}_3$ s'écrit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_3) = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 = \sigma_{33}\bar{n} + \bar{\tau}$$

avec $\bar{\tau} = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2$.

Interprétation :

- σ_{33} est la composante normale ;
- σ_{13} et σ_{23} sont les composantes tangentielles.



Interprétation des composantes du tenseur de Cauchy

On note σ_{ij} les composantes du tenseur $\bar{\sigma}$ dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

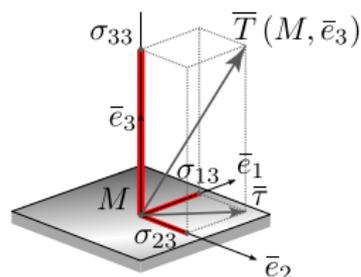
Par définition, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ relatif à la facette de normal $\bar{n} = \bar{e}_3$ s'écrit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_3) = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 = \sigma_{33}\bar{n} + \bar{\tau}$$

avec $\bar{\tau} = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2$.

Interprétation :

- σ_{33} est la composante normale ;
- σ_{13} et σ_{23} sont les composantes tangentielles.



En appliquant ce même raisonnement pour les 2 autres directions on obtient la règle suivante :

Interprétation des composantes du tenseur de Cauchy

On note σ_{ij} les composantes du tenseur $\bar{\sigma}$ dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Par définition, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ relatif à la facette de normal $\bar{n} = \bar{e}_3$ s'écrit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_3) = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 = \sigma_{33}\bar{n} + \bar{\tau}$$

avec $\bar{\tau} = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2$.

Interprétation :

- σ_{33} est la composante normale ;
- σ_{13} et σ_{23} sont les composantes tangentielles.

$$\begin{array}{ccc} \bar{T}(M, \bar{e}_1) & \bar{T}(M, \bar{e}_2) & \bar{T}(M, \bar{e}_3) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right] \end{array}$$

En appliquant ce même raisonnement pour les 2 autres directions on obtient la règle suivante :

- les composantes diagonales σ_{ii} sont les contraintes normales relativement aux 3 directions Ox_1, Ox_2, Ox_3 ;

Interprétation des composantes du tenseur de Cauchy

On note σ_{ij} les composantes du tenseur $\bar{\sigma}$ dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Par définition, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ relatif à la facette de normal $\bar{n} = \bar{e}_3$ s'écrit

$$\bar{T}(M, \bar{e}_3) = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 = \sigma_{33}\bar{n} + \bar{\tau}$$

avec $\bar{\tau} = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2$.

Interprétation :

- σ_{33} est la composante normale ;
- σ_{13} et σ_{23} sont les composantes tangentielles.

$$\begin{array}{ccc} \bar{T}(M, \bar{e}_1) & \bar{T}(M, \bar{e}_2) & \bar{T}(M, \bar{e}_3) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right] \end{array}$$

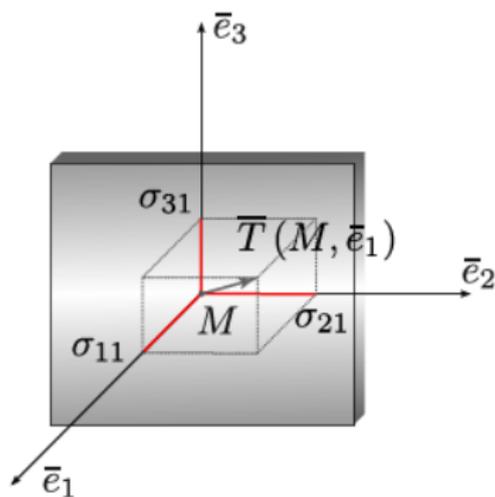
En appliquant ce même raisonnement pour les 2 autres directions on obtient la règle suivante :

- les composantes diagonales σ_{ii} sont les contraintes normales relativement aux 3 directions Ox_1, Ox_2, Ox_3 ;
- les composantes extra diagonales σ_{ij} ($i \neq j$) sont les composantes tangentielles sur les 3 facettes.

Vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{e}_1) = \sigma_{11}\bar{e}_1 + \sigma_{21}\bar{e}_2 + \sigma_{31}\bar{e}_3$$

relatif à la facette de normale \bar{e}_1 .

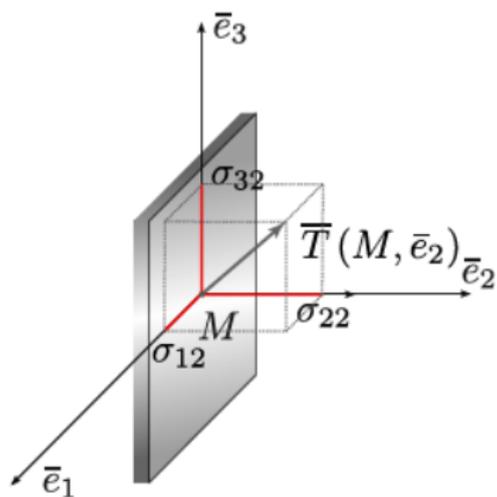


$$\begin{matrix} \bar{T}(M, \bar{e}_1) & \bar{T}(M, \bar{e}_2) & \bar{T}(M, \bar{e}_3) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{e}_2) = \sigma_{12}\bar{e}_1 + \sigma_{22}\bar{e}_2 + \sigma_{32}\bar{e}_3$$

relatif à la facette de normale \bar{e}_2 .

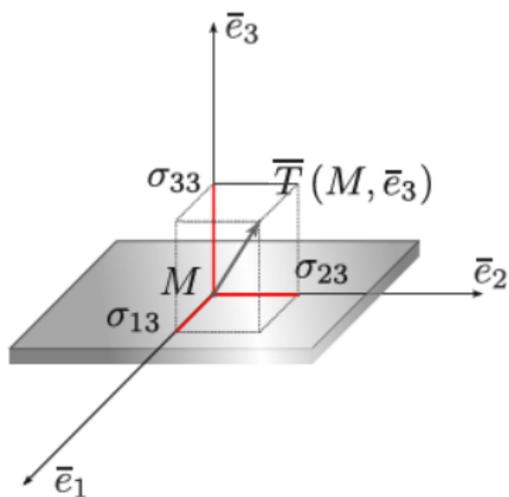


$$\begin{array}{ccc} \bar{T}(M, \bar{e}_1) & \bar{T}(M, \bar{e}_2) & \bar{T}(M, \bar{e}_3) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right] \end{array}$$

Vecteur contrainte

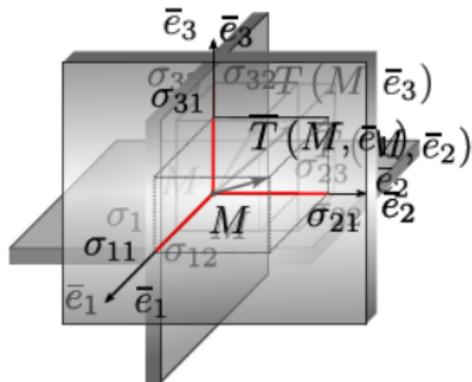
$$\bar{T}(M, \bar{e}_3) = \sigma_{13}\bar{e}_1 + \sigma_{23}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3$$

relatif à la facette de normale \bar{e}_3 .



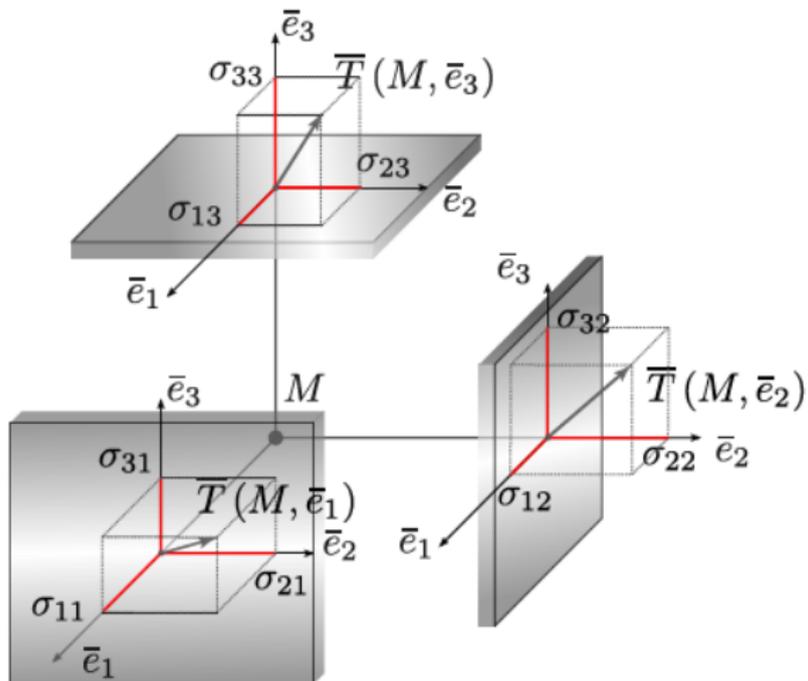
$$\begin{array}{ccc} \bar{T}(M, \bar{e}_1) & \bar{T}(M, \bar{e}_2) & \bar{T}(M, \bar{e}_3) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right] \end{array}$$

Vecteurs contraintes relatifs aux 3 plans au même point M .

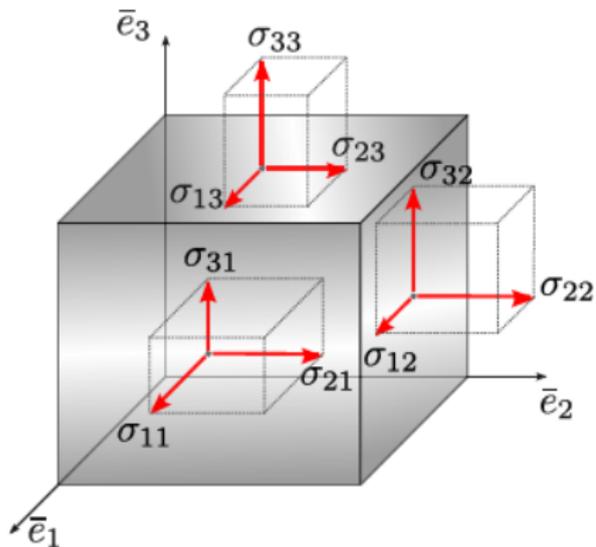


$$\begin{matrix} \overline{T}(M, \bar{e}_1) & \overline{T}(M, \bar{e}_2) & \overline{T}(M, \bar{e}_3) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Vecteurs contraintes relatifs aux 3 plans, vu éclatée.

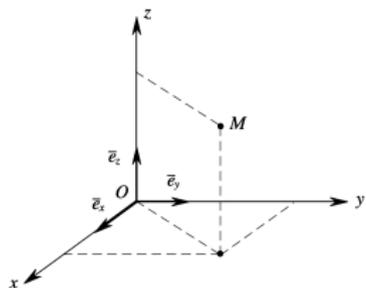


Représentation classiques des composantes du tenseur des contraintes sur un élément de volume (système de coordonnées cartésiennes).

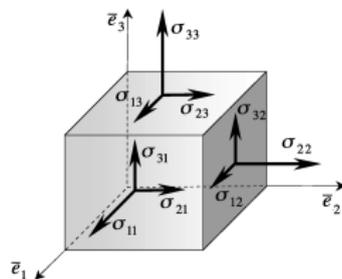


Différents systèmes de coordonnées

Repère cartésien

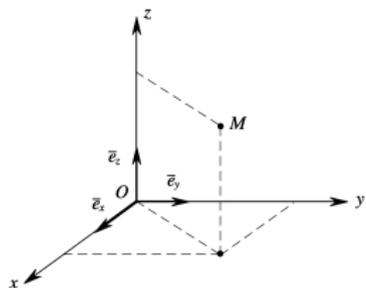


Élément de volume

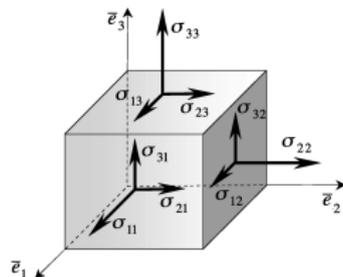


Différents systèmes de coordonnées

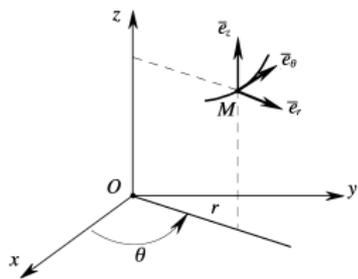
Repère cartésien



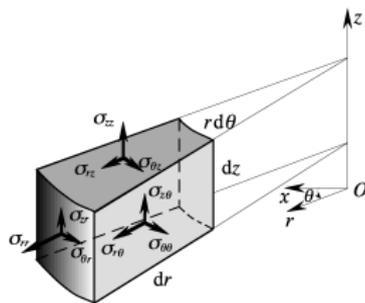
Élément de volume



Repère cylindrique



Élément de volume



Plan du chapitre

- 1 Modélisation des efforts
- 2 Tenseur des contraintes de Cauchy
- 3 Équations d'équilibre**
- 4 Exemples d'équilibre élastique
- 5 Équations du mouvement
- 6 Cas des Poutres

Rappel sur les opérateurs différentiels

On considère un milieu continue $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Un point $M \in \Omega$ est repéré par le vecteur position

$$\bar{x} = \overline{OM} = x_i \bar{e}_i ; \quad \bar{x} = (x_i)$$

Rappel sur les opérateurs différentiels

On considère un milieu continue $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Un point $M \in \Omega$ est repéré par le vecteur position

$$\bar{x} = \overline{OM} = x_i \bar{e}_i ; \quad \bar{x} = (x_i)$$

Pour un **champ scalaire** $f : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ on définit :

Rappel sur les opérateurs différentiels

On considère un milieu continue $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Un point $M \in \Omega$ est repéré par le vecteur position

$$\bar{x} = \overline{OM} = x_i \bar{e}_i; \quad \bar{x} = (x_i)$$

Pour un **champ scalaire** $f : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ on définit :

la **différentielle de f**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \overline{\nabla f} \cdot \overline{dM} \quad \text{avec} \quad \overline{dM} = dx_i \bar{e}_i$$

Rappel sur les opérateurs différentiels

On considère un milieu continue $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Un point $M \in \Omega$ est repéré par le vecteur position

$$\bar{x} = \overline{OM} = x_i \bar{e}_i ; \quad \bar{x} = (x_i)$$

Pour un **champ scalaire** $f : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ on définit :

la **différentielle de f**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \overline{\nabla f} \cdot \overline{dM} \quad \text{avec} \quad \overline{dM} = dx_i \bar{e}_i$$

le **gradient de f**

$$\overline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \bar{e}_i ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$$

Rappel sur les opérateurs différentiels

On considère un milieu continue $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Un point $M \in \Omega$ est repéré par le vecteur position

$$\bar{x} = \overline{OM} = x_i \bar{e}_i ; \quad \bar{x} = (x_i)$$

Pour un **champ scalaire** $f : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ on définit :

la **différentielle de f**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \overline{\nabla f} \cdot \overline{dM} \quad \text{avec } \overline{dM} = dx_i \bar{e}_i$$

le **gradient de f**

$$\overline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \bar{e}_i ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$$

le **laplacien de f**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (\text{sommation } i = 1, 2, 3)$$

On note $\Delta_2 f$ le **laplacien de f en dimension 2** :

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

Opérateurs différentiels (en coordonnées cartésiennes)

Pour un **champ vectoriel**

$$\bar{u} : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow \bar{u}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^3 ; \quad \bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}(M) ; \quad \bar{u} = u_i \bar{e}_i$$

Opérateurs différentiels (en coordonnées cartésiennes)

Pour un **champ vectoriel**

$$\bar{u} : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow \bar{u}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^3; \quad \bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}(M); \quad \bar{u} = u_i \bar{e}_i$$

la **dérivée de \bar{u} (par rapport à la variable d'espace x_j)**

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{e}_i = \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

Opérateurs différentiels (en coordonnées cartésiennes)

Pour un **champ vectoriel**

$$\bar{u} : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow \bar{u}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^3; \quad \bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}(M); \quad \bar{u} = u_i \bar{e}_i$$

la **dérivée de \bar{u} (par rapport à la variable d'espace x_j)**

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{e}_i = \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

le **vecteur nabla**

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{e}_i$$

Opérateurs différentiels (en coordonnées cartésiennes)

Pour un **champ vectoriel**

$$\bar{u} : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow \bar{u}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^3 ; \quad \bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}(M) ; \quad \bar{u} = u_i \bar{e}_i$$

la **dérivée de \bar{u} (par rapport à la variable d'espace x_j)**

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{e}_i = \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

le **vecteur nabra**

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{e}_i$$

le **gradient de \bar{u}**

$$\overline{\overline{\nabla u}} = \bar{u} \otimes \bar{\nabla} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

la **divergence** de \bar{u}

$$\operatorname{div} \bar{u} = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{tr} \overline{\overline{\nabla u}}$$

la **divergence** de \bar{u}

$$\operatorname{div} \bar{u} = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{tr} \overline{\bar{\nabla} u}$$

le **laplacien** de \bar{u}

$$\overline{\Delta u} = \mathbf{div} \left(\overline{\bar{\nabla} u} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \bar{e}_i$$

la **divergence** de \bar{u}

$$\operatorname{div} \bar{u} = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{tr} \overline{\bar{\nabla} u}$$

le **laplacien** de \bar{u}

$$\overline{\Delta u} = \mathbf{div} \left(\overline{\bar{\nabla} u} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \bar{e}_i$$

le **rotationnel** de \bar{u}

$$\overline{\operatorname{rot} u} = \bar{\nabla} \wedge \bar{u}$$

Relations remarquables

On peut montrer les relations suivantes :

$$\operatorname{div}(\overline{\nabla f}) = \Delta f$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = \operatorname{tr}(\overline{\nabla u})$$

$$\operatorname{div}(f \bar{u}) = f \operatorname{div} \bar{u} + \bar{u} \cdot \overline{\nabla f}$$

$$\overline{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) = \overline{\Delta u} + \operatorname{rot}(\overline{\operatorname{rot} u})$$

Relations remarquables

On peut montrer les relations suivantes :

$$\operatorname{div}(\overline{\nabla f}) = \Delta f$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = \operatorname{tr}(\overline{\nabla u})$$

$$\operatorname{div}(f \bar{u}) = f \operatorname{div} \bar{u} + \bar{u} \cdot \overline{\nabla f}$$

$$\overline{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) = \overline{\Delta u} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{u})$$

Propriété

si $\overline{\nabla u}$ est symétrique (*i.e.* $\overline{\nabla u} = {}^t \overline{\nabla u}$) alors $\operatorname{rot} \bar{u} = 0$ et on a, d'après la relation ci-dessus,

$$\overline{\nabla}(\operatorname{div} \bar{u}) = \overline{\Delta u}$$

Opérateurs différentiels (en coordonnées cartésiennes)

Pour un **champ tensoriel**

$$\bar{\sigma} : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow \bar{\sigma}(\bar{x}) = \bar{\sigma}(M) ; \quad \bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Opérateurs différentiels (en coordonnées cartésiennes)

Pour un **champ tensoriel**

$$\bar{\sigma} : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow \bar{\sigma}(\bar{x}) = \bar{\sigma}(M) ; \quad \bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

la **divergence** de $\bar{\sigma}$

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\nabla} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{e}_i$$

c'est un vecteur dont la i^{e} composante est

$$(\operatorname{div} \bar{\sigma})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

On peut montrer la relation

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma} \cdot \bar{u}) = \operatorname{div}(\bar{\sigma}) \cdot \bar{u} + \bar{\sigma} \cdot \overline{\nabla \bar{u}}$$

Opérateurs différentiels (en coordonnées cartésiennes)

Pour un **champ tensoriel**

$$\bar{\sigma} : \bar{x} \in \Omega \longrightarrow \bar{\sigma}(\bar{x}) = \bar{\sigma}(M) ; \quad \bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

la **divergence** de $\bar{\sigma}$

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\nabla} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{e}_i$$

c'est un vecteur dont la i^{e} composante est

$$(\operatorname{div} \bar{\sigma})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

On peut montrer la relation

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma} \cdot \bar{u}) = \operatorname{div}(\bar{\sigma}) \cdot \bar{u} + \bar{\sigma} \cdot \bar{\nabla} \bar{u}$$

Théorèmes de la divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u} \, dv = \int_{\partial \Omega} \bar{u} \cdot \bar{n} \, da$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{\sigma} \, dv = \int_{\partial \Omega} \bar{\sigma} \cdot \bar{n} \, da$$

Équilibre d'un volume élémentaire

Pour déterminer les équations d'équilibre dans le solide on se pose le problème suivant.

Étant donné un solide Ω et le système de forces extérieures constitué :

- des forces de contour $\bar{F}^s(M)$ sur $\partial\Omega$
- des forces de volume $\bar{f}^v(M)$ dans Ω

peut-on déterminer les efforts intérieurs, c'est à dire le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ en tout point $M \in \Omega$?

La réponse est construite en 3 étapes.

Étape 1 :

Vérification au préalable de l'équilibre globale de la structure sous l'action des forces extérieures : $[\mathcal{F}_e] = 0$

Étape 1 :

Vérification au préalable de l'équilibre globale de la structure sous l'action des forces extérieures : $[\mathcal{F}_e] = 0$

Soit

$$\sum \overline{\text{Forces}} = 0 \iff \int_{\Omega} \bar{f}^v (M) dv + \int_{\partial\Omega} \bar{F}^s (M) da = 0$$

Étape 1 :

Vérification au préalable de l'équilibre globale de la structure sous l'action des forces extérieures : $[\mathcal{F}_e] = 0$

Soit

$$\sum \overline{\text{Forces}} = 0 \iff \int_{\Omega} \bar{f}^v (M) dv + \int_{\partial\Omega} \bar{F}^s (M) da = 0$$

$$\sum \overline{\text{Moments}} = 0 \iff \int_{\Omega} \overline{OM} \wedge \bar{f}^v (M) dv + \int_{\partial\Omega} \overline{OM} \wedge \bar{F}^s (M) da = 0$$

Étape 2 :

- 1 On applique le principe de la coupure en isolant un élément de volume $dx \times dy \times dz$ parallèle aux directions Ox, Oy, Oz (système de coordonnées cartésiennes).

Étape 2 :

- 1 On applique le principe de la coupure en isolant un élément de volume $dx \times dy \times dz$ parallèle aux directions Ox, Oy, Oz (système de coordonnées cartésiennes).
- 2 On écrit les équations différentielles traduisant l'équilibre statique de l'élément de volume dans les 3 directions.

Étape 2 :

- ① On applique le principe de la coupure en isolant un élément de volume $dx \times dy \times dz$ parallèle aux directions Ox, Oy, Oz (système de coordonnées cartésiennes).
- ② On écrit les équations différentielles traduisant l'équilibre statique de l'élément de volume dans les 3 directions.

Tous calculs fait on obtient

- ▶ Équilibre suivant la directions \bar{e}_x

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^v = 0$$

- ▶ Équilibre suivant la directions \bar{e}_y

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^v = 0$$

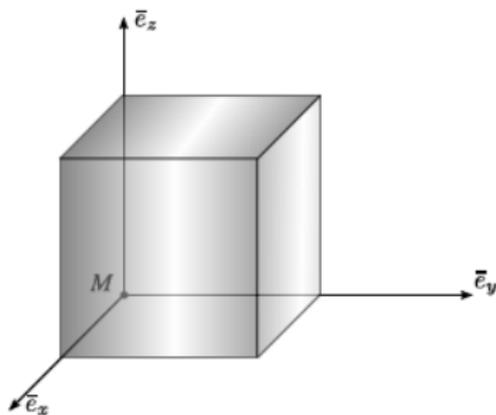
- ▶ Équilibre suivant la directions \bar{e}_z

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^v = 0$$

Démonstration de l'équation d'équilibre suivant Ox

Par un développement limité à l'ordre 1 de la fonction de $M \rightarrow \sigma_{xx}(M)$ au point M_{dx} de coordonnées $(x + dx, y, z)$ on écrit

$$\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + o(dx)$$



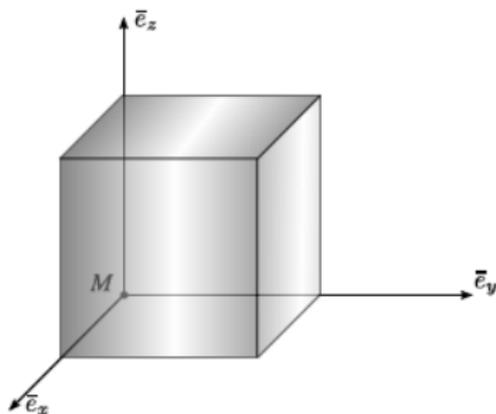
Démonstration de l'équation d'équilibre suivant Ox

Par un développement limité à l'ordre 1 de la fonction de $M \rightarrow \sigma_{xx}(M)$ au point M_{dx} de coordonnées $(x + dx, y, z)$ on écrit

$$\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + o(dx)$$

Le bilan des forces selon la direction \vec{e}_x qui s'exercent sur les 6 faces du cube donne

$$\overline{R}_{/Ox} =$$



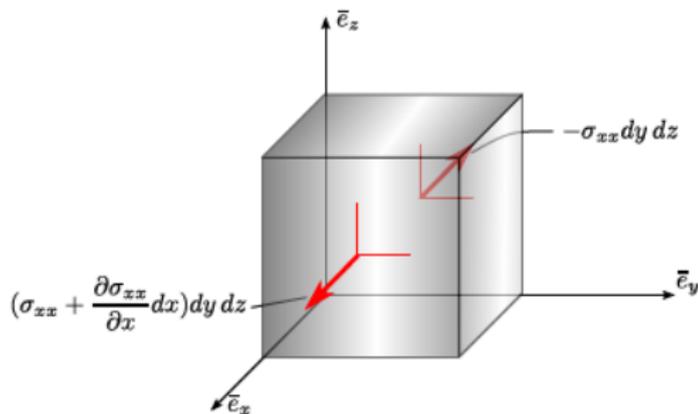
Démonstration de l'équation d'équilibre suivant Ox

Par un développement limité à l'ordre 1 de la fonction de $M \rightarrow \sigma_{xx}(M)$ au point M_{dx} de coordonnées $(x + dx, y, z)$ on écrit

$$\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + o(dx)$$

Le bilan des forces selon la direction \bar{e}_x qui s'exercent sur les 6 faces du cube donne

$$\bar{R}/Ox = (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_{xx} dy dz$$



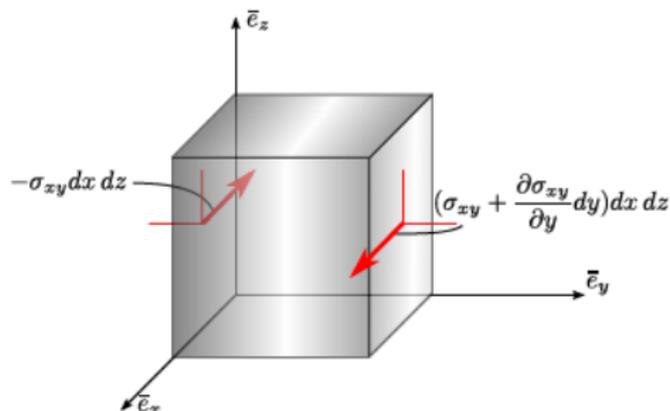
Démonstration de l'équation d'équilibre suivant Ox

Par un développement limité à l'ordre 1 de la fonction de $M \rightarrow \sigma_{xx}(M)$ au point M_{dx} de coordonnées $(x + dx, y, z)$ on écrit

$$\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + o(dx)$$

Le bilan des forces selon la direction \bar{e}_x qui s'exercent sur les 6 faces du cube donne

$$\begin{aligned} \bar{R}/Ox = & \\ & (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_{xx} dy dz \\ & + (\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy) dx dz - \sigma_{xy} dx dz \end{aligned}$$



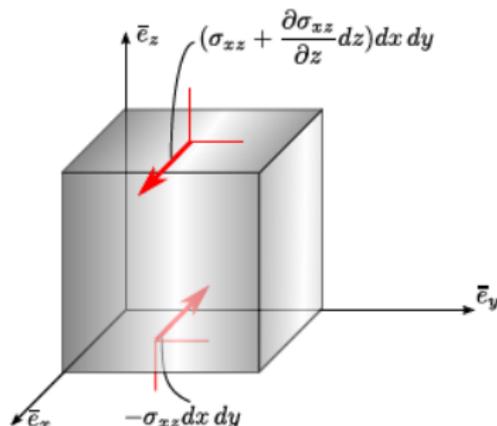
Démonstration de l'équation d'équilibre suivant Ox

Par un développement limité à l'ordre 1 de la fonction de $M \rightarrow \sigma_{xx}(M)$ au point M_{dx} de coordonnées $(x + dx, y, z)$ on écrit

$$\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + o(dx)$$

Le bilan des forces selon la direction \bar{e}_x qui s'exercent sur les 6 faces du cube donne

$$\begin{aligned} \bar{R}/Ox = & (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_{xx} dy dz \\ & + (\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy) dx dz - \sigma_{xy} dx dz \\ & + (\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz) dx dy - \sigma_{xz} dx dy \\ & + f_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$



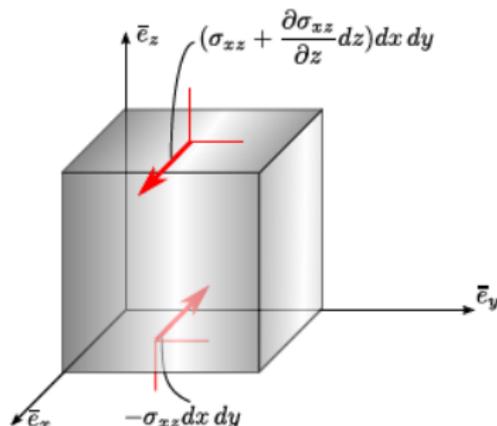
Démonstration de l'équation d'équilibre suivant Ox

Par un développement limité à l'ordre 1 de la fonction de $M \rightarrow \sigma_{xx}(M)$ au point M_{dx} de coordonnées $(x + dx, y, z)$ on écrit

$$\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + o(dx)$$

Le bilan des forces selon la direction \bar{e}_x qui s'exercent sur les 6 faces du cube donne

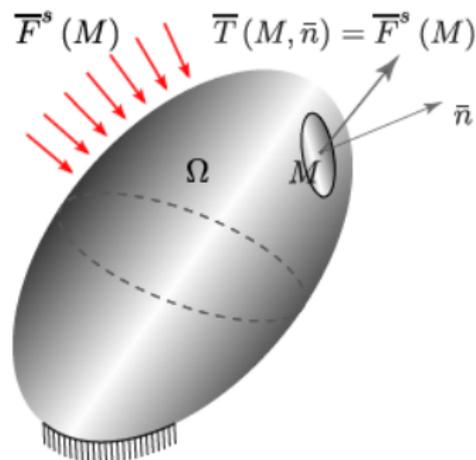
$$\begin{aligned} \bar{R}/Ox = & (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_{xx} dy dz \\ & + (\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy) dx dz - \sigma_{xy} dx dz \\ & + (\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz) dx dy - \sigma_{xz} dx dy \\ & + f_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$



Division par $dV = dx dy dz$, cqfd.

Étape 3 : Condition de raccordement (ou conditions limites)

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ solution doit vérifier les conditions limites sur le contour de Ω . Ces conditions sont données par la force surfacique $\bar{F}^s(M)$ sur $\partial\Omega$.



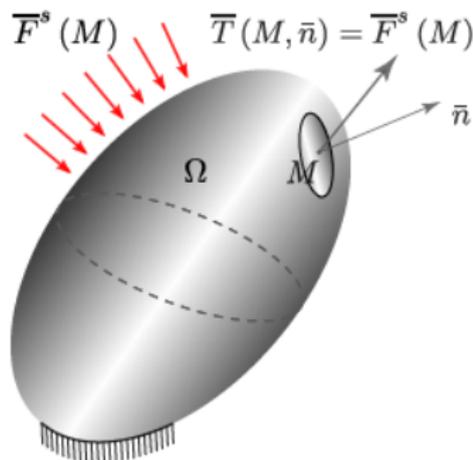
Étape 3 : Condition de raccordement (ou conditions limites)

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ solution doit vérifier les conditions limites sur le contour de Ω . Ces conditions sont données par la force surfacique $\bar{F}^s(M)$ sur $\partial\Omega$.

La condition de raccordement impose qu'en tout point $M \in \partial\Omega$, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ soit égale à la force surfacique donnée :

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{F}^s(M), \quad M \in \partial\Omega$$

où \bar{n} est la normale à la surface en M .



Étape 3 : Condition de raccordement (ou conditions limites)

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ solution doit vérifier les conditions limites sur le contour de Ω . Ces conditions sont données par la force surfacique $\bar{F}^s(M)$ sur $\partial\Omega$.

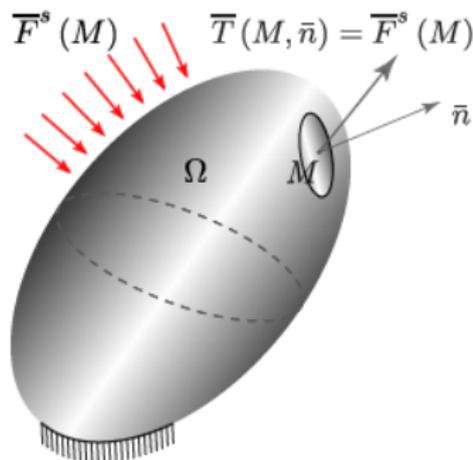
La condition de raccordement impose qu'en tout point $M \in \partial\Omega$, le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \bar{n})$ soit égale à la force surfacique donnée :

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{F}^s(M), \quad M \in \partial\Omega$$

où \bar{n} est la normale à la surface en M .

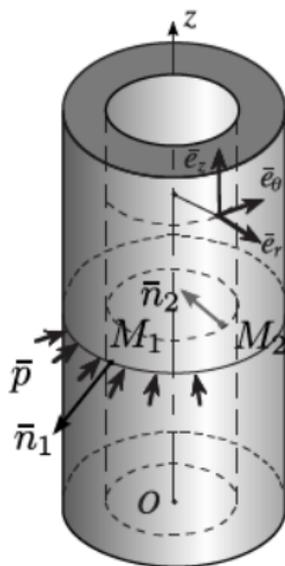
En appliquant la formule de Cauchy on obtient la condition :

$$\bar{\sigma}(M) \bar{n} = \bar{F}^s(M), \quad M \in \partial\Omega$$



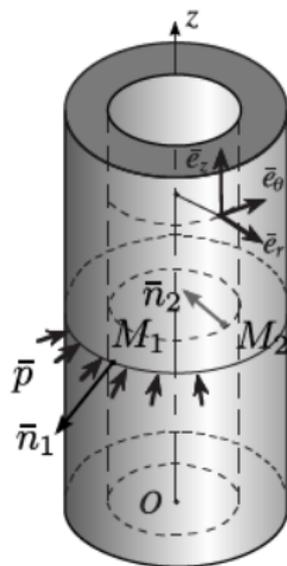
Exemple de conditions de raccordement

On considère un tube cylindrique sous pression extérieure :



Exemple de conditions de raccordement

On considère un tube cylindrique sous pression extérieure :



Condition de raccordement en tout point extérieur au cylindre

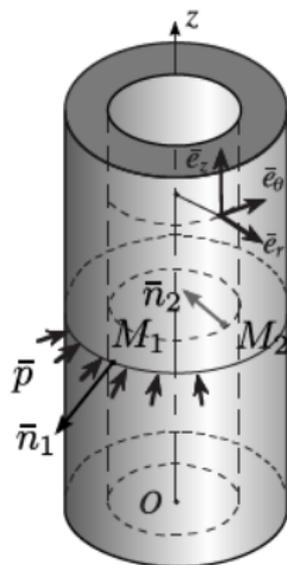
$$\bar{T}(M, \bar{n}_1) = -p\bar{e}_r$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr}(M) = -p, \quad \sigma_{\theta r}(M) = \sigma_{zr}(M) = 0$$

$$\forall M \text{ tel que } r = R_e$$

Exemple de conditions de raccordement

On considère un tube cylindrique sous pression extérieure :



Condition de raccordement en tout point extérieur au cylindre

$$\bar{T}(M, \bar{n}_1) = -p\bar{e}_r$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr}(M) = -p, \quad \sigma_{\theta r}(M) = \sigma_{zr}(M) = 0$$

$$\forall M \text{ tel que } r = R_e$$

Condition de raccordement en tout point intérieur au cylindre

$$\bar{T}(M, \bar{n}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr}(M) = \sigma_{\theta r}(M) = \sigma_{zr}(M) = 0$$

$$\forall M \text{ tel que } r = R_i$$

Bilan : conditions d'équilibre statique

Définition

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ est dit *statiquement admissible* (SA) s'il vérifie les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^v = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^v = 0 \quad (8b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^v = 0 \quad (8c)$$

et les conditions limites sur $\delta\Omega$:

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \bar{F}^s(M) \quad \text{pour tout } M \in \partial\Omega \quad (9)$$

Symétrie du tenseur des contraintes

Les équations d'équilibre ont été obtenues en exploitant la seule condition de nullité des forces.

En écrivant l'équilibre des moments on obtient des restrictions sur les formes possibles du tenseur des contraintes.

Deuxième théorème de Cauchy

Le tenseur de Cauchy est symétrique, c'est à dire qu'il vérifie

$$\bar{\bar{\sigma}} = {}^t\bar{\bar{\sigma}} \iff [\sigma] = {}^t[\sigma] \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Par conséquent, $\bar{\bar{\sigma}}$ ne possède que 6 composantes indépendantes.

Symétrie du tenseur des contraintes

Les équations d'équilibre ont été obtenues en exploitant la seule condition de nullité des forces.

En écrivant l'équilibre des moments on obtient des restrictions sur les formes possibles du tenseur des contraintes.

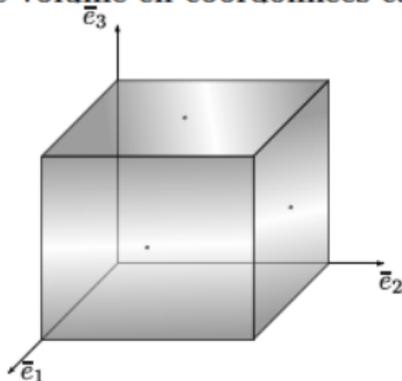
Deuxième théorème de Cauchy

Le tenseur de Cauchy est symétrique, c'est à dire qu'il vérifie

$$\bar{\bar{\sigma}} = {}^t\bar{\bar{\sigma}} \iff [\sigma] = {}^t[\sigma] \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Par conséquent, $\bar{\bar{\sigma}}$ ne possède que 6 composantes indépendantes.

Illustration sur un élément de volume en coordonnées cartésiennes :



Symétrie du tenseur des contraintes

Les équations d'équilibre ont été obtenues en exploitant la seule condition de nullité des forces.

En écrivant l'équilibre des moments on obtient des restrictions sur les formes possibles du tenseur des contraintes.

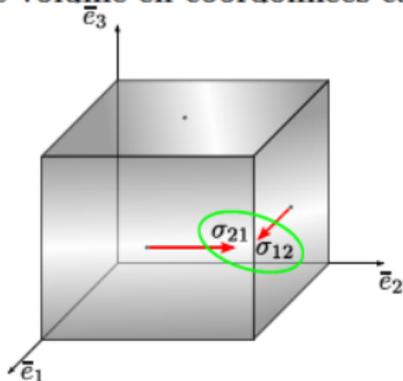
Deuxième théorème de Cauchy

Le tenseur de Cauchy est symétrique, c'est à dire qu'il vérifie

$$\bar{\sigma} = {}^t\bar{\sigma} \iff [\sigma] = {}^t[\sigma] \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Par conséquent, $\bar{\sigma}$ ne possède que 6 composantes indépendantes.

Illustration sur un élément de volume en coordonnées cartésiennes :



Symétrie du tenseur des contraintes

Les équations d'équilibre ont été obtenues en exploitant la seule condition de nullité des forces.

En écrivant l'équilibre des moments on obtient des restrictions sur les formes possibles du tenseur des contraintes.

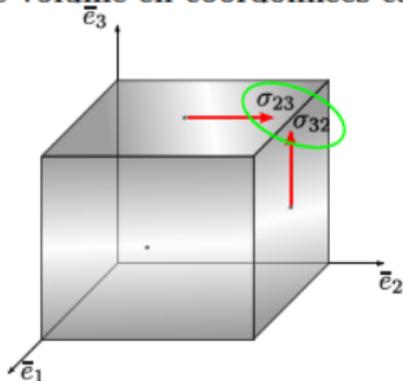
Deuxième théorème de Cauchy

Le tenseur de Cauchy est symétrique, c'est à dire qu'il vérifie

$$\bar{\sigma} = {}^t\bar{\sigma} \iff [\sigma] = {}^t[\sigma] \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Par conséquent, $\bar{\sigma}$ ne possède que 6 composantes indépendantes.

Illustration sur un élément de volume en coordonnées cartésiennes :



Symétrie du tenseur des contraintes

Les équations d'équilibre ont été obtenues en exploitant la seule condition de nullité des forces.

En écrivant l'équilibre des moments on obtient des restrictions sur les formes possibles du tenseur des contraintes.

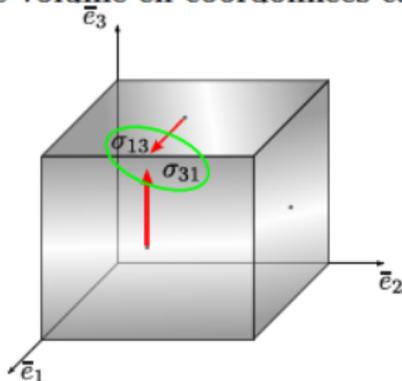
Deuxième théorème de Cauchy

Le tenseur de Cauchy est symétrique, c'est à dire qu'il vérifie

$$\bar{\sigma} = {}^t\bar{\sigma} \iff [\sigma] = {}^t[\sigma] \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Par conséquent, $\bar{\sigma}$ ne possède que 6 composantes indépendantes.

Illustration sur un élément de volume en coordonnées cartésiennes :

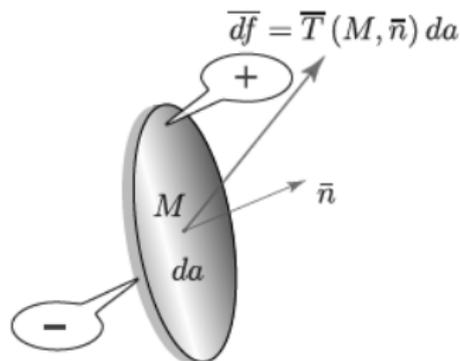
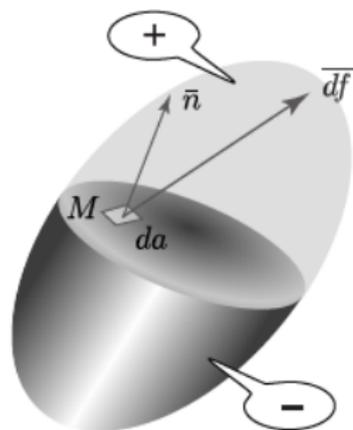


Bilan de la modélisation des efforts intérieurs

En chaque point M intérieur au milieu continu Ω il existe un tenseur *symétrique* $\bar{\sigma}(M)$ tel que la force élémentaire $\bar{d}\vec{f}$ s'exerçant sur un élément d'aire da orienté transversalement par la normale \bar{n} soit donnée par

$$\bar{d}\vec{f} = \bar{T}(M, \bar{n}) da = \bar{\sigma}(M) \bar{n} da$$

Cette force représente les actions locales en M qui s'exercent à travers la facette orientée de normale \bar{n} .

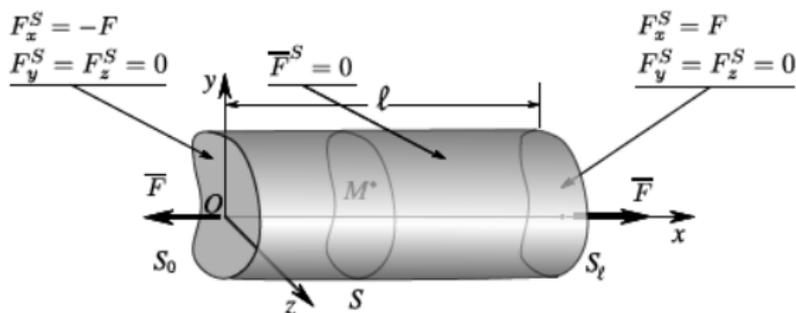


Plan du chapitre

- 1 Modélisation des efforts
- 2 Tenseur des contraintes de Cauchy
- 3 Équations d'équilibre
- 4 Exemples d'équilibre élastique**
- 5 Équations du mouvement
- 6 Cas des Poutres

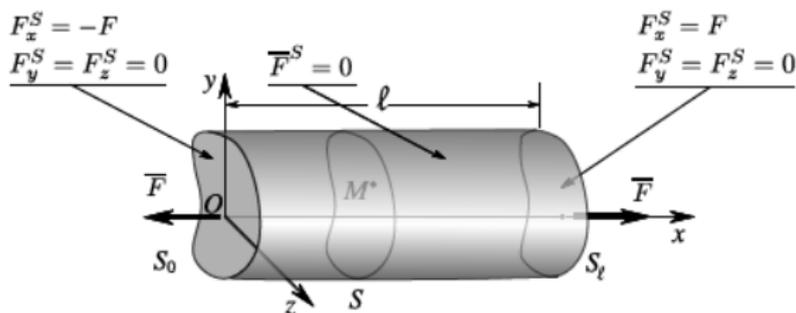
Application - Équilibre d'une barre cylindrique en traction-compression

On considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :



Application - Équilibre d'une barre cylindrique en traction-compression

On considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :

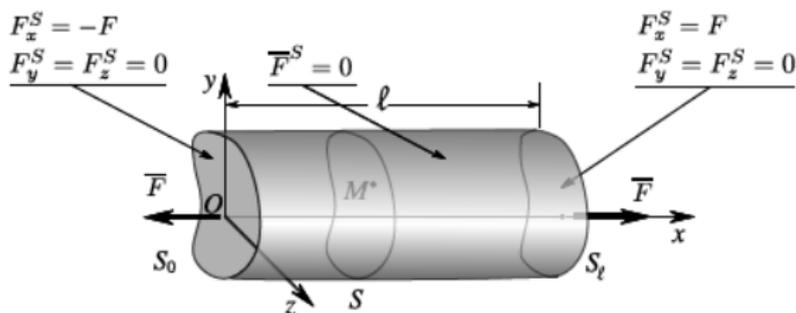


- Force volumique nulle :

$$\bar{f}^v = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

Application - Équilibre d'une barre cylindrique en traction-compression

On considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :



- Force volumique nulle :

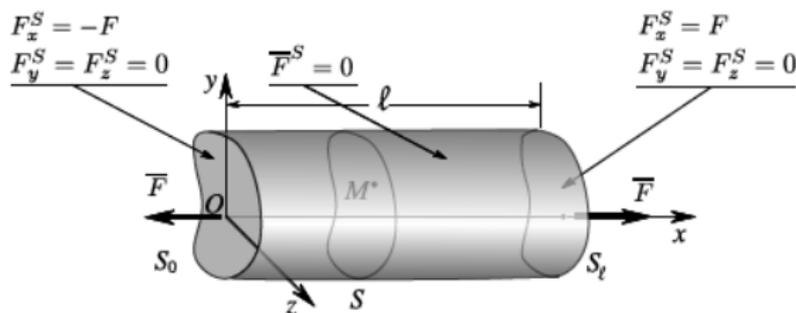
$$\bar{f}^v = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

- Surface latérale libre de contrainte :

$$\bar{F}^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - (S_0 \cup S_j)$$

Application - Équilibre d'une barre cylindrique en traction-compression

On considère un corps Ω de forme cylindrique avec les conditions de chargement suivant :



- Force volumique nulle :

$$\bar{f}^v = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

- Surface latérale libre de contrainte :

$$\bar{F}^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - (S_0 \cup S_l)$$

- Conditions aux limites mixtes aux extrémités :

$$\bar{F}^S = -F\bar{e}_x \quad \text{sur } S_0$$

$$\bar{F}^S = F\bar{e}_x \quad \text{sur } S_l$$

Montrons que le champ de contrainte homogène $\bar{\sigma}$ donné, dans le repère $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, par la matrice des composantes

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est statiquement admissible.

Montrons que le champ de contrainte homogène $\bar{\sigma}$ donné, dans le repère $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, par la matrice des composantes

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est statiquement admissible.

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ doit vérifier

- ④ les équations d'équilibre : elles sont vérifiées puisque $\bar{\sigma}$ est indépendant de M (toutes les dérivées sont nulles) et $\bar{f}^v = 0$.

Montrons que le champ de contrainte homogène $\bar{\sigma}$ donné, dans le repère $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, par la matrice des composantes

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est statiquement admissible.

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ doit vérifier

- ① les équations d'équilibre : elles sont vérifiées puisque $\bar{\sigma}$ est indépendant de M (toutes les dérivées sont nulles) et $\bar{f}^v = 0$.
- ② les conditions limites

$$\bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n} = \bar{F}^s(M), \quad M \in \partial\Omega$$

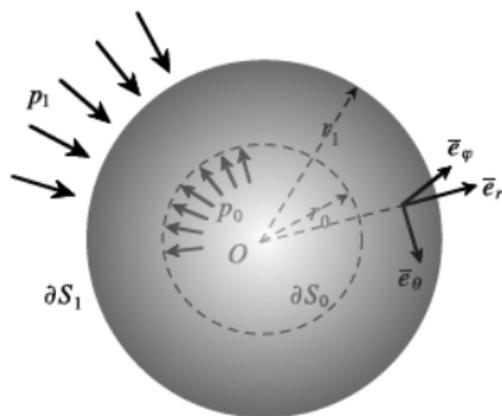
elle sont vérifiées puisque

$$\begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

On considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi)$

- Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :



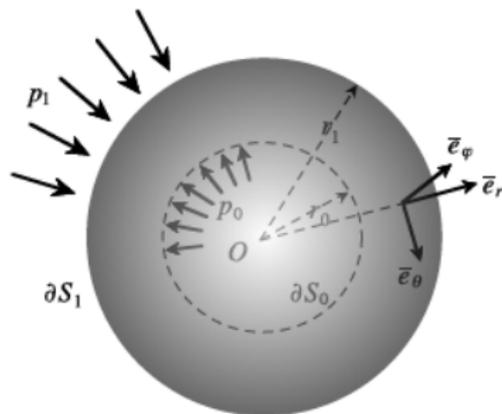
Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

On considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi)$

- Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- ▶ Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$



Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

On considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi)$

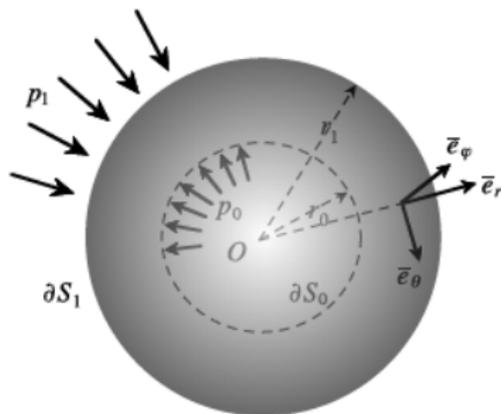
- Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- ▶ Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

- ▶ Pression uniforme p_1 à l'extérieur :

$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$



Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

On considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi)$

- Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- ▶ Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

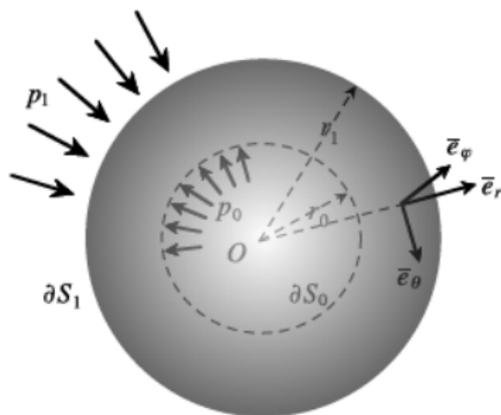
$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

- ▶ Pression uniforme p_1 à l'extérieur :

$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$

- Les force de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$



Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

On considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons r_0 et r_1 . On se place dans un système de coordonnées sphériques $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi)$

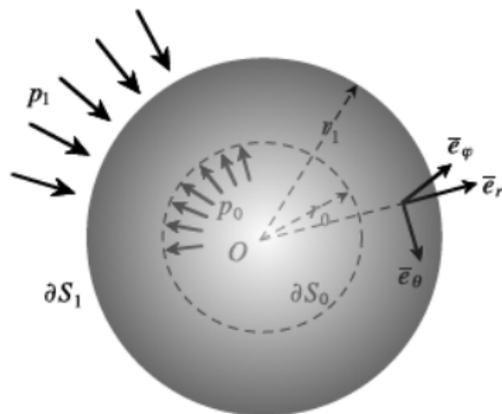
- Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de déplacement imposé) :

- ▶ Pression uniforme p_0 à l'intérieur :

$$\bar{F}^S(M) = p_0 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0)$$

- ▶ Pression uniforme p_1 à l'extérieur :

$$\bar{F}^S(M) = -p_1 \bar{e}_r \quad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1)$$



- Les forces de volumes sont nulles :

$$\bar{f}^v(M) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

Question :

Calculer la solution du problème d'élasticité c'est-à-dire, déterminer $\bar{\sigma}(M)$ en tout point du solide.

Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

Réponse : (voir cours I3-6)

Le champ de contrainte solution est de la forme

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} -\frac{2B}{r^3} + A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{r^3} + A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B}{r^3} + A \end{bmatrix}$$

avec les constantes

$$A = \frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}, \quad B = \frac{1}{2} (p_0 - p_1) \frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}$$

Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

Réponse : (voir cours I3-6)

Le champ de contrainte solution est de la forme

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} -\frac{2B}{r^3} + A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{r^3} + A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B}{r^3} + A \end{bmatrix}$$

avec les constantes

$$A = \frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}, \quad B = \frac{1}{2} (p_0 - p_1) \frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}$$

Remarque.

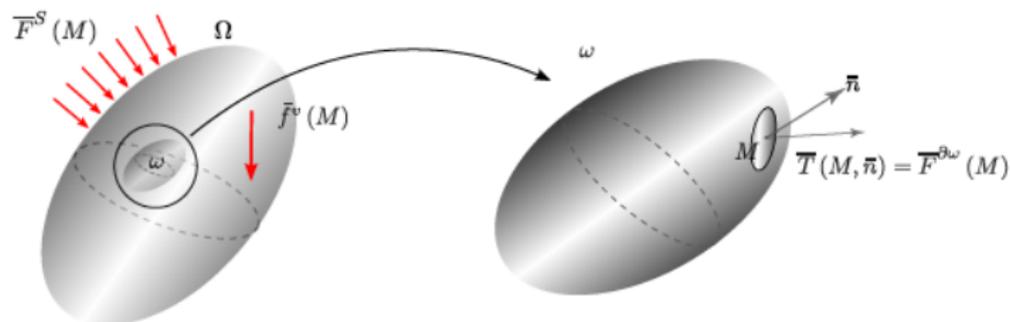
Dans ce repère, la matrice des contraintes est diagonale. Les composantes tangentielles sont donc nulles.

Plan du chapitre

- 1 Modélisation des efforts
- 2 Tenseur des contraintes de Cauchy
- 3 Équations d'équilibre
- 4 Exemples d'équilibre élastique
- 5 Équations du mouvement**
- 6 Cas des Poutres

Principe fondamental de la dynamique

On considère un milieu continu Ω en mouvement sous l'action de forces extérieures, forces de volume \bar{f}^v , forces de surface \bar{F}^S . On cherche à exprimer l'équilibre mécanique d'une sous partie quelconque $\omega \subset \Omega$.

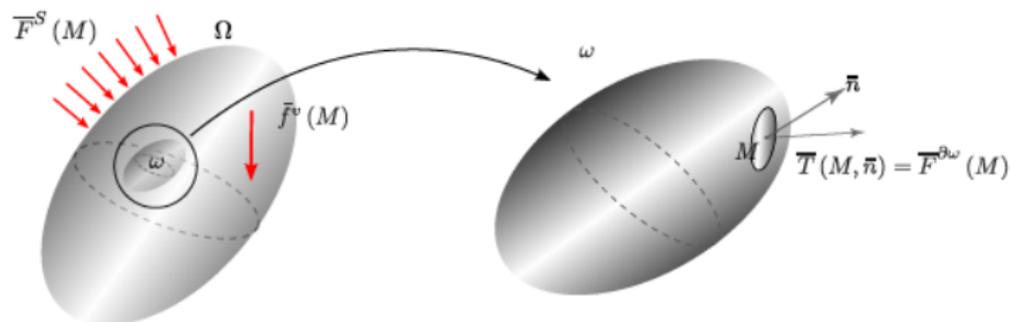


Principe fondamental de la dynamique

On considère un milieu continu Ω en mouvement sous l'action de forces extérieures, forces de volume \bar{f}^v , forces de surface \bar{F}^S . On cherche à exprimer l'équilibre mécanique d'une sous partie quelconque $\omega \subset \Omega$.

Bilan des forces exercées sur ω :

- forces de volumes $\bar{f}^v (M)$ dans ω ;

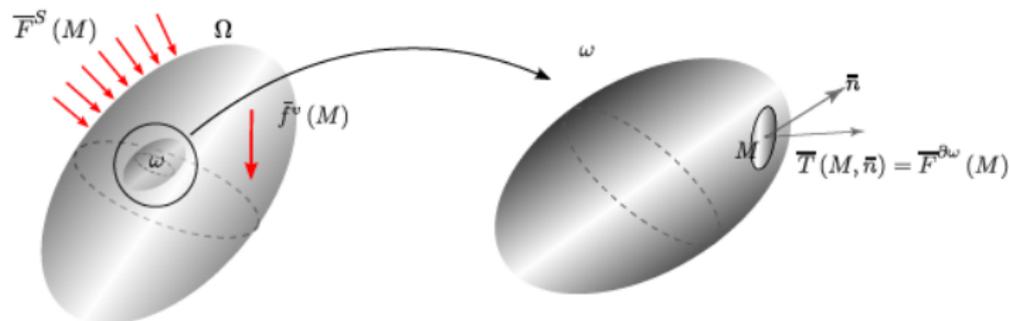


Principe fondamental de la dynamique

On considère un milieu continu Ω en mouvement sous l'action de forces extérieures, forces de volume \bar{f}^v , forces de surface \bar{F}^S . On cherche à exprimer l'équilibre mécanique d'une sous partie quelconque $\omega \subset \Omega$.

Bilan des forces exercées sur ω :

- forces de volumes $\bar{f}^v(M)$ dans ω ;
- forces surfaciques $\bar{F}^{\partial\omega}(M)$ exercées sur le contour $\partial\omega$ de ω (actions de contact de Ω sur ω).

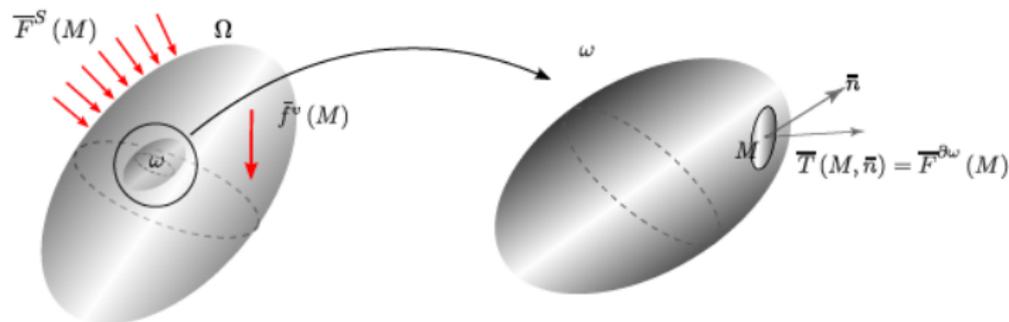


Principe fondamental de la dynamique

On considère un milieu continu Ω en mouvement sous l'action de forces extérieures, forces de volume \bar{f}^v , forces de surface \bar{F}^S . On cherche à exprimer l'équilibre mécanique d'une sous partie quelconque $\omega \subset \Omega$.

Bilan des forces exercées sur ω :

- forces de volumes $\bar{f}^v(M)$ dans ω ;
- forces surfaciques $\bar{F}^{\partial\omega}(M)$ exercées sur le contour $\partial\omega$ de ω (actions de contact de Ω sur ω).



Rappel (hypothèse et théorème de Cauchy) : Ces actions de contact ne dépendent que de la normale en M à $\partial\omega$ et de façon linéaire :

$$\bar{F}^{\partial\omega}(M) = \bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \bar{n}$$

Théorème (Principe fondamental de la dynamique)

Pour tout Ω et pour toute sous partie $\omega \subset \Omega$, le torseur des efforts extérieurs est égale au torseur des quantités d'accélération, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [\bar{R}_{mvt}, \bar{M}_{mvt}] = [\bar{R}_{ext}, \bar{M}_{ext}] \quad \forall \omega \subset \Omega$$

Théorème (Principe fondamental de la dynamique)

Pour tout Ω et pour toute sous partie $\omega \subset \Omega$, le torseur des efforts extérieurs est égale au torseur des quantités d'accélération, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [\bar{R}_{mvt}, \bar{M}_{mvt}] = [\bar{R}_{ext}, \bar{M}_{ext}] \quad \forall \omega \subset \Omega$$

Calcul des différents termes :

- Torseur des quantités de mouvement de ω

$$\bar{R}_{mvt} = \int_{\omega} \rho \bar{v} dv$$

$$\bar{M}_{mvt} = \int_{\omega} \overline{OM} \wedge \rho \bar{v} dv$$

Théorème (Principe fondamental de la dynamique)

Pour tout Ω et pour toute sous partie $\omega \subset \Omega$, le torseur des efforts extérieurs est égale au torseur des quantités d'accélération, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [\bar{R}_{mvt}, \bar{M}_{mvt}] = [\bar{R}_{ext}, \bar{M}_{ext}] \quad \forall \omega \subset \Omega$$

Calcul des différents termes :

- Torseur des quantités de mouvement de ω

$$\bar{R}_{mvt} = \int_{\omega} \rho \bar{v} dv$$

$$\bar{M}_{mvt} = \int_{\omega} \overline{OM} \wedge \rho \bar{v} dv$$

- Torseur des forces extérieurs agissant sur ω

$$\bar{R}_{ext} = \int_{\omega} \bar{f}^v dv + \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da$$

$$\bar{M}_{ext} = \int_{\omega} \overline{OM} \wedge \bar{f}^v dv + \int_{\partial\omega} \overline{OM} \wedge \bar{F}^{\partial\omega} da$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$\int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10a)$$

$$\int_{\omega} \overline{OM} \wedge (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \overline{OM} \wedge \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10b)$$

pour tout sous domaine $\omega \in \Omega$.

L'équation (10a) traduit la conservation de la quantité de mouvement.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$\int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10a)$$

$$\int_{\omega} \overline{OM} \wedge (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \overline{OM} \wedge \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10b)$$

pour tout sous domaine $\omega \in \Omega$.

L'équation (10a) traduit la conservation de la quantité de mouvement.

En appliquant le théorème de Cauchy et la formule de la divergence pour l'équation (10a), on obtient

$$\int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da =$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$\int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10a)$$

$$\int_{\omega} \overline{OM} \wedge (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \overline{OM} \wedge \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10b)$$

pour tout sous domaine $\omega \in \Omega$.

L'équation (10a) traduit la conservation de la quantité de mouvement.

En appliquant le théorème de Cauchy et la formule de la divergence pour l'équation (10a), on obtient

$$\int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da = \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\partial\omega} \bar{\sigma} \cdot \bar{n} da$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$\int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10a)$$

$$\int_{\omega} \overline{OM} \wedge (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \overline{OM} \wedge \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10b)$$

pour tout sous domaine $\omega \in \Omega$.

L'équation (10a) traduit la conservation de la quantité de mouvement.

En appliquant le théorème de Cauchy et la formule de la divergence pour l'équation (10a), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da &= \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\partial\omega} \bar{\sigma} \cdot \bar{n} da \\ &= \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\omega} \operatorname{div} \bar{\sigma} dv \end{aligned}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$\int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10a)$$

$$\int_{\omega} \overline{OM} \wedge (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv = \int_{\partial\omega} \overline{OM} \wedge \bar{F}^{\partial\omega} da \quad (10b)$$

pour tout sous domaine $\omega \in \Omega$.

L'équation (10a) traduit la conservation de la quantité de mouvement.

En appliquant le théorème de Cauchy et la formule de la divergence pour l'équation (10a), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\partial\omega} \bar{F}^{\partial\omega} da &= \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\partial\omega} \bar{\sigma} \cdot \bar{n} da \\ &= \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v) dv - \int_{\omega} \operatorname{div} \bar{\sigma} dv \\ &= \int_{\omega} (\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v - \operatorname{div} \bar{\sigma}) dv = 0 \quad \forall \omega \in \Omega \end{aligned}$$

Équations du mouvement

L'égalité étant vérifiée pour tout sous domaine ω de Ω , on en déduit, d'après des théorèmes d'analyse, qu'en tout point $M \in \Omega$, on a

$$\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v - \operatorname{div} \bar{\sigma} = 0 \quad \forall M \in \Omega \quad (11)$$

Ces 3 équations scalaires constituent les équations du mouvement.

Équations du mouvement

L'égalité étant vérifiée pour tout sous domaine ω de Ω , on en déduit, d'après des théorèmes d'analyse, qu'en tout point $M \in \Omega$, on a

$$\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v - \operatorname{div} \bar{\sigma} = 0 \quad \forall M \in \Omega \quad (11)$$

Ces 3 équations scalaires constituent les équations du mouvement.

Lorsque l'accélération γ est nulle (mouvement de translation uniforme) on retrouve les équations d'équilibre écrites avec l'opérateur divergence

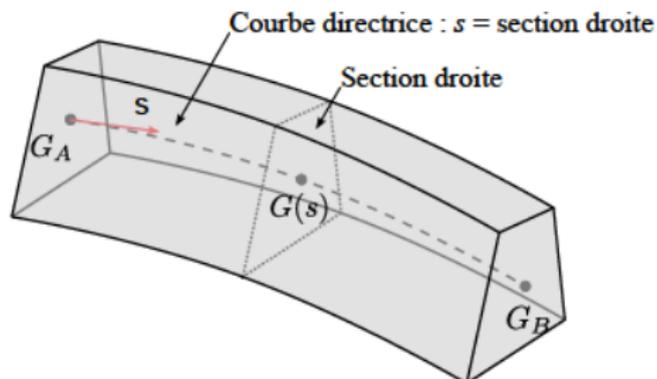
$$\operatorname{div} \bar{\sigma} (M) + \bar{f}^v (M) = 0 \quad \text{pour tout } M \in \Omega \quad (12)$$

Plan du chapitre

- 1 Modélisation des efforts
- 2 Tenseur des contraintes de Cauchy
- 3 Équations d'équilibre
- 4 Exemples d'équilibre élastique
- 5 Équations du mouvement
- 6 Cas des Poutres**

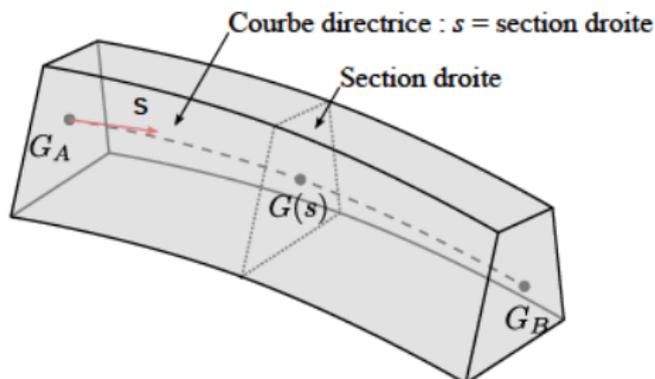
Cas d'une structure poutre - Hypothèses géométriques

Le solide est représenté géométriquement à sa ligne moyenne : c'est un milieu continu unidirectionnel (1D) également appelé milieu curviligne



Cas d'une structure poutre - Hypothèses géométriques

Le solide est représenté géométriquement à sa ligne moyenne : c'est un milieu continu unidirectionnel (1D) également appelé milieu curviligne

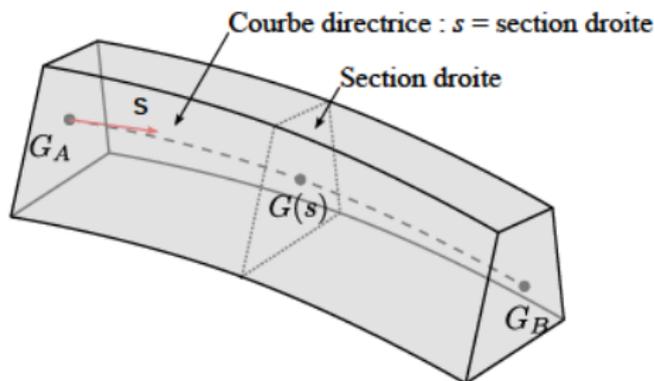


Remarques :

- 1 le solide est orienté de $G_A \rightarrow G_B$;

Cas d'une structure poutre - Hypothèses géométriques

Le solide est représenté géométriquement à sa ligne moyenne : c'est un milieu continu unidirectionnel (1D) également appelé milieu curviligne

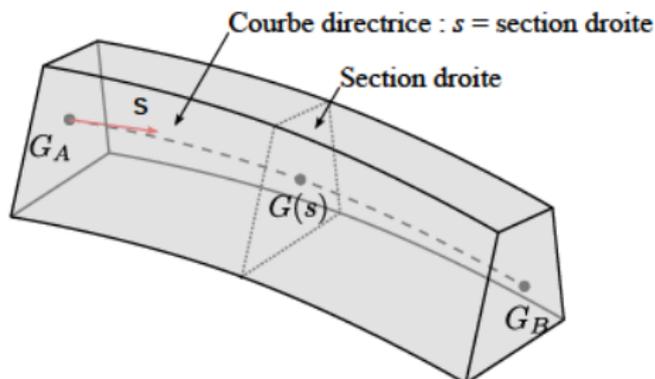


Remarques :

- ① le solide est orienté de $G_A \rightarrow G_B$;
- ② la ligne directrice est décrite par une abscisse curviligne (*i.e* un scalaire - caractère 1D), elle peut être courbe ;

Cas d'une structure poutre - Hypothèses géométriques

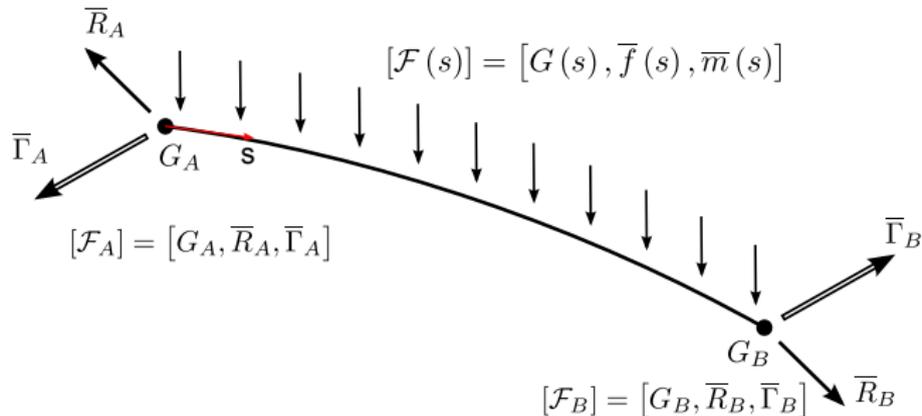
Le solide est représenté géométriquement à sa ligne moyenne : c'est un milieu continu unidirectionnel (1D) également appelé milieu curviligne



Remarques :

- ❶ le solide est orienté de $G_A \rightarrow G_B$;
- ❷ la ligne directrice est décrite par une abscisse curviligne (*i.e* un scalaire - caractère 1D), elle peut être courbe ;
- ❸ la section droite peut être variable.

Efforts extérieurs



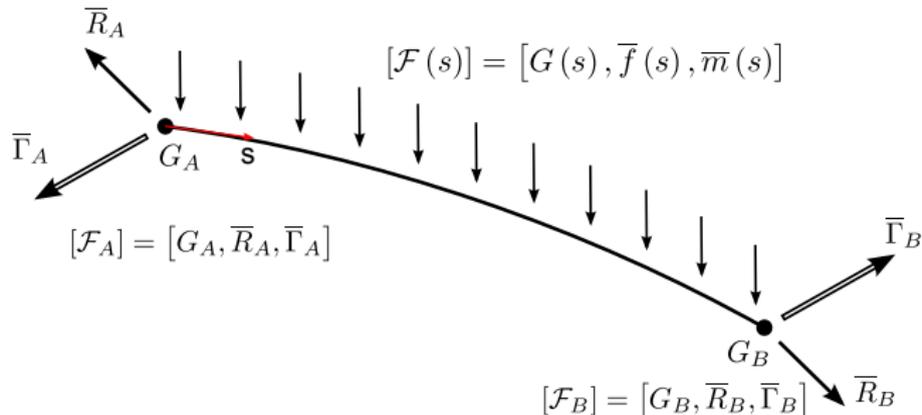
On définit les efforts extérieurs suivants :

- ① **Force de volume dans Ω :**

$$\bar{f}(s), \bar{m}(s)$$

(corps 1D \implies forces et moments linéiques). Exemple : poids propre

Efforts extérieurs



On définit les efforts extérieurs suivants :

- ❶ Force de volume dans Ω :

$$\bar{f}(s), \bar{m}(s)$$

(corps 1D \implies forces et moments linéiques). Exemple : poids propre

- ❷ Force de contour sur $\partial\Omega$:

$$\{\bar{R}_A, \bar{\Gamma}_A\} ; \{\bar{R}_B, \bar{\Gamma}_B\}$$

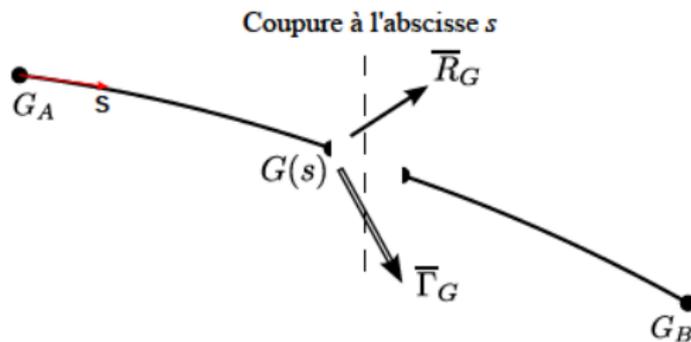
(corps 1D \implies forces et moments concentrés). Exemple : actions de contact

Efforts intérieurs

Principe de la coupure : on introduit le torseur des efforts intérieurs (torseur de cohésion)

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

Il représente l'*action* de la partie droite sur la partie gauche (le corps est orienté)

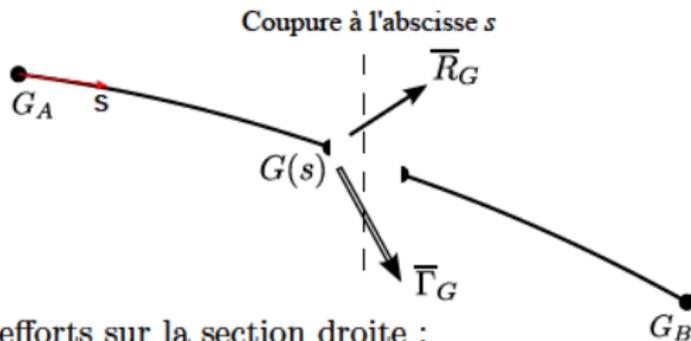


Efforts intérieurs

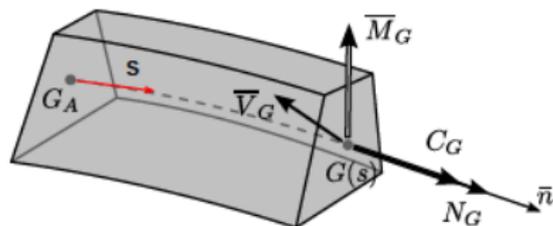
Principe de la coupure : on introduit le torseur des efforts intérieurs (torseur de cohésion)

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

Il représente l'*action* de la partie droite sur la partie gauche (le corps est orienté)



Décomposition des efforts sur la section droite :

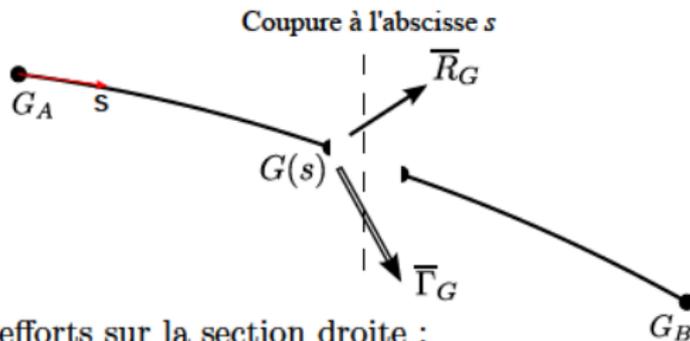


Efforts intérieurs

Principe de la coupure : on introduit le torseur des efforts intérieurs (torseur de cohésion)

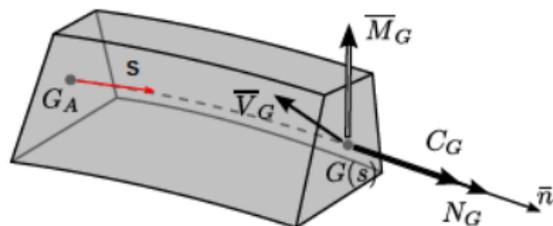
$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

Il représente l'*action* de la partie droite sur la partie gauche (le corps est orienté)



Décomposition des efforts sur la section droite :

\bar{n} : vecteur unitaire normal à la section



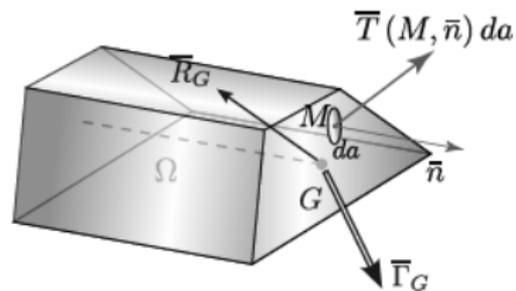
$$\begin{aligned} \bar{R}_G &= N_G \bar{n} + \bar{V}_G \\ &\text{effort normal} \quad \text{effort tranchant} \\ \bar{\Gamma}_G &= C_G \bar{n} + \bar{M}_G \\ &\text{moment de torsion} \quad \text{moment de flexion} \end{aligned}$$

Cas d'une poutre - Vecteur contrainte sur une section droite

Reprenons la modélisation des efforts intérieurs définies pour les poutres. On note

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

les éléments de réduction du torseur de cohésion et $\bar{T}(M, \bar{n})$ le vecteur contrainte en un point M sur la section droite.

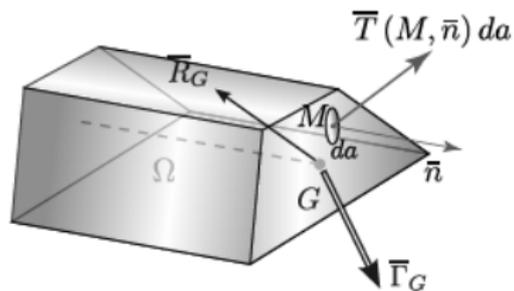


Cas d'une poutre - Vecteur contrainte sur une section droite

Reprenons la modélisation des efforts intérieurs définies pour les poutres. On note

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

les éléments de réduction du torseur de cohésion et $\bar{T}(M, \bar{n})$ le vecteur contrainte en un point M sur la section droite.



On a les relations suivantes :

$$\bar{R}_G = \int_{S_G} \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

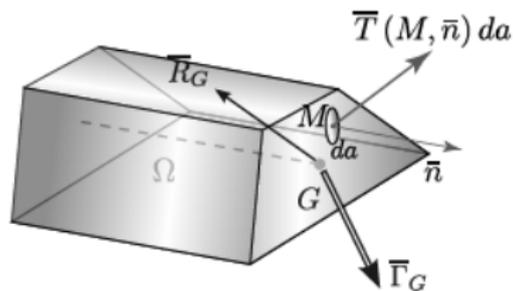
$$\bar{\Gamma}_G = \int_{S_G} \overline{GM} \wedge \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

Cas d'une poutre - Vecteur contrainte sur une section droite

Reprenons la modélisation des efforts intérieurs définies pour les poutres. On note

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

les éléments de réduction du torseur de cohésion et $\bar{T}(M, \bar{n})$ le vecteur contrainte en un point M sur la section droite.



On a les relations suivantes :

$$\bar{R}_G = \int_{S_G} \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

$$\bar{\Gamma}_G = \int_{S_G} \overline{GM} \wedge \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

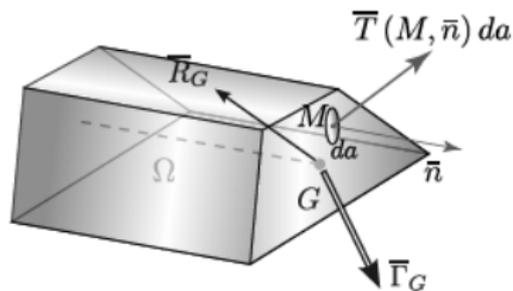
Interprétations :

Cas d'une poutre - Vecteur contrainte sur une section droite

Reprenons la modélisation des efforts intérieurs définies pour les poutres. On note

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

les éléments de réduction du torseur de cohésion et $\bar{T}(M, \bar{n})$ le vecteur contrainte en un point M sur la section droite.



On a les relations suivantes :

$$\bar{R}_G = \int_{S_G} \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

$$\bar{\Gamma}_G = \int_{S_G} \overline{GM} \wedge \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

Interprétations :

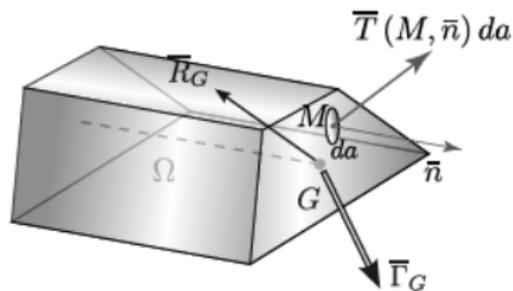
- 1 Physique : $d\bar{f} = \bar{T}(M, \bar{n}) da$ représente la force de cohésion sur l'élément de surface d'aire da et de normale \bar{n} (\bar{n} garde une direction constante).

Cas d'une poutre - Vecteur contrainte sur une section droite

Reprenons la modélisation des efforts intérieurs définies pour les poutres. On note

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

les éléments de réduction du torseur de cohésion et $\bar{T}(M, \bar{n})$ le vecteur contrainte en un point M sur la section droite.



On a les relations suivantes :

$$\bar{R}_G = \int_{S_G} \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

$$\bar{\Gamma}_G = \int_{S_G} \overline{GM} \wedge \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

Interprétations :

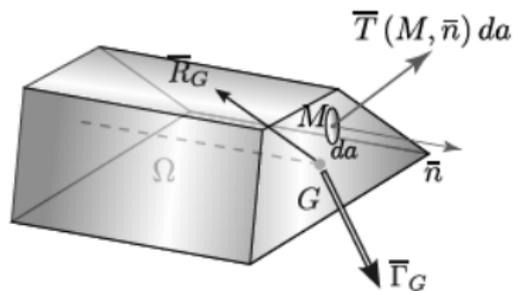
- 1 Physique : $\bar{df} = \bar{T}(M, \bar{n}) da$ représente la force de cohésion sur l'élément de surface d'aire da et de normale \bar{n} (\bar{n} garde une direction constante).
- 2 Mathématique : $\bar{T}(M, \bar{n})$ représente une densité surfacique de force.

Cas d'une poutre - Vecteur contrainte sur une section droite

Reprenons la modélisation des efforts intérieurs définies pour les poutres. On note

$$[\chi(s)] = [G(s), \bar{R}_G, \bar{\Gamma}_G]$$

les éléments de réduction du torseur de cohésion et $\bar{T}(M, \bar{n})$ le vecteur contrainte en un point M sur la section droite.



On a les relations suivantes :

$$\bar{R}_G = \int_{S_G} \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

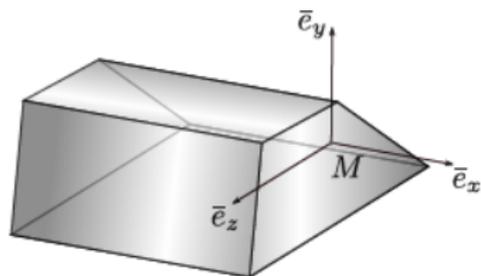
$$\bar{\Gamma}_G = \int_{S_G} \overline{GM} \wedge \bar{T}(M, \bar{n}) da$$

Interprétations :

- 1 Physique : $\bar{df} = \bar{T}(M, \bar{n}) da$ représente la force de cohésion sur l'élément de surface d'aire da et de normale \bar{n} (\bar{n} garde une direction constante).
- 2 Mathématique : $\bar{T}(M, \bar{n})$ représente une densité surfacique de force.
- 3 \bar{R}_G et $\bar{\Gamma}_G$ apparaissent comme la résultante, en G , des actions locales de liaison $\bar{df}(M)$ sur la section droite (aspect 1D).

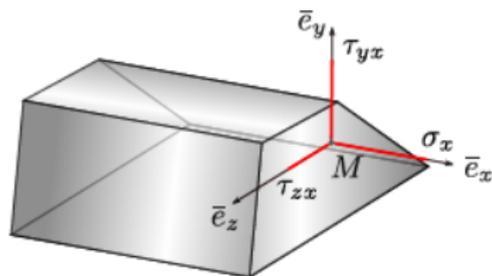
Composantes du vecteur contrainte

On note \bar{e}_x , \bar{e}_y , \bar{e}_z les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox , Oy , Oz associées à la section droite.



Composantes du vecteur contrainte

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.

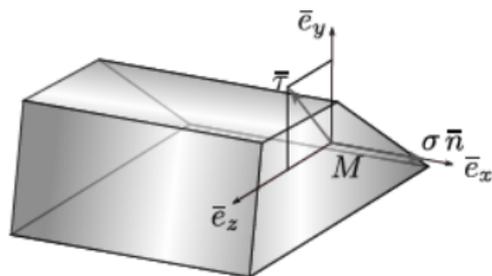


Le vecteur contrainte se décompose dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

$$\bar{T}(M, \bar{e}_x) = \sigma_x \bar{e}_x + \tau_{yx} \bar{e}_y + \tau_{zx} \bar{e}_z$$

Composantes du vecteur contrainte

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.

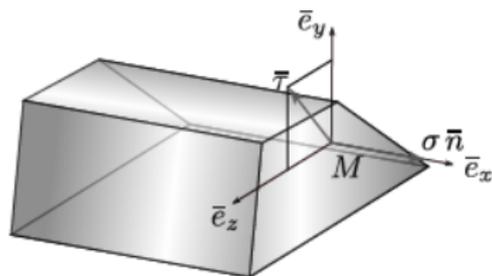


Le vecteur contrainte se décompose dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

$$\begin{aligned}\bar{T}(M, \bar{e}_x) &= \sigma_x \bar{e}_x + \tau_{yx} \bar{e}_y + \tau_{zx} \bar{e}_z \\ &= \sigma \bar{n} + \bar{\tau}\end{aligned}$$

Composantes du vecteur contrainte

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.



Le vecteur contrainte se décompose dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

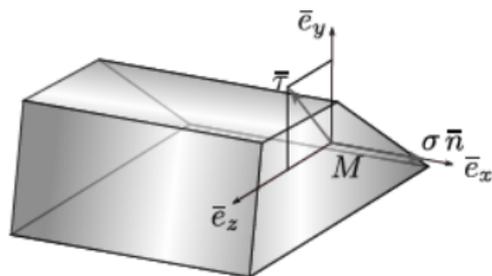
$$\begin{aligned}\bar{T}(M, \bar{e}_x) &= \sigma_x \bar{e}_x + \tau_{yx} \bar{e}_y + \tau_{zx} \bar{e}_z \\ &= \sigma \bar{n} + \bar{\tau}\end{aligned}$$

où

- $\sigma = \sigma_x$ représente la contrainte normale (contrainte de traction)

Composantes du vecteur contrainte

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.



Le vecteur contrainte se décompose dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

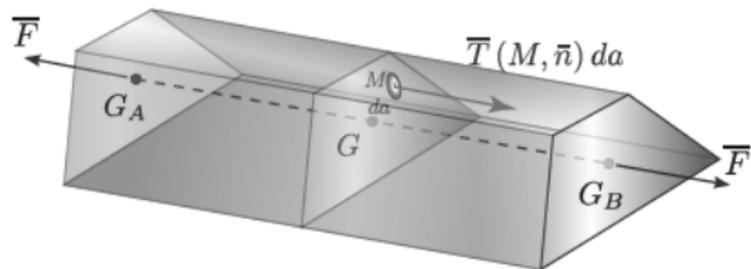
$$\begin{aligned}\bar{T}(M, \bar{e}_x) &= \sigma_x \bar{e}_x + \tau_{yx} \bar{e}_y + \tau_{zx} \bar{e}_z \\ &= \sigma \bar{n} + \bar{\tau}\end{aligned}$$

où

- $\sigma = \sigma_x$ représente la contrainte normale (contrainte de traction)
- $\bar{\tau} = \tau_{yx} \bar{e}_y + \tau_{zx} \bar{e}_z$ représente la contrainte tangentielle (contrainte de cisaillement)

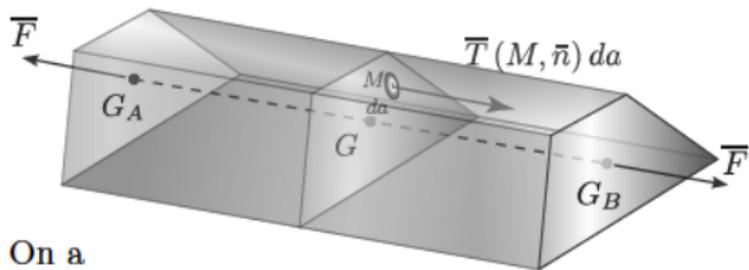
Exemple 1 - Traction simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une traction simple d'axe Ox



Exemple 1 - Traction simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une traction simple d'axe Ox

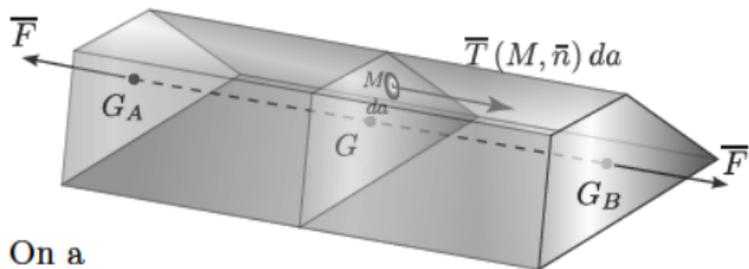


On a

$$\bar{R}_G = N \bar{e}_x = F \bar{e}_x$$

Exemple 1 - Traction simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une traction simple d'axe Ox



On a

$$\bar{R}_G = N \bar{e}_x = F \bar{e}_x$$

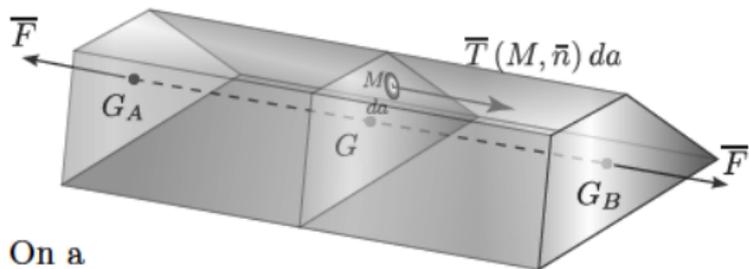
On pose alors

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \frac{N}{S} \bar{e}_x = \sigma \bar{e}_x$$

ou S désigne l'aire de la section droite.

Exemple 1 - Traction simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une traction simple d'axe Ox



$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$\bar{R}_G = N \bar{e}_x = F \bar{e}_x$$

On pose alors

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \frac{N}{S} \bar{e}_x = \sigma \bar{e}_x$$

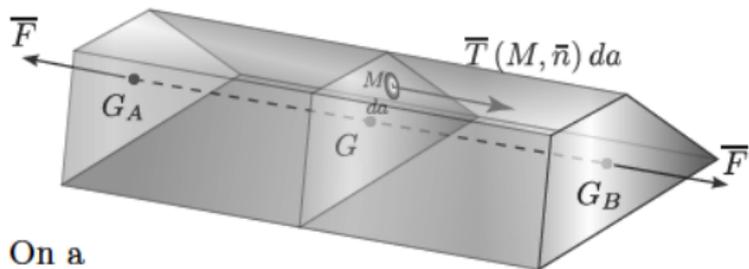
où S désigne l'aire de la section droite.

Bilan :

- 1 Le vecteur contrainte est réduit à sa composante normale $\sigma_{xx} = \sigma$

Exemple 1 - Traction simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une traction simple d'axe Ox



$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$\bar{R}_G = N \bar{e}_x = F \bar{e}_x$$

On pose alors

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \frac{N}{S} \bar{e}_x = \sigma \bar{e}_x$$

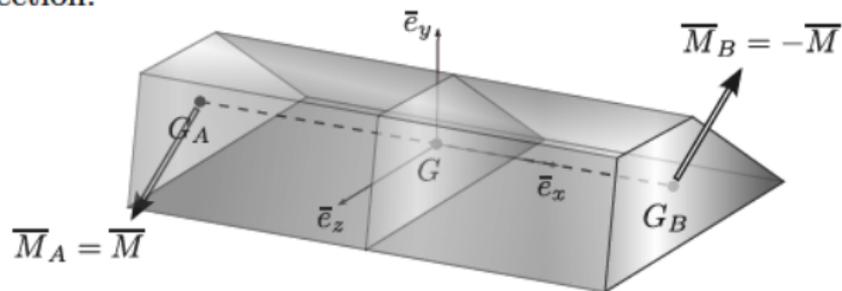
ou S désigne l'aire de la section droite.

Bilan :

- ❶ Le vecteur contrainte est réduit à sa composante normale $\sigma_{xx} = \sigma$
- ❷ La contrainte $\sigma = F/S$ est supposée uniformément répartie sur la section droite.

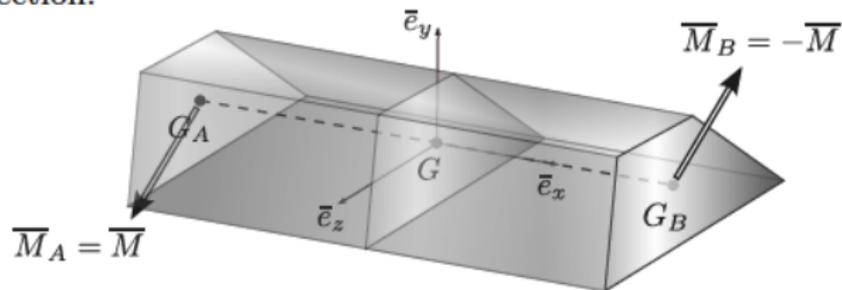
Exemple 2 - Flexion pure sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une flexion pure. On suppose que les directions Oy et Oz sont parallèles aux axes principaux de la section.



Exemple 2 - Flexion pure sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une flexion pure. On suppose que les directions Oy et Oz sont parallèles aux axes principaux de la section.

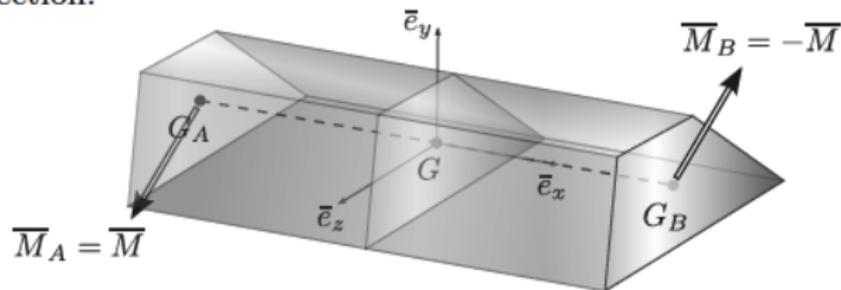


On a

$$\bar{R}_G = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}_G = \bar{M} = M_y \bar{e}_y + M_z \bar{e}_z$$

Exemple 2 - Flexion pure sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par une flexion pure. On suppose que les directions Oy et Oz sont parallèles aux axes principaux de la section.



$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$\bar{R}_G = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}_G = \bar{M} = M_y \bar{e}_y + M_z \bar{e}_z$$

On montre avec les hypothèses classique de la RdS (bernoulli) que

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_x(M) \bar{e}_x$$

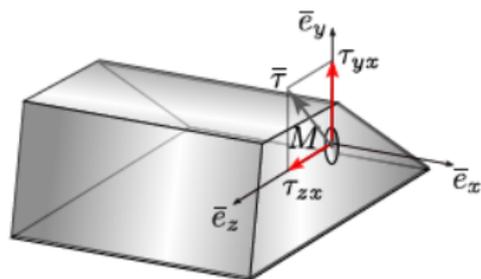
avec

$$\sigma_x(M) = \frac{M_y}{I_{Gy}} z - \frac{M_z}{I_{Gz}} y$$

où y, z sont les coordonnées du point M dans le repère (G, x, y, z)

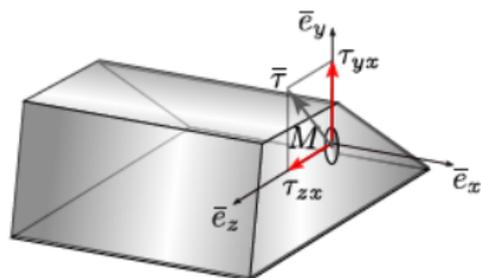
Exemple 3 - Cisaillement simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par un cisaillement simple.



Exemple 3 - Cisaillement simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par un cisaillement simple.

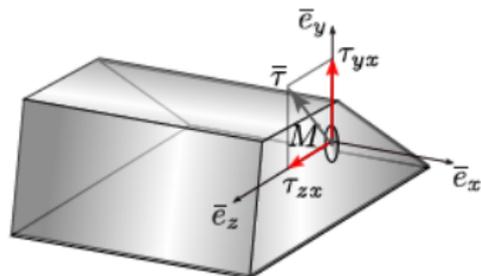


On a

$$\bar{R}_G = \bar{V} = V_y \bar{e}_y + V_z \bar{e}_z$$

Exemple 3 - Cisaillement simple sur une poutre droite

Cas particulier d'un état de contrainte dans une poutre généré par un cisaillement simple.



$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & ? & ? \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$\bar{R}_G = \bar{V} = V_y \bar{e}_y + V_z \bar{e}_z$$

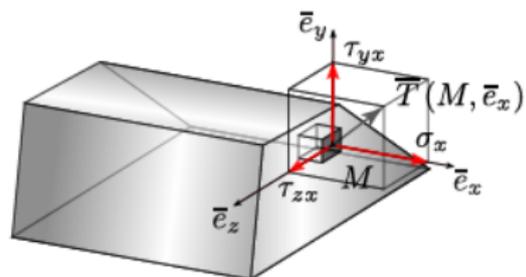
D'où le vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\tau} = \tau_{yx} \bar{e}_y + \tau_{zx} \bar{e}_z$$

Forme particulière du tenseur des contraintes pour les poutres

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.

Par raison de symétrie le tenseur des contraintes s'écrit dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

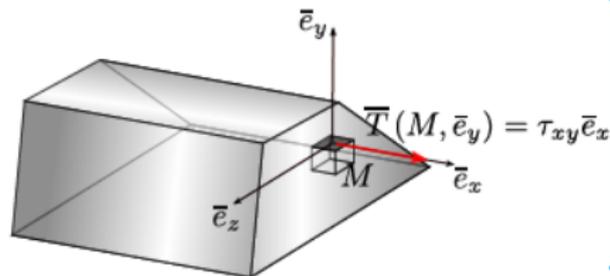


$$\begin{matrix} \bar{T}(M, \bar{e}_x) & \bar{T}(M, \bar{e}_y) & \bar{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Forme particulière du tenseur des contraintes pour les poutres

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.

Par raison de symétrie le tenseur des contraintes s'écrit dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

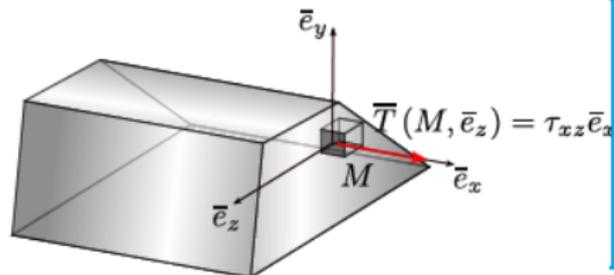


$$\begin{array}{ccc} \bar{T}(M, \bar{e}_x) & \bar{T}(M, \bar{e}_y) & \bar{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Forme particulière du tenseur des contraintes pour les poutres

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.

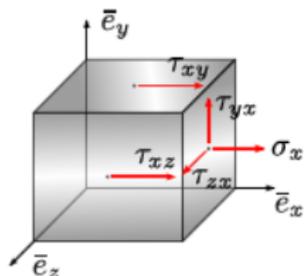
Par raison de symétrie le tenseur des contraintes s'écrit dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$



$$\begin{array}{ccc} \bar{T}(M, \bar{e}_x) & \bar{T}(M, \bar{e}_y) & \bar{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Forme particulière du tenseur des contraintes pour les poutres

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.



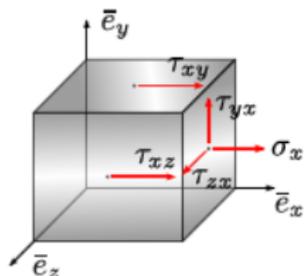
Par raison de symétrie le tenseur des contraintes s'écrit dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

$$\begin{matrix} \bar{T}(M, \bar{e}_x) & \bar{T}(M, \bar{e}_y) & \bar{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

La symétrie de $\bar{\sigma}$ impose donc l'existence de contraintes de cisaillement :

Forme particulière du tenseur des contraintes pour les poutres

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.



Par raison de symétrie le tenseur des contraintes s'écrit dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

$$\begin{matrix} \bar{T}(M, \bar{e}_x) & \bar{T}(M, \bar{e}_y) & \bar{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

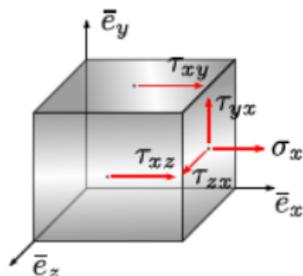
La symétrie de $\bar{\sigma}$ impose donc l'existence de contraintes de cisaillement :

- sur la facette de normale \bar{e}_y :

$$\bar{T}(M, \bar{e}_y) = \tau_{xy} \bar{e}_x$$

Forme particulière du tenseur des contraintes pour les poutres

On note $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ les vecteurs unitaires construits sur les directions Ox, Oy, Oz associées à la section droite.



Par raison de symétrie le tenseur des contraintes s'écrit dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$

$$\begin{matrix} \bar{T}(M, \bar{e}_x) & \bar{T}(M, \bar{e}_y) & \bar{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

La symétrie de $\bar{\sigma}$ impose donc l'existence de contraintes de cisaillement :

- sur la facette de normale \bar{e}_y :

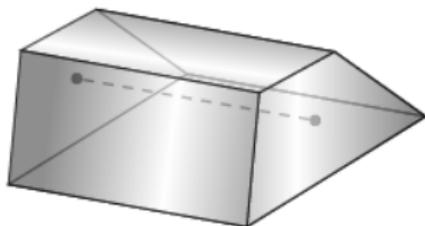
$$\bar{T}(M, \bar{e}_y) = \tau_{xy} \bar{e}_x$$

- sur la facette de normale \bar{e}_z :

$$\bar{T}(M, \bar{e}_z) = \tau_{xz} \bar{e}_x$$

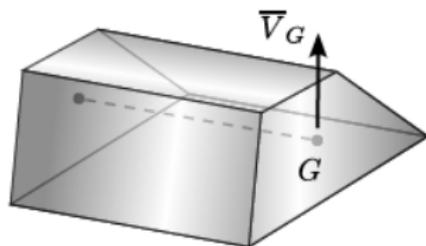
Application au cisaillement dans une poutre

Examinons le cas d'une poutre



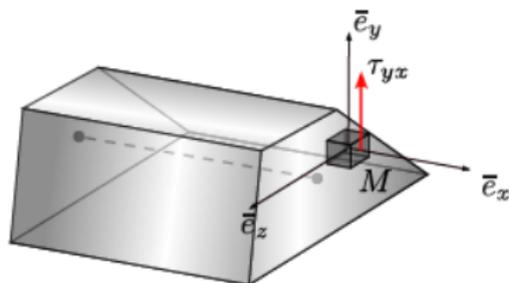
Application au cisaillement dans une poutre

Examinons le cas d'une poutre soumise à un effort tranchant \overline{V}_G :



Application au cisaillement dans une poutre

Examinons le cas d'une poutre soumise à un effort tranchant \overline{V}_G :

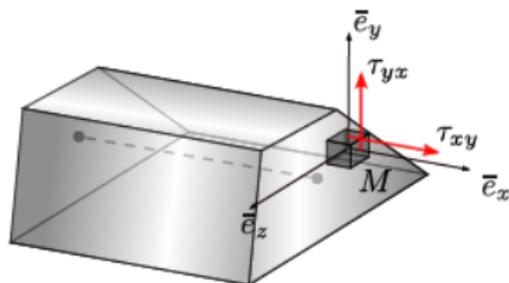


- 1 Cet effort tranchant se traduit localement (au point M) par l'existence d'une contrainte de cisaillement sur la section droite

$$\tau_{yx}$$

Application au cisaillement dans une poutre

Examinons le cas d'une poutre soumise à un effort tranchant \overline{V}_G :



- 1 Cet effort tranchant se traduit localement (au point M) par l'existence d'une contrainte de cisaillement sur la section droite

$$\tau_{yx}$$

- 2 La propriété de symétrie du tenseur des contraintes nous assure de l'existence d'une contrainte tangentielle réciproque

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

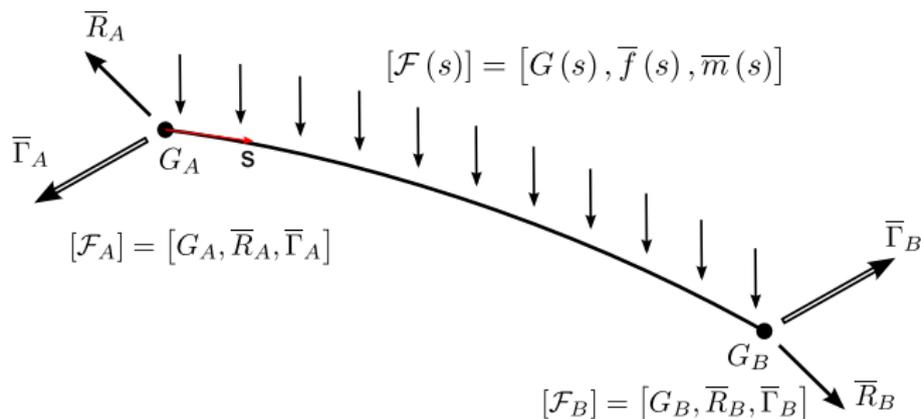
Équations d'équilibre dans une poutre

Question : Étant donnés les efforts extérieurs

$$[\mathcal{F}_A], [\mathcal{F}_B], [\mathcal{F}(s)]$$

peut-on déterminer les efforts intérieurs

$$[\chi(s)] \quad \text{pour tout } s \in [0, l]$$



La réponse est construite en 3 étapes.

Étape 1 : Vérification de l'équilibre globale de la structure $[\mathcal{F}_e] = 0$

Étape 1 : Vérification de l'équilibre globale de la structure $[\mathcal{F}_e] = 0$

Soit

$$\sum \overline{Forces} = 0 \quad \iff \quad \bar{R}_A + \bar{R}_B + \int_0^l \bar{f}(s) = 0$$

Étape 1 : Vérification de l'équilibre globale de la structure $[\mathcal{F}_e] = 0$

Soit

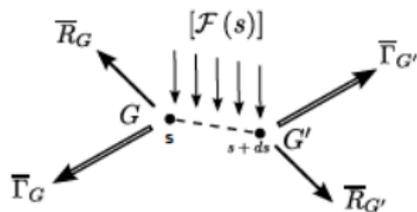
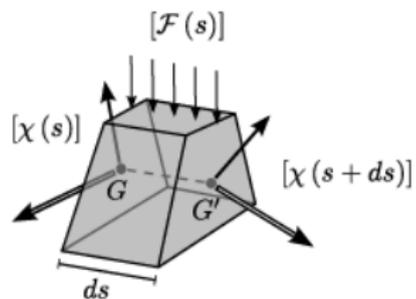
$$\sum \overline{Forces} = 0 \iff \bar{R}_A + \bar{R}_B + \int_0^l \bar{f}(s) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum \overline{Moments} = 0 \iff & \bar{\Gamma}_A + \bar{\Gamma}_B + \int_0^l \bar{m}_G(s) ds \\ & + \int_0^l \overline{OG}(s) \wedge \bar{f}(s) ds \\ & + \overline{OA} \wedge \bar{R}_A + \overline{OB} \wedge \bar{R}_B = 0 \end{aligned}$$

Étape 2 : Formulation de l'équation d'équilibre

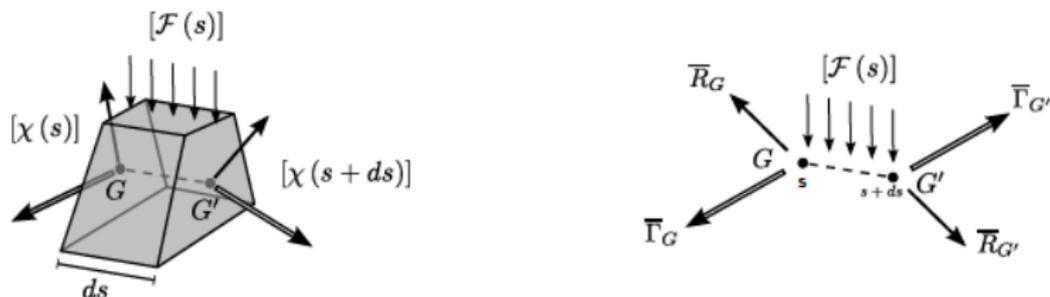
Étape 2 : Formulation de l'équation d'équilibre

- On applique le principe de la coupure pour introduire les efforts intérieurs.



Étape 2 : Formulation de l'équation d'équilibre

- On applique le principe de la coupure pour introduire les efforts intérieurs.



- On écrit une équation différentielle en exprimant l'équilibre statique d'un élément de volume (tranche de longueur élémentaire ds).

Principe fondamentale de la statique :

$$[\chi(s+ds)] - [\chi(s)] + \int_0^{ds} [\mathcal{F}(s+\tau)] d\tau = 0$$

A l'ordre 1, l'élément de volume est suffisamment petit pour que l'on considère $[\mathcal{F}(s)]$ constant entre G et G' :

$$\int_0^{ds} [\mathcal{F}(s + \tau)] d\tau \approx [\mathcal{F}(s)] ds \quad (\text{vrai à l'ordre 1})$$

d'où

$$[\chi(s + ds)] - [\chi(s)] + [\mathcal{F}(s)] ds = 0$$

A l'ordre 1, l'élément de volume est suffisamment petit pour que l'on considère $[\mathcal{F}(s)]$ constant entre G et G' :

$$\int_0^{ds} [\mathcal{F}(s + \tau)] d\tau \approx [\mathcal{F}(s)] ds \quad (\text{vrai à l'ordre 1})$$

d'où

$$[\chi(s + ds)] - [\chi(s)] + [\mathcal{F}(s)] ds = 0$$

Par passage à la limite on obtient :

$$\frac{d}{ds} [\chi(s)] + [\mathcal{F}(s)] = 0 \iff \begin{cases} \frac{d\bar{R}}{ds}(s) + \bar{f}(s) = 0 \\ \frac{d\bar{\Gamma}}{ds}(s) + \bar{n} \wedge \bar{R}(s) + \bar{m}(s) = 0 \end{cases}$$

Étape 3 : Résolution du problème d'équilibre

Étape 3 : Résolution du problème d'équilibre

- 1 On intègre les équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{R}}{ds}(s) + \bar{f}(s) = 0 \\ \frac{d\bar{\Gamma}}{ds}(s) + \bar{n} \wedge \bar{R}(s) + \bar{m}(s) = 0 \end{array} \right.$$

Étape 3 : Résolution du problème d'équilibre

- ① On intègre les équations différentielles

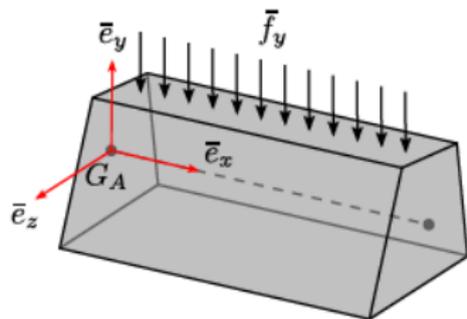
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{R}}{ds}(s) + \bar{f}(s) = 0 \\ \frac{d\bar{\Gamma}}{ds}(s) + \bar{n} \wedge \bar{R}(s) + \bar{m}(s) = 0 \end{array} \right.$$

- ② On détermine les constantes d'intégration en utilisant les conditions limites.

Conditions limites : valeurs du torseur $[\chi(s)]$ sur le contour $\partial\Omega$ de Ω

- ▶ pour $s = 0$, $[\chi(s)] = [\mathcal{F}_A]$
- ▶ pour $s = l$, $[\chi(s)] = [\mathcal{F}_B]$

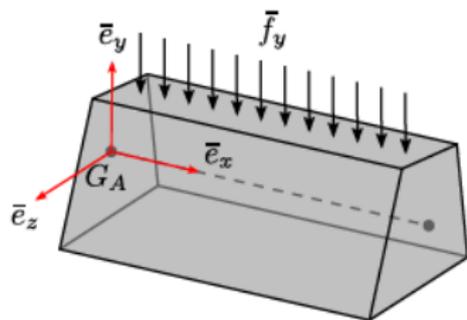
Exemple classique d'une poutre droite dans un repère cartésien (*i.e.* $s = x$)



Chargement extérieur :

$$[f(x)] = [G(x), \bar{f}(x), \bar{m}(x)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{f}(x) = f_y \bar{e}_y \\ \bar{m}(x) = 0 \end{cases}$$

Exemple classique d'une poutre droite dans un repère cartésien (*i.e.* $s = x$)



Chargement extérieur :

$$[f(x)] = [G(x), \bar{f}(x), \bar{m}(x)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{f}(x) = f_y \bar{e}_y \\ \bar{m}(x) = 0 \end{cases}$$

Torseur des efforts intérieurs :

$$[\chi(x)] = [G(x), \bar{R}, \bar{\Gamma}] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{R} = N \bar{e}_x + \bar{V} \\ \bar{\Gamma} = C \bar{e}_x + \bar{M} \end{cases}$$

Équations d'équilibre correspondantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = 0; \quad \frac{dV_y}{dx} = f_y; \quad \frac{dV_z}{dx} = 0 \\ \frac{dC}{dx} = 0; \quad \frac{dM_y}{dx} - V_z = 0 \quad \frac{dM_z}{dx} + V_y = 0 \end{array} \right.$$

Équations d'équilibre correspondantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = 0; \quad \frac{dV_y}{dx} = f_y; \quad \frac{dV_z}{dx} = 0 \\ \frac{dC}{dx} = 0; \quad \frac{dM_y}{dx} - V_z = 0 \quad \frac{dM_z}{dx} + V_y = 0 \end{array} \right.$$

Remarques :

- 1 La notion de torseur de cohésion donne une information globale sur l'ensemble de la section droite.

Équations d'équilibre correspondantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = 0; \quad \frac{dV_y}{dx} = f_y; \quad \frac{dV_z}{dx} = 0 \\ \frac{dC}{dx} = 0; \quad \frac{dM_y}{dx} - V_z = 0 \quad \frac{dM_z}{dx} + V_y = 0 \end{array} \right.$$

Remarques :

- ❶ La notion de torseur de cohésion donne une information globale sur l'ensemble de la section droite.
- ❷ En mécanique des milieux continus (MMC) on se situe à l'échelle d'une particule (échelle *mésoscopique**). Les efforts intérieurs sont représentés par la notion de *contrainte*.

* L'échelle *mésoscopique* est une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique, qui caractérise les atomes ou les molécules, et l'échelle macroscopique de notre monde quotidien.

Chapitre II - Étude des contraintes

Objectifs :

1. Étudier les propriétés du tenseur des contraintes
2. Représentation de Mohr
3. Préciser le cas particulier des contraintes planes
4. Donner les principaux critères limites d'élasticité

Sommaire

- 1 Directions et contraintes principales
- 2 Représentation de Mohr
- 3 États de contraintes remarquables
- 4 Élasticité plane
- 5 Critères limites d'élasticité

Plan du chapitre

- 1 Directions et contraintes principales
- 2 Représentation de Mohr
- 3 États de contraintes remarquables
- 4 Élasticité plane
- 5 Critères limites d'élasticité

Changement de repère

On considère un milieu continu Ω et on s'intéresse aux propriétés du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ en un point M quelconque de Ω

Soit $[\sigma_{ij}]$ le matrice des composantes du tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ dans la base (\bar{e}_i) .

Changement de repère

On considère un milieu continu Ω et on s'intéresse aux propriétés du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ en un point M quelconque de Ω

Soit $[\sigma_{ij}]$ le matrice des composantes du tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ dans la base (\bar{e}_i) .

On considère une deuxième base (\bar{e}'_i) pour laquelle on connaît la matrice de passage $[R] = [\alpha_{ij}]$ de $(\bar{e}_i) \rightarrow (\bar{e}'_i)$.

$$\bar{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \bar{e}_j \quad \text{avec } \alpha_{ij} = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}_j \quad (13)$$

la matrice $[R]$ est appelée la matrice des cosinus directeur.

Changement de repère

On considère un milieu continu Ω et on s'intéresse aux propriétés du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ en un point M quelconque de Ω

Soit $[\sigma_{ij}]$ le matrice des composantes du tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ dans la base (\bar{e}_i) .

On considère une deuxième base (\bar{e}'_i) pour laquelle on connaît la matrice de passage $[R] = [\alpha_{ij}]$ de $(\bar{e}_i) \rightarrow (\bar{e}'_i)$.

$$\bar{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \bar{e}_j \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}_j \quad (13)$$

la matrice $[R]$ est appelée la matrice des cosinus directeur.

Remarque : la matrice $[R]$ est orthogonale (matrice de rotation), c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$[R]^{-1} = {}^t[R]$$

Changement de repère

On considère un milieu continu Ω et on s'intéresse aux propriétés du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ en un point M quelconque de Ω

Soit $[\sigma_{ij}]$ le matrice des composantes du tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ dans la base (\bar{e}_i) .

On considère une deuxième base (\bar{e}'_i) pour laquelle on connaît la matrice de passage $[R] = [\alpha_{ij}]$ de $(\bar{e}_i) \rightarrow (\bar{e}'_i)$.

$$\bar{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \bar{e}_j \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}_j \quad (13)$$

la matrice $[R]$ est appelée la matrice des cosinus directeur.

Remarque : la matrice $[R]$ est orthogonale (matrice de rotation), c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$[R]^{-1} = {}^t[R]$$

Problème : Quelles sont les composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$ dans la base (\bar{e}'_i) ?

Changement de repère

On considère un milieu continu Ω et on s'intéresse aux propriétés du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}(M)$ en un point M quelconque de Ω

Soit $[\sigma_{ij}]$ le matrice des composantes du tenseur $\bar{\sigma}$ dans la base (\bar{e}_i) .

On considère une deuxième base (\bar{e}'_i) pour laquelle on connaît la matrice de passage $[R] = [\alpha_{ij}]$ de $(\bar{e}_i) \rightarrow (\bar{e}'_i)$.

$$\bar{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \bar{e}_j \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}_j \quad (13)$$

la matrice $[R]$ est appelée la matrice des cosinus directeur.

Remarque : la matrice $[R]$ est orthogonale (matrice de rotation), c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$[R]^{-1} = {}^t[R]$$

Problème : Quelles sont les composantes de $\bar{\sigma}$ dans la base (\bar{e}'_i) ?

Réponse : les composantes de $\bar{\sigma}$ sont données par la matrice

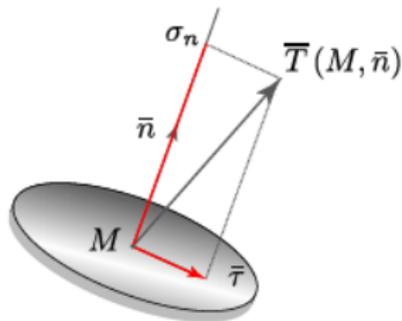
$$[\sigma'] = [R] [\sigma] {}^t[R] \quad (14)$$

Problématique

Soit

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

le vecteur contrainte point M sur une facette quelconque de normale \bar{n} .



Problématique

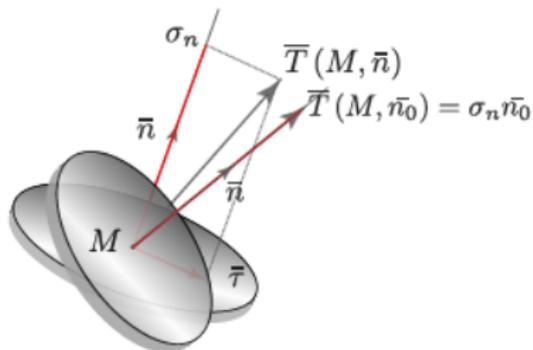
Soit

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

le vecteur contrainte point M sur une facette quelconque de normale \bar{n} .

Question :

Existe-t-il, en ce point, une direction particulière \bar{n}_0 telle que le vecteur contrainte sur cette facette soit colinéaire avec \bar{n} , autrement dit telle que la composante tangentielle soit nulle ?

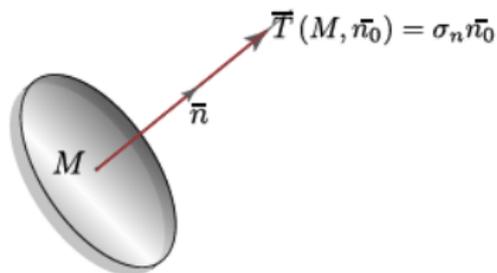


Problématique

Soit

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

le vecteur contrainte point M sur une facette quelconque de normale \bar{n} .



Question :

Existe-t-il, en ce point, une direction particulière \bar{n}_0 telle que le vecteur contrainte sur cette facette soit colinéaire avec \bar{n} , autrement dit telle que la composante tangentielle soit nulle ?

Éléments de réponse :

On cherche la direction \bar{n}_0 telle que

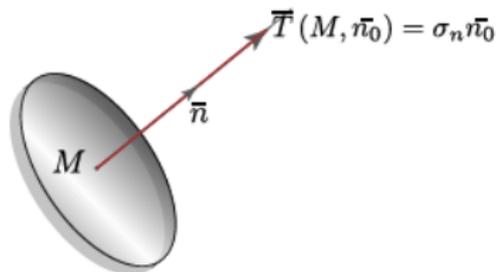
$$\bar{T}(M, \bar{n}_0) = \sigma_n \bar{n}_0$$

Problématique

Soit

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

le vecteur contrainte point M sur une facette quelconque de normale \bar{n} .



Question :

Existe-t-il, en ce point, une direction particulière \bar{n}_0 telle que le vecteur contrainte sur cette facette soit colinéaire avec \bar{n} , autrement dit telle que la composante tangentielle soit nulle ?

Éléments de réponse :

On cherche la direction \bar{n}_0 telle que

$$\bar{T}(M, \bar{n}_0) = \sigma_n \bar{n}_0$$

La formule de Cauchy permet d'écrire

$$\bar{\sigma}(M) \bar{n}_0 = \sigma_n \bar{n}_0$$

Alors \bar{n}_0 est une direction propre de $\bar{\sigma}$ associée à la valeur propre σ_n

Résultat d'algèbre

Propriété

Le tenseur de Cauchy $\bar{\sigma}$ étant symétrique, Il possède 3 valeurs propres réelles (distinctes ou confondues) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et 3 directions propres Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Il est donc toujours possible de définir une base orthonormée propres $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ construit sur les directions propres Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Résultat d'algèbre

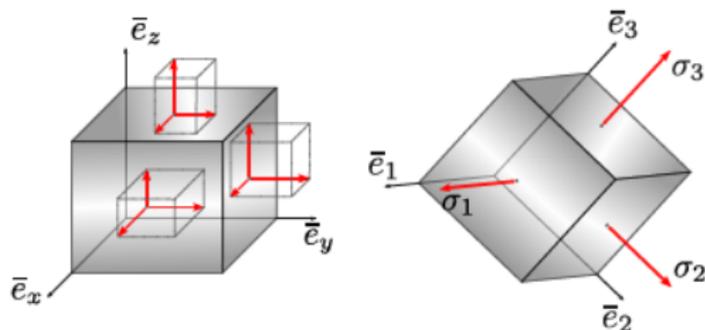
Propriété

Le tenseur de Cauchy $\bar{\sigma}$ étant symétrique, Il possède 3 valeurs propres réelles (distinctes ou confondues) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et 3 directions propres Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Il est donc toujours possible de définir une base orthonormée propres $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ construit sur les directions propres Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Définition

- 1 Les contraintes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont appelées les **contraintes principales**.
- 2 Les directions propres sont les **directions principales** (des contraintes).



Remarques

- 1 Sur chacune des facettes orientées selon une direction principale, le vecteur contrainte vaut

$$\overline{T}(M, \bar{e}_i) = \sigma_i \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Autrement dit, $\overline{T}(M, \bar{e}_i)$ est purement normal (pas de cisaillement) et sa norme est égale à la contrainte principale associée σ_i .

Remarques

- 1 Sur chacune des facettes orientées selon une direction principale, le vecteur contrainte vaut

$$\overline{T}(M, \bar{e}_i) = \sigma_i \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Autrement dit, $\overline{T}(M, \bar{e}_i)$ est purement normal (pas de cisaillement) et sa norme est égale à la contrainte principale associée σ_i .

- 2 Les 6 composantes indépendantes du tenseur (6 ddl) correspondent à :
 - ▶ 3 paramètres d'orientation (les directions principales)
 - ▶ 3 paramètres d'intensité (les contraintes principales)

Calcul des contraintes principales

Dans la base (\bar{e}_i) orientée selon les directions principales, les composantes de $\bar{\sigma}$ forment une matrice diagonale :

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Calcul des contraintes principales

Dans la base (\bar{e}_i) orientée selon les directions principales, les composantes de $\bar{\sigma}$ forment une matrice diagonale :

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det([\sigma] - \lambda[I]) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 sont les invariants principaux de $[\sigma]$

$$I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}([\sigma]^2)]$$

$$I_3 = \det[\sigma]$$

Plan du chapitre

- 1 Directions et contraintes principales
- 2 Représentation de Mohr**
- 3 États de contraintes remarquables
- 4 Élasticité plane
- 5 Critères limites d'élasticité

Plan de Mohr

On se place en un point M fixe de Ω et on suppose que l'on connaît $\bar{\sigma}(M)$ par ses composantes σ_{ij} dans une base quelconque.

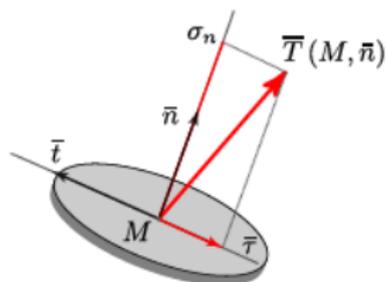
Dans la représentation de Mohr on s'intéresse fondamentalement aux composantes du vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

lorsque la facette tourne autour de M .

On peut définir dans le plan $(\bar{n}, \bar{T}(M, \bar{n}))$ un vecteur unitaire \bar{t} orthogonal à \bar{n} ; son orientation est arbitraire.

Représentation de la facette dans l'espace



Plan de Mohr

On se place en un point M fixe de Ω et on suppose que l'on connaît $\bar{\sigma}(M)$ par ses composantes σ_{ij} dans une base quelconque.

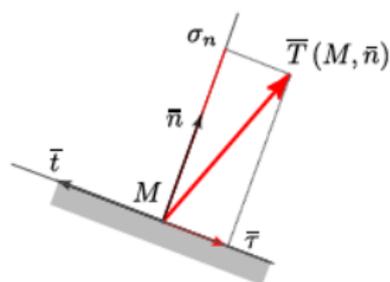
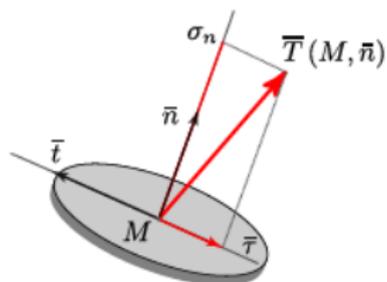
Dans la représentation de Mohr on s'intéresse fondamentalement aux composantes du vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

lorsque la facette tourne autour de M .

On peut définir dans le plan $(\bar{n}, \bar{T}(M, \bar{n}))$ un vecteur unitaire \bar{t} orthogonal à \bar{n} ; son orientation est arbitraire.

Représentation de la facette dans l'espace Représentation dans le plan (M, \bar{n}, \bar{t})



Remarque : Le plan (M, \bar{n}, \bar{t}) est attaché à la facette, il bouge lorsque la facette tourne.

L'orientation de l'axe $M\tau$ étant choisie on peut définir le scalaire $\tau = \overline{M\tau}$ tel que

$$\bar{\tau} = \tau \bar{t}$$

Pour chaque orientation de la facette, on peut donc déterminer les composantes σ, τ de $\overline{T}(\bar{n})$ dans le repère de la facette :

$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}$$

L'orientation de l'axe $M\tau$ étant choisie on peut définir le scalaire $\tau = \overline{M\tau}$ tel que

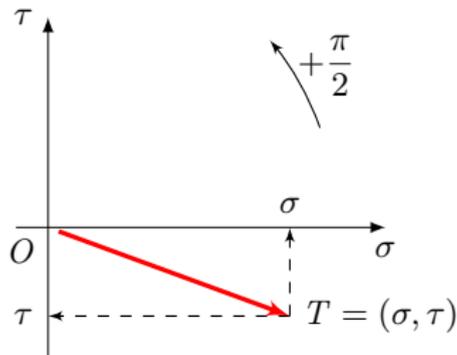
$$\bar{\tau} = \tau \bar{t}$$

Pour chaque orientation de la facette, on peut donc déterminer les composantes σ, τ de $\overline{T}(\bar{n})$ dans le repère de la facette :

$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}$$

Définition

La représentation de Mohr consiste à tracer l'extrémité du vecteur contrainte $\overline{T}(\bar{n})$ dans un plan virtuel auxiliaire, lié à la facette, et défini par les axes orthogonaux $O\sigma$ et $O\tau$ tels que $(\overline{O\sigma}, \overline{O\tau}) = +\pi/2$. Ce plan est appelé le **plan de Mohr**.



L'orientation de l'axe $M\tau$ étant choisie on peut définir le scalaire $\tau = \overline{M\tau}$ tel que

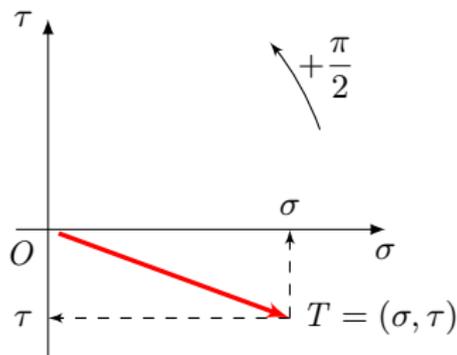
$$\bar{\tau} = \tau \bar{t}$$

Pour chaque orientation de la facette, on peut donc déterminer les composantes σ, τ de $\overline{T}(\bar{n})$ dans le repère de la facette :

$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}$$

Définition

La représentation de Mohr consiste à tracer l'extrémité du vecteur contrainte $\overline{T}(\bar{n})$ dans un plan virtuel auxiliaire, lié à la facette, et défini par les axes orthogonaux $O\sigma$ et $O\tau$ tels que $(\overline{O\sigma}, \overline{O\tau}) = +\pi/2$. Ce plan est appelé le **plan de Mohr**.



Pour chaque vecteur $\overline{T}(\bar{n})$ on reporte les composantes (σ, τ) dans le plan de Mohr.

Le point

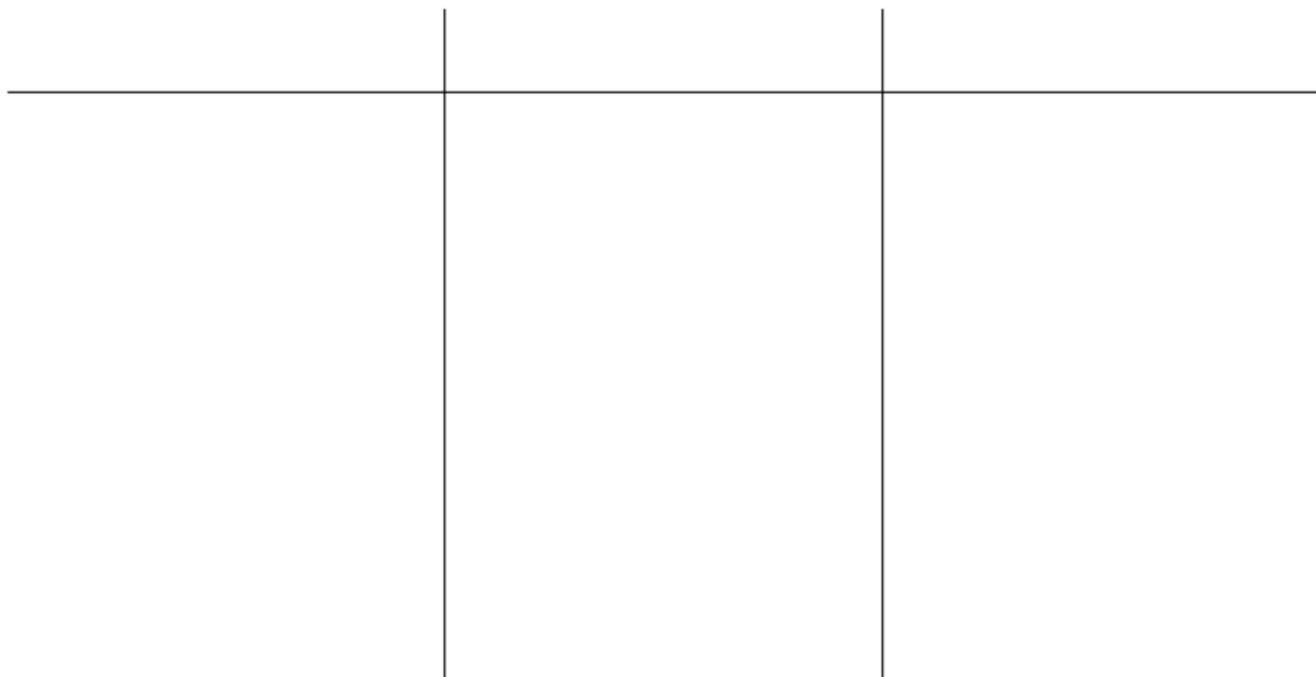
$$T = (\sigma, \tau)$$

représente dans le plan l'extrémité du vecteur contrainte $\overline{T}(\bar{n})$.

Différentes représentations du vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

lorsque la facette tourne autour de M

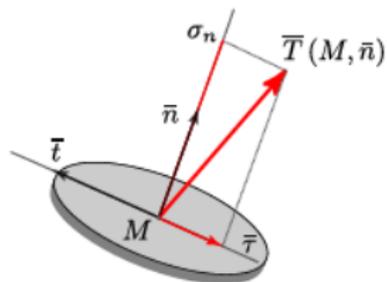


Différentes représentations du vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

lorsque la facette tourne autour de M

Représentation de la
facette dans l'espace

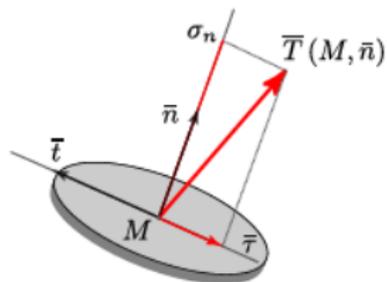


Différentes représentations du vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

lorsque la facette tourne autour de M

Représentation de la
facette dans l'espace



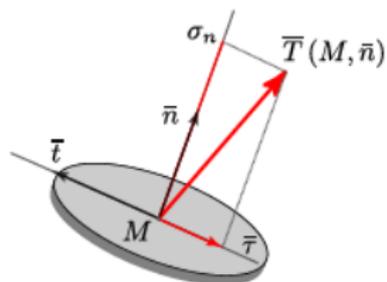
On définit dans le plan
($\bar{n}, \bar{T}(M, \bar{n})$) le vecteur
unitaire \bar{t} orthogonal à \bar{n}

Différentes représentations du vecteur contrainte

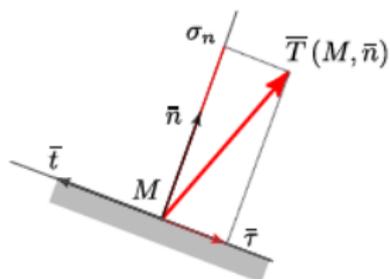
$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

lorsque la facette tourne autour de M

Représentation de la
facette dans l'espace



Représentation dans le
plan (\bar{n}, \bar{t})



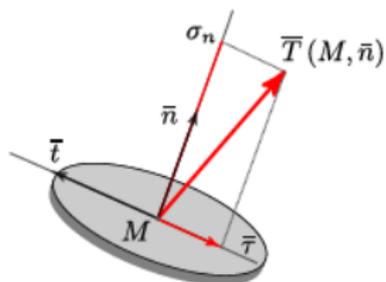
On définit dans le plan
 $(\bar{n}, \bar{T}(M, \bar{n}))$ le vecteur
unitaire \bar{t} orthogonal à \bar{n}

Différentes représentations du vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

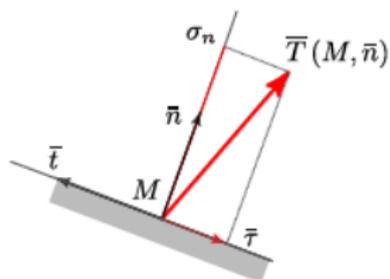
lorsque la facette tourne autour de M

Représentation de la
facette dans l'espace



On définit dans le plan
($\bar{n}, \bar{T}(M, \bar{n})$) le vecteur
unitaire \bar{t} orthogonal à \bar{n}

Représentation dans le
plan (\bar{n}, \bar{t})



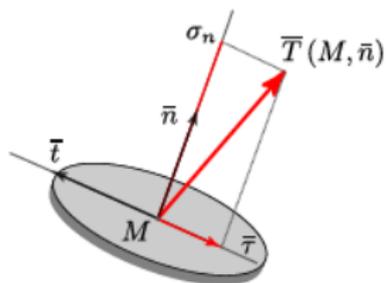
On choisit l'orientation du
vecteur \bar{t} de sorte de
pouvoir définir $\bar{\tau} = \tau \bar{t}$

Différentes représentations du vecteur contrainte

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}$$

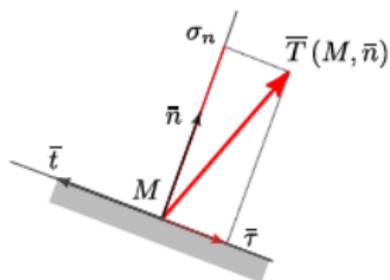
lorsque la facette tourne autour de M

Représentation de la
facette dans l'espace



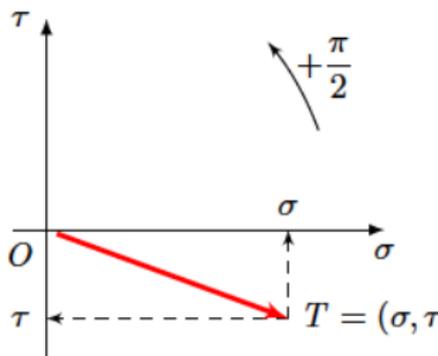
On définit dans le plan
($\bar{n}, \bar{T}(M, \bar{n})$) le vecteur
unitaire \bar{t} orthogonal à \bar{n}

Représentation dans le
plan (\bar{n}, \bar{t})



On choisit l'orientation du
vecteur \bar{t} de sorte de
pouvoir définir $\bar{\tau} = \tau \bar{t}$

Plan de Mohr ($\overline{O\sigma}, \overline{O\tau}$)



Pour chaque orientation
de \bar{n} on place le point
 $T = (\sigma, \tau)$ dans le plan
de Mohr.

Cercles de Mohr

Objectif : On cherche à tracer, dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte lorsque \bar{n} varie (*i.e.* lorsque la facette tourne autour de M).

Cercles de Mohr

Objectif : On cherche à tracer, dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte lorsque \bar{n} varie (*i.e.* lorsque la facette tourne autour de M).

Principe : Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ ne dépendant pas de l'orientation de la facette, on va chercher à exprimer σ, τ en fonction des composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère principal.

Cercles de Mohr

Objectif : On cherche à tracer, dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte lorsque \bar{n} varie (*i.e.* lorsque la facette tourne autour de M).

Principe : Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ ne dépendant pas de l'orientation de la facette, on va chercher à exprimer σ, τ en fonction des composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère principal.

Étape 1 - On se place dans le repère $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ dirigé suivant les directions principales de $\bar{\sigma}$:

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} =$$

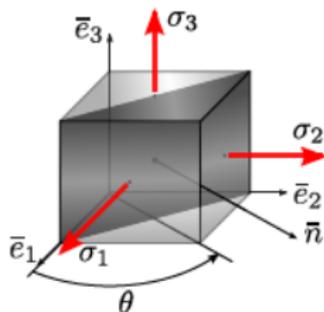
Cercles de Mohr

Objectif : On cherche à tracer, dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte lorsque \bar{n} varie (*i.e.* lorsque la facette tourne autour de M).

Principe : Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ ne dépendant pas de l'orientation de la facette, on va chercher à exprimer σ, τ en fonction des composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère principal.

Étape 1 - On se place dans le repère $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ dirigé suivant les directions principales de $\bar{\sigma}$:

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



Cercles de Mohr

Objectif : On cherche à tracer, dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte lorsque \bar{n} varie (*i.e.* lorsque la facette tourne autour de M).

Principe : Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ ne dépendant pas de l'orientation de la facette, on va chercher à exprimer σ, τ en fonction des composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère principal.

Étape 1 - On se place dans le repère $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ dirigé suivant les directions principales de $\bar{\sigma}$:

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

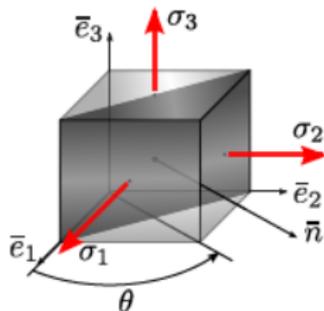
Dans un premier temps, on se limite aux facettes parallèles à la direction Ox_3 :

\bar{n} appartient au plan (Mx_1x_2) .

Cela correspond aux rotations de la facette autour de l'axe Mx_3 .

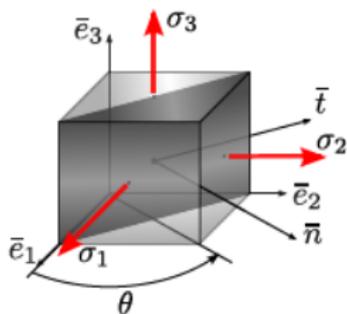
On note θ l'angle entre \bar{e}_1 et \bar{n} :

$$\theta = (\bar{e}_1, \bar{n})$$



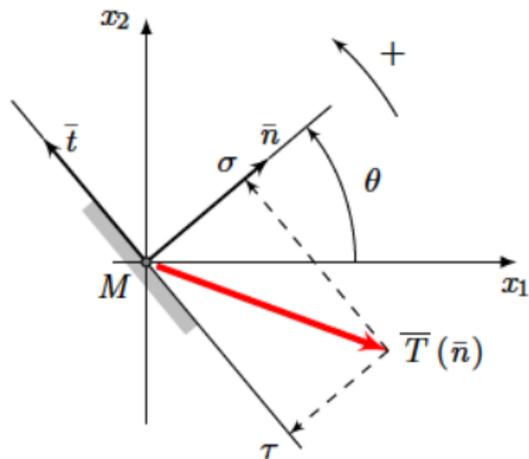
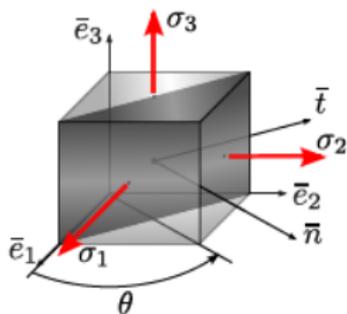
Étape 2 - On oriente le vecteur \bar{t} (vecteur unitaire dans le plan $(\overline{T}(\bar{n}), \bar{n})$, normal à \bar{n}) de tel sorte que

le trièdre $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_3)$ soit direct



Étape 2 - On oriente le vecteur \bar{t} (vecteur unitaire dans le plan $(\bar{T}(\bar{n}), \bar{n})$, normal à \bar{n}) de tel sorte que

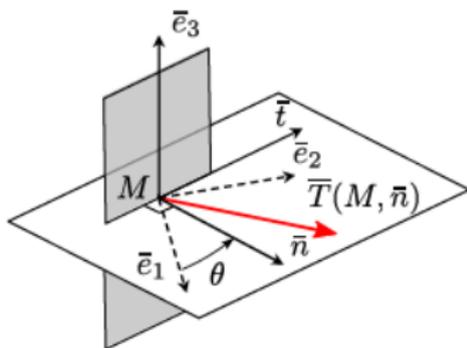
le trièdre $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_3)$ soit direct



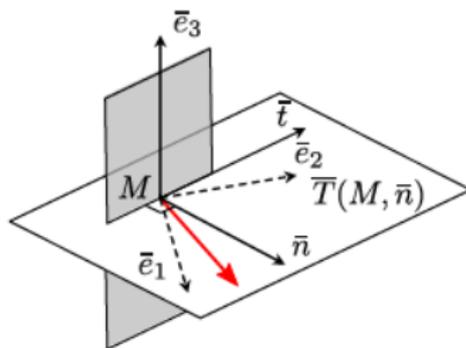
Remarque :

La possibilité de choisir une orientation pour le vecteur \bar{t} (avec le choix du trièdre $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_3)$ direct) permet de définir le signe pour la contrainte tangentielle τ , avec $\bar{\tau} = \tau \bar{t}$.

$(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_3)$ direct



cisaillement positif



cisaillement négatif

Étape 3 -

On a d'une part la relation vectorielle

$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t} \quad (15)$$

Étape 3 -

On a d'une part la relation vectorielle

$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t} \quad (15)$$

D'autre part, on a la relation de Cauchy

$$\overline{T}(\bar{n}) = \bar{\sigma} \bar{n}$$

soit, en terme de composantes dans repère principale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$,

$$\{T(\bar{n})\} = [\sigma]_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} \{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Étape 3 -

On a d'une part la relation vectorielle

$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t} \quad (15)$$

D'autre part, on a la relation de Cauchy

$$\overline{T}(\bar{n}) = \bar{\sigma} \bar{n}$$

soit, en terme de composantes dans repère principale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$,

$$\{T(\bar{n})\} = [\sigma]_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} \{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

autrement dit

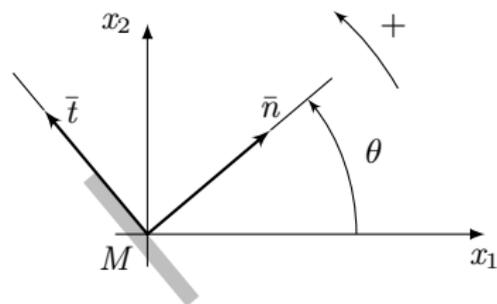
$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma_1 \cos \theta \bar{e}_1 + \sigma_2 \sin \theta \bar{e}_2 \quad (16)$$

Pour évaluer les 2 expressions de $\overline{T}(\bar{n})$, on projette l'équation (16) dans le repère de la facette (\bar{n}, \bar{t})

On a

$$\bar{e}_1 = \cos \theta \bar{n} - \sin \theta \bar{t}$$

$$\bar{e}_2 = \sin \theta \bar{n} + \cos \theta \bar{t}$$



Pour évaluer les 2 expressions de $\overline{T}(\bar{n})$, on projette l'équation (16) dans le repère de la facette (\bar{n}, \bar{t})

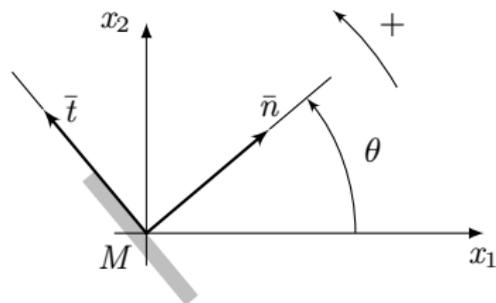
On a

$$\bar{e}_1 = \cos \theta \bar{n} - \sin \theta \bar{t}$$

$$\bar{e}_2 = \sin \theta \bar{n} + \cos \theta \bar{t}$$

d'où, en remplaçant \bar{e}_1, \bar{e}_2 dans (16),

$$\begin{aligned} \overline{T}(\bar{n}) &= (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta) \bar{n} \\ &+ (-\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta) \bar{t} \end{aligned}$$



Pour évaluer les 2 expressions de $\bar{T}(\bar{n})$, on projette l'équation (16) dans le repère de la facette (\bar{n}, \bar{t})

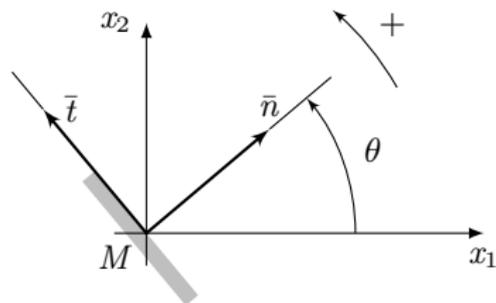
On a

$$\bar{e}_1 = \cos \theta \bar{n} - \sin \theta \bar{t}$$

$$\bar{e}_2 = \sin \theta \bar{n} + \cos \theta \bar{t}$$

d'où, en remplaçant \bar{e}_1, \bar{e}_2 dans (16),

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{n}) &= (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta) \bar{n} \\ &+ (-\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta) \bar{t} \end{aligned}$$



On obtient par identification les relations

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \quad (17a)$$

$$\tau = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta \quad (17b)$$

Étape 4 - Transformation trigonométrique

On peut exprimer $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$ en fonction de l'angle double $\theta_M = -2\theta$ en utilisant les formules trigonométriques

$$2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta, \quad 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta, \quad 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

Étape 4 - Transformation trigonométrique

On peut exprimer $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$ en fonction de l'angle double $\theta_M = -2\theta$ en utilisant les formules trigonométriques

$$2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta, \quad 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta, \quad 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

On obtient ainsi

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta) \quad (18a)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\theta) \quad (18b)$$

Étape 4 - Transformation trigonométrique

On peut exprimer $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$ en fonction de l'angle double $\theta_M = -2\theta$ en utilisant les formules trigonométriques

$$2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta, \quad 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta, \quad 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

On obtient ainsi

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta) \quad (18a)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\theta) \quad (18b)$$

On reconnaît la description paramétrique en $\theta_M = -2\theta$ d'un cercle de centre $O_M = (d, 0)$ et de rayon R :

$$\sigma = d + R \cos \theta_M$$

$$\tau = 0 + R \sin \theta_M$$

avec

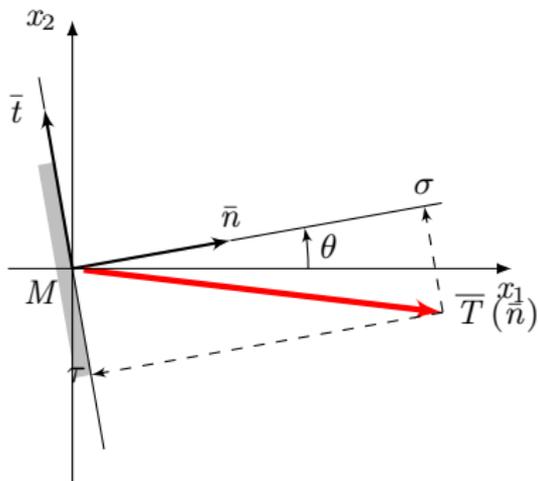
$$d = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad R = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

Bilan

Lorsque la facette tourne d'un angle θ autour de la direction de la contrainte principale σ_3 , l'extrémité du vecteur contrainte (point T) tourne sur le cercle de Mohr d'un angle $\theta_M = -2\theta$ (angle double et opposé).

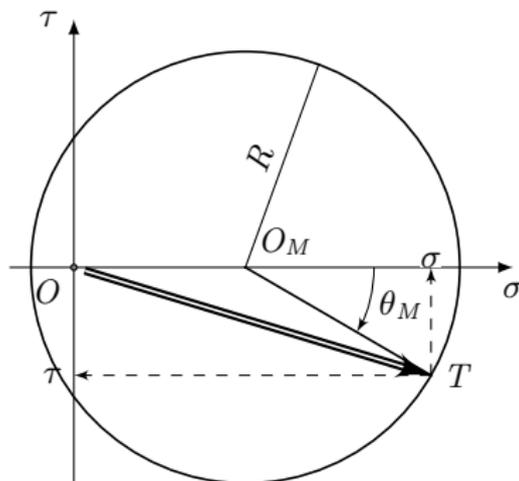
θ_M est l'angle entre l'axe $O\sigma$ et le rayon-vecteur $\overline{O_M T}$.

$$\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}$$



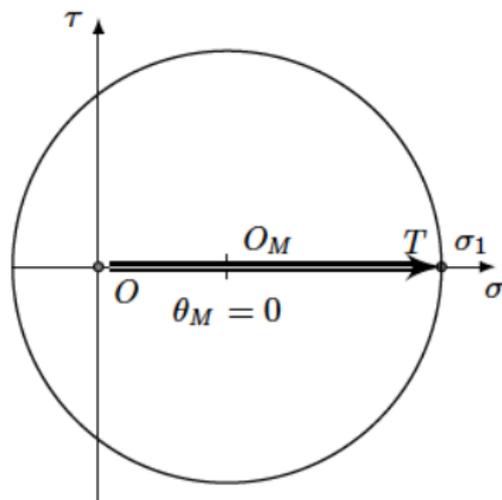
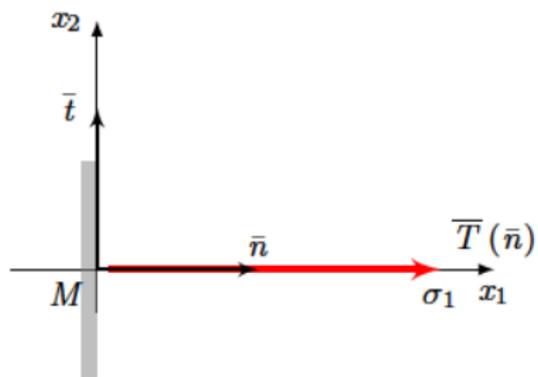
$$\sigma = d + R \cos(\theta_M)$$

$$\tau = 0 + R \sin(\theta_M)$$



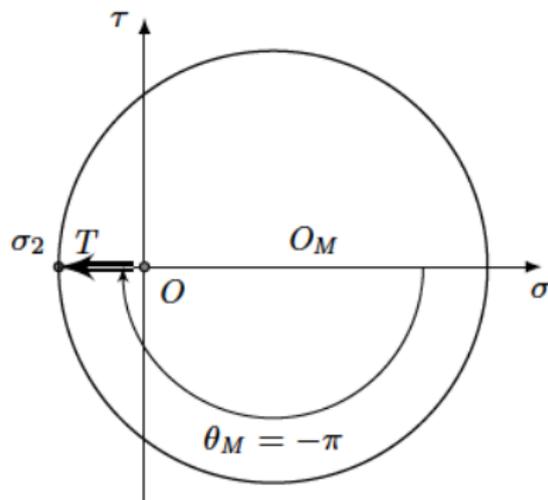
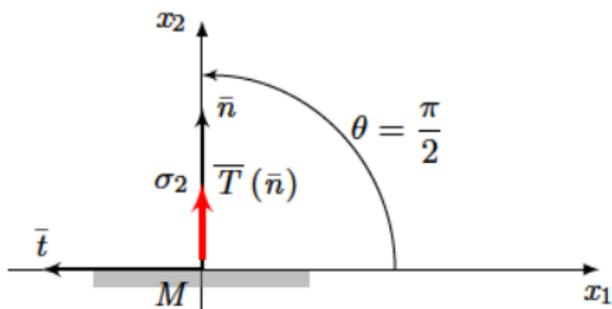
Points remarquables sur le cercle

- 1 pour $\theta = 0$, on a $\theta_M = 0$, $\sigma = \sigma_1$ et $\tau = 0$



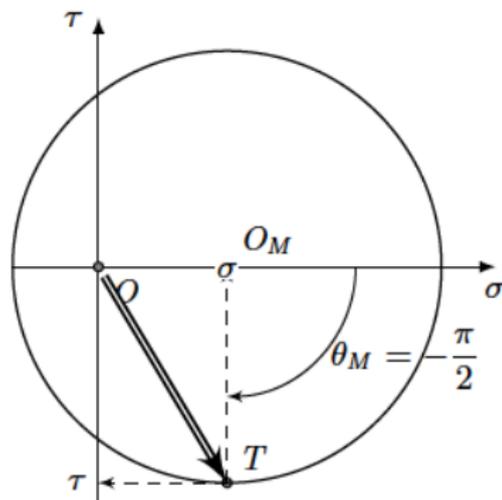
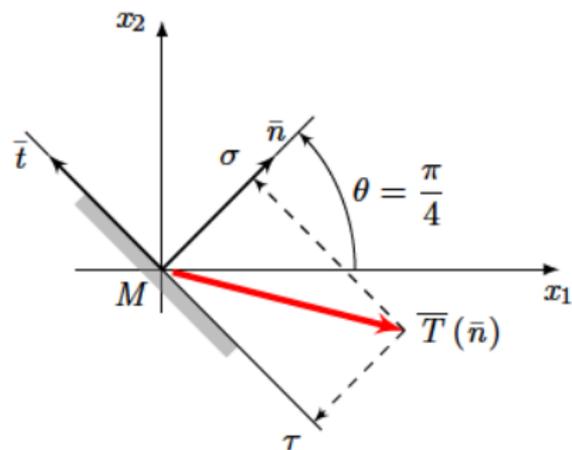
Points remarquables sur le cercle

- ① pour $\theta = 0$, on a $\theta_M = 0$, $\sigma = \sigma_1$ et $\tau = 0$
- ② pour $\theta = \pi/2$, on a $\theta_M = -\pi$, $\sigma = \sigma_2$ et $\tau = 0$
ce qui correspond aux 2 facettes dirigées selon les directions principales 1 et 2.



Points remarquables sur le cercle

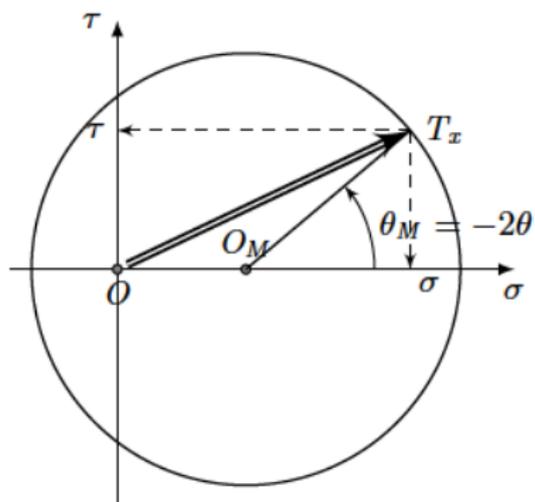
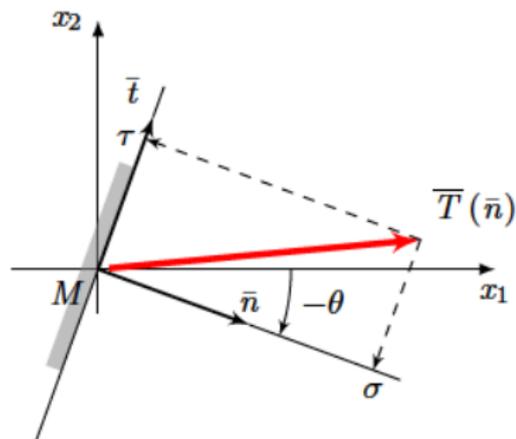
- ❶ pour $\theta = 0$, on a $\theta_M = 0$, $\sigma = \sigma_1$ et $\tau = 0$
- ❷ pour $\theta = \pi/2$, on a $\theta_M = -\pi$, $\sigma = \sigma_2$ et $\tau = 0$
ce qui correspond aux 2 facettes dirigées selon les directions principales 1 et 2.
- ❸ pour $\theta = \pi/4$, on a $\theta_M = -\pi/2$, $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ et $\tau = \tau_{max}$ (dans le plan (\bar{e}_1, \bar{e}_2))



Propriétés déduites du cercle de Mohr

Propriété 1 : Symétrie par rapport à l'axe $O\sigma$

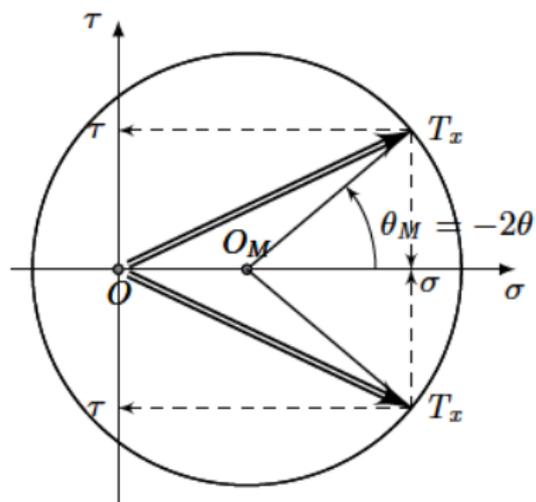
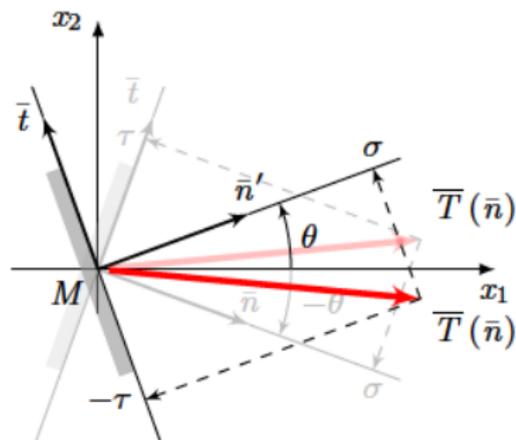
Sur 2 facettes symétriques par rapport aux directions principales s'exercent des contraintes normales égales et des contraintes tangentielles opposées.



Propriétés déduites du cercle de Mohr

Propriété 1 : Symétrie par rapport à l'axe $O\sigma$

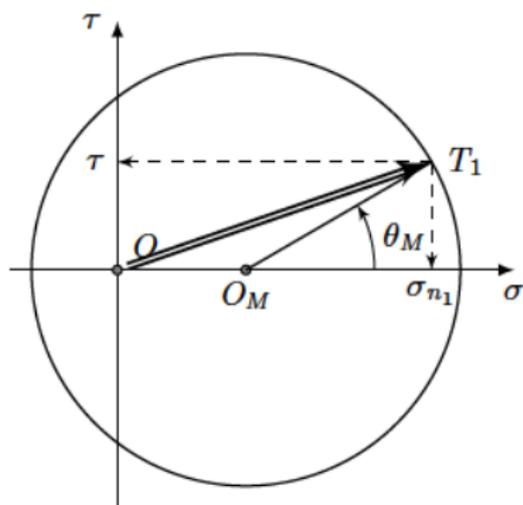
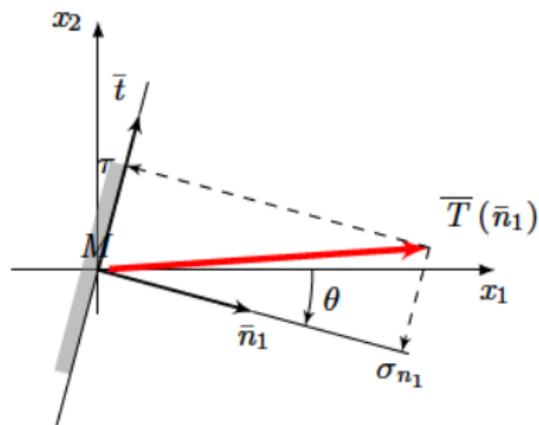
Sur 2 facettes symétriques par rapport aux directions principales s'exercent des contraintes normales égales et des contraintes tangentielles opposées.



Propriétés déduites du cercle de Mohr

Propriété 2 : Symétrie par rapport au centre O_M

Sur 2 facettes orthogonales s'exercent des contraintes tangentielles opposées.

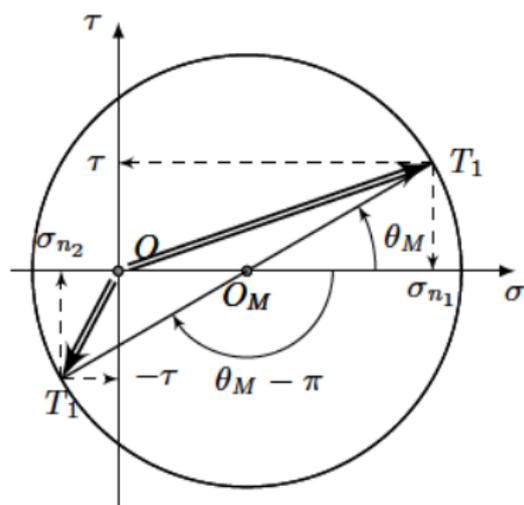
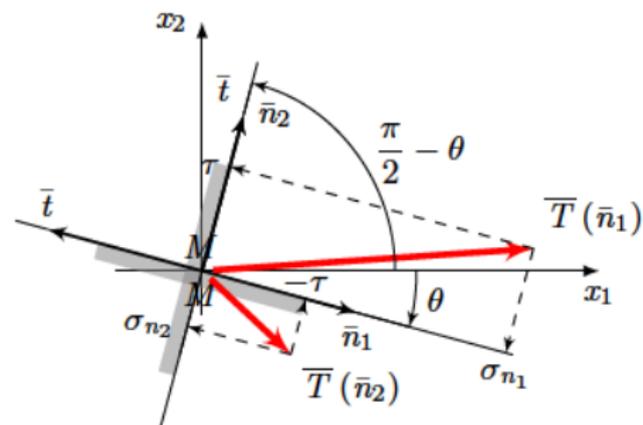


C'est une conséquence de la relation $\bar{\sigma} = {}^t\bar{\sigma}$

Propriétés déduites du cercle de Mohr

Propriété 2 : Symétrie par rapport au centre O_M

Sur 2 facettes orthogonales s'exercent des contraintes tangentielles opposées.



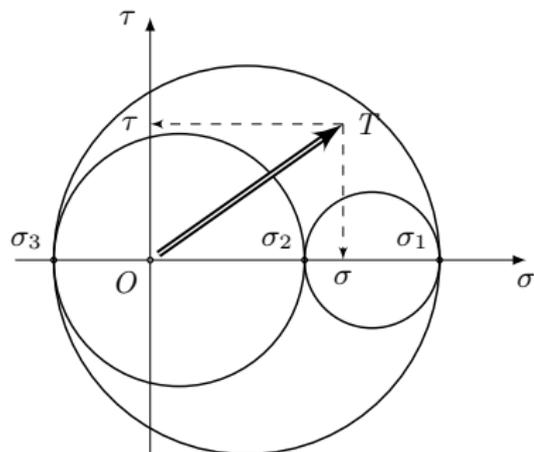
C'est une conséquence de la relation $\bar{\bar{\sigma}} = {}^t\bar{\sigma}$

Tricercle de Mohr

Idée :

En suivant le même raisonnement on peut construire deux autres cercles de Mohr représentant l'extrémité du vecteur contrainte lorsque la facette tourne autour des deux autres directions principales.

On suppose que les contraintes principales sont ordonnées telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et que le trièdre associé aux directions principales 1, 2, 3 est direct.



Tricercle de Mohr

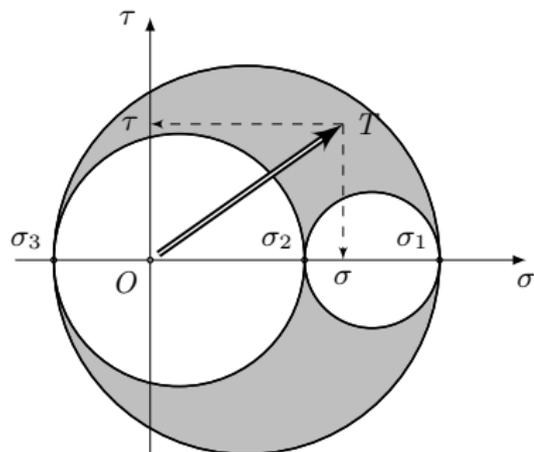
Idée :

En suivant le même raisonnement on peut construire deux autres cercles de Mohr représentant l'extrémité du vecteur contrainte lorsque la facette tourne autour des deux autres directions principales.

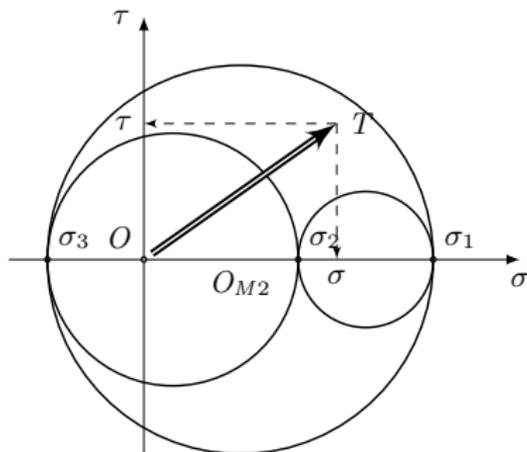
On suppose que les contraintes principales sont ordonnées telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et que le trièdre associé aux directions principales 1, 2, 3 est direct.

Théorème

Pour toute facette, l'extrémité $T = (\sigma, \tau)$ du vecteur contrainte appartient à l'espace du plan de Mohr compris entre le grand cercle de Mohr et les 2 cercles plus petits.



Tricercler de Mohr

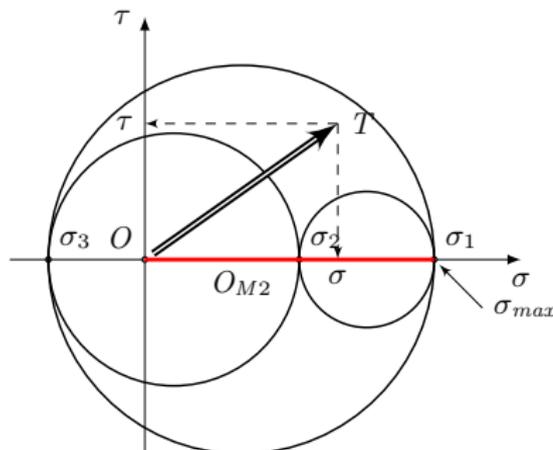


Tricercler de Mohr

Corrolaire 1

La contrainte normale maximale (respect. minimale) est égale à σ_1 (respect. σ_3) ; elle s'exerce sur la facette normale à la direction principale 1. (respect. 3). L'expression générale est

$$\sigma_{max} = \max_{i=1,2,3} (\sigma_i) \quad (19)$$



Tricercler de Mohr

Corroilaire 1

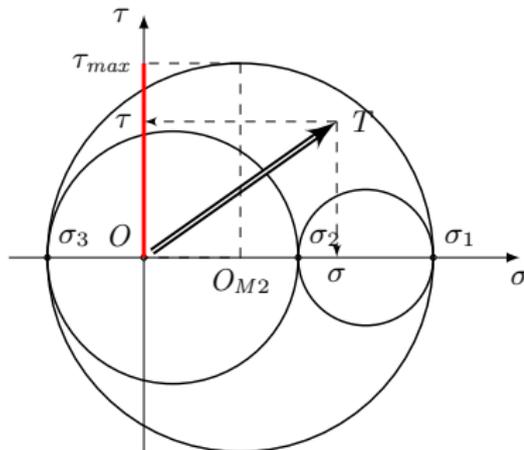
La contrainte normale maximale (respect. minimale) est égale à σ_1 (respect. σ_3) ; elle s'exerce sur la facette normale à la direction principale 1. (respect. 3). L'expression générale est

$$\sigma_{max} = \max_{i=1,2,3} (\sigma_i) \quad (19)$$

Corroilaire 2

La contrainte tangentielle maximale (en valeur absolue) est égale à $|\sigma_1 - \sigma_3|/2$ (rayon du grand cercle de Mohr) ; elle s'exerce sur les facettes parallèles à la direction principale 2 et inclinée à $\pm\pi/4$ sur les directions principales 1 et 3. On peut écrire

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max_{i,j=1,2,3} |\sigma_i - \sigma_j| \quad (20)$$



Plan du chapitre

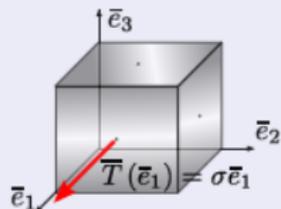
- 1 Directions et contraintes principales
- 2 Représentation de Mohr
- 3 États de contraintes remarquables**
- 4 Élasticité plane
- 5 Critères limites d'élasticité

État de contrainte uniaxial

Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur des contraintes uniaxial dans la direction \bar{e}_1 et d'intensité σ , le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



État de contrainte uniaxial

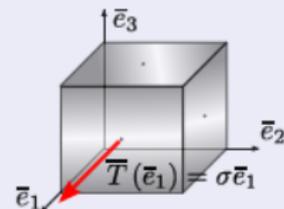
Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur des contraintes uniaxial dans la direction \bar{e}_1 et d'intensité σ , le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

autrement dit, tel que

$$\bar{T}(\bar{e}_1) = \sigma \bar{e}_1, \quad \bar{T}(\bar{e}_2) = \bar{T}(\bar{e}_3) = 0$$



État de contrainte uniaxial

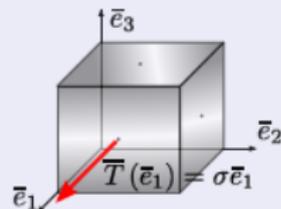
Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur des contraintes uniaxial dans la direction \bar{e}_1 et d'intensité σ , le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

autrement dit, tel que

$$\bar{T}(\bar{e}_1) = \sigma \bar{e}_1, \quad \bar{T}(\bar{e}_2) = \bar{T}(\bar{e}_3) = 0$$



Conséquence : les directions Ox_1, Ox_2, Ox_3 sont les 3 directions principales associées respectivement aux contraintes principales $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

État de contrainte uniaxial

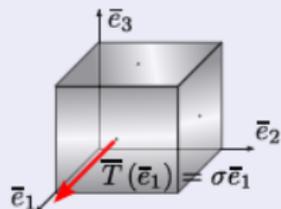
Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur des contraintes uniaxial dans la direction \bar{e}_1 et d'intensité σ , le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

autrement dit, tel que

$$\bar{T}(\bar{e}_1) = \sigma \bar{e}_1, \quad \bar{T}(\bar{e}_2) = \bar{T}(\bar{e}_3) = 0$$



Conséquence : les directions Ox_1, Ox_2, Ox_3 sont les 3 directions principales associées respectivement aux contraintes principales $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

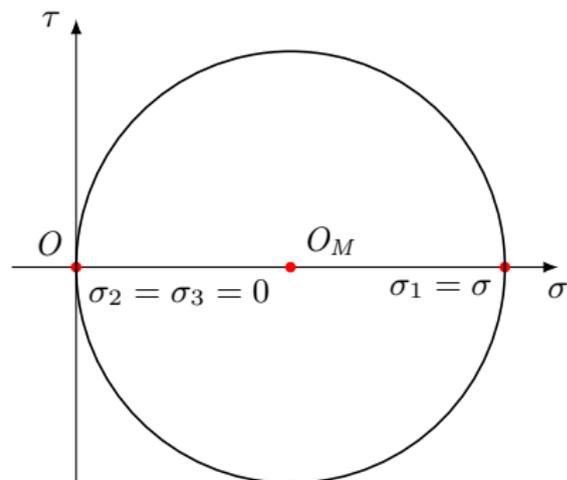
Exemple : c'est l'état de contrainte que l'on observe dans un barreau cylindrique d'axe Ox_1 soumis à une traction uniforme.



Cercles de Mohr pour un état de contrainte uniaxial

Il n'y a qu'un cercle de Mohr correspondant à l'état de contrainte uniaxial

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

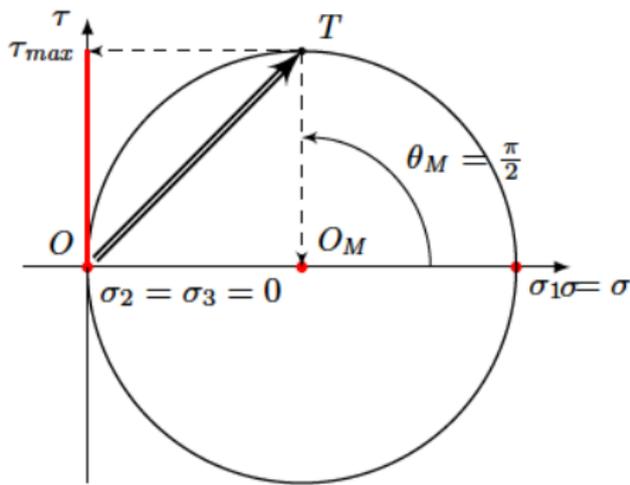
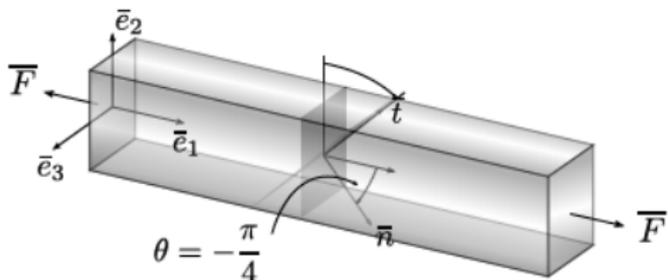


La contrainte tangentielle maximale $\tau_{max} > 0$ vaut

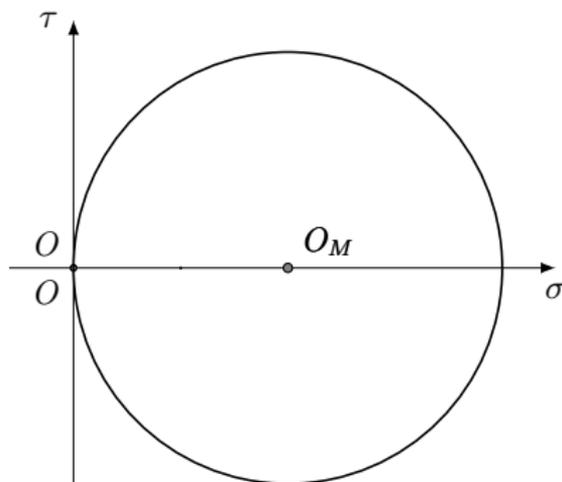
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

et l'orientation de la facette correspondante est donnée par l'angle $\theta = (\bar{n}, \bar{e}_1)$

$$\theta_M = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\theta_M}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

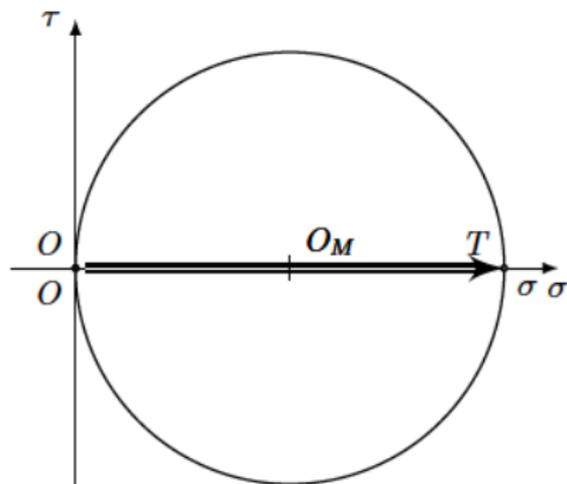
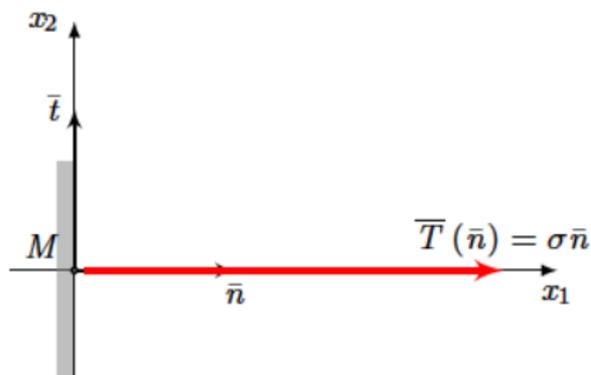


Représentation du vecteur contrainte $\bar{T}(\bar{n}) = \sigma\bar{n} + \tau\bar{t}$ dans le repère (\bar{e}_1, \bar{e}_2) , ainsi que le point $T = (\sigma, \tau)$ dans le plan de Mohr, lorsque la facette tourne autour de l'axe Ox_3 d'un angle θ



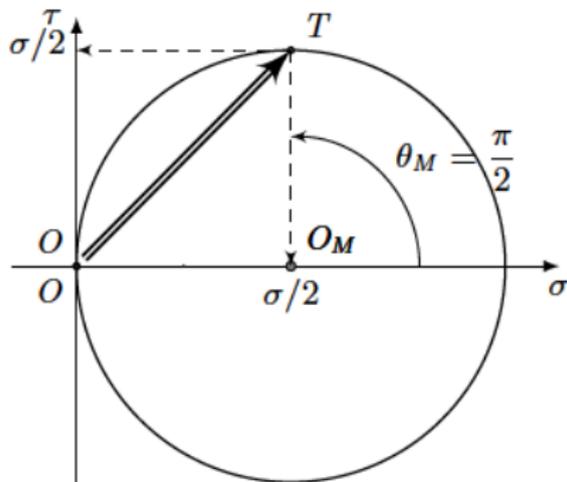
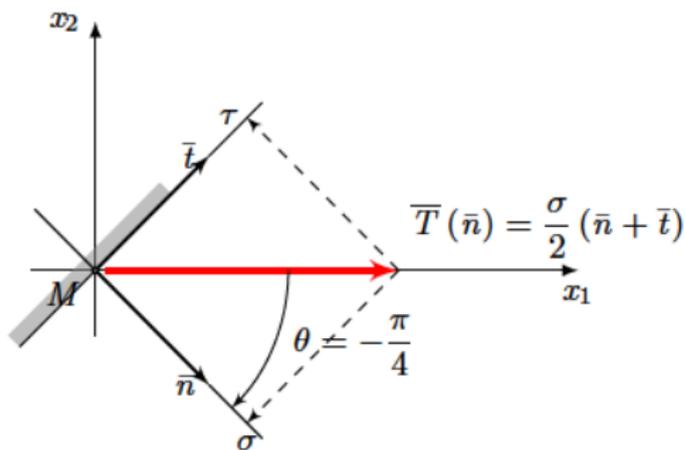
Représentation du vecteur contrainte $\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}$ dans le repère (\bar{e}_1, \bar{e}_2) , ainsi que le point $T = (\sigma, \tau)$ dans le plan de Mohr, lorsque la facette tourne autour de l'axe Ox_3 d'un angle θ

$$\theta = 0$$



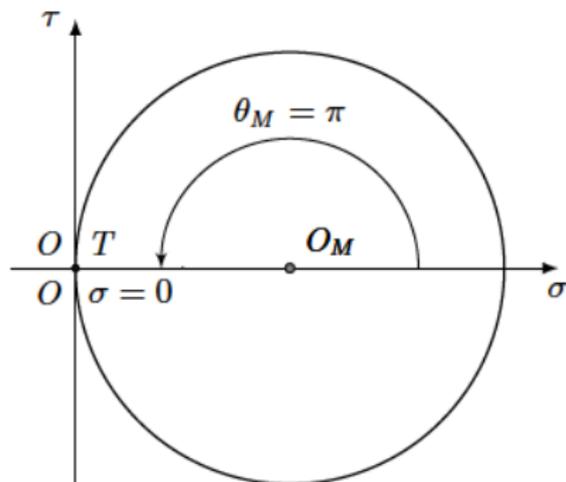
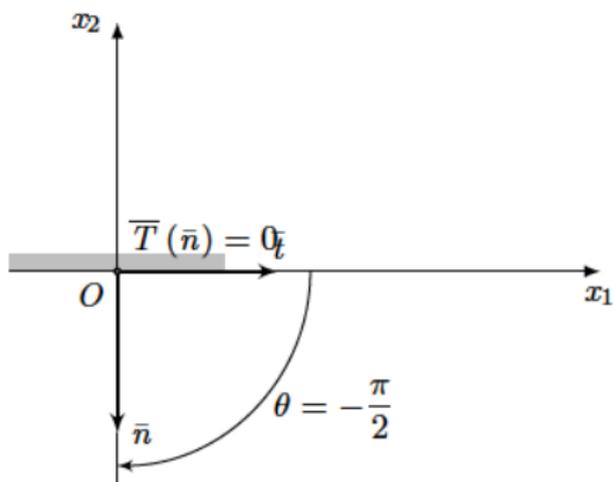
Représentation du vecteur contrainte $\bar{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}$ dans le repère (\bar{e}_1, \bar{e}_2) , ainsi que le point $T = (\sigma, \tau)$ dans le plan de Mohr, lorsque la facette tourne autour de l'axe Ox_3 d'un angle θ

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$



Représentation du vecteur contrainte $\overline{T}(\bar{n}) = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}$ dans le repère (\bar{e}_1, \bar{e}_2) , ainsi que le point $T = (\sigma, \tau)$ dans le plan de Mohr, lorsque la facette tourne autour de l'axe Ox_3 d'un angle θ

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$



État de contrainte biaxial (ou plan)

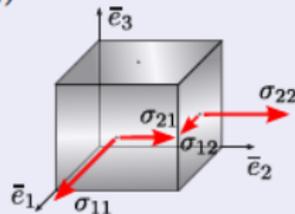
Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur plan (relativement au plan Ox_1x_2) le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

autrement dit, tel que

$$\bar{T}(\bar{e}_3) = 0$$



État de contrainte biaxial (ou plan)

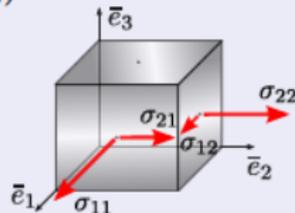
Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur plan (relativement au plan Ox_1x_2) le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

autrement dit, tel que

$$\bar{T}(\bar{e}_3) = 0$$



Conséquence : la directions Ox_3 est une direction principale associées à la contrainte principale 0. Les 2 autres directions principales sont nécessairement dans le plan Ox_1x_2 .

État de contrainte biaxial (ou plan)

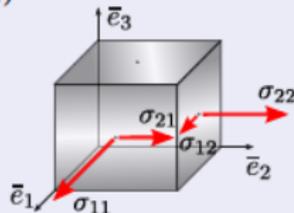
Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur plan (relativement au plan Ox_1x_2) le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

autrement dit, tel que

$$\bar{T}(\bar{e}_3) = 0$$



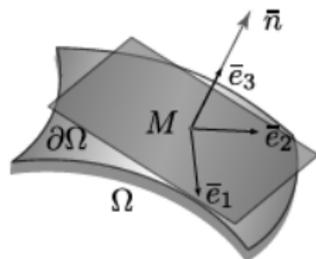
Conséquence : la directions Ox_3 est une direction principale associées à la contrainte principale 0. Les 2 autres directions principales sont nécessairement dans le plan Ox_1x_2 .

Exemple : Tenseur des contraintes en un point d'une surface libre, c'est à dire un point $M \in \partial\Omega$ tel que $\bar{F}^s(M) = 0$.

On a en effet

$$\bar{T}(M, \bar{n}) = \bar{\sigma}(M) \bar{n} = 0$$

Le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ est plan relativement au plan tangent en M à $\partial\Omega$.



Cercles de Mohr pour un état de contrainte biaxial

On considère l'état de contrainte biaxial donné dans le repère des directions principales par

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cercles de Mohr pour un état de contrainte biaxial

On considère l'état de contrainte biaxial donné dans le repère des directions principales par

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

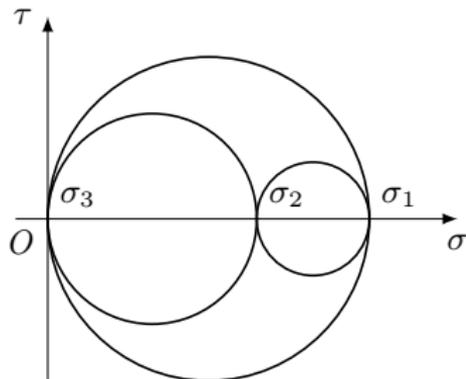
On distingue 3 situations selon le signe des contraintes principales :

$$0 < \sigma_2 < \sigma_1, \quad \sigma_2 < 0 < \sigma_1, \quad \sigma_2 < \sigma_1 < 0$$

Pour chacune des situations on peut tracer les cercles de Mohr et calculer la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} .

Cercles de Mohr pour les 3 situations :

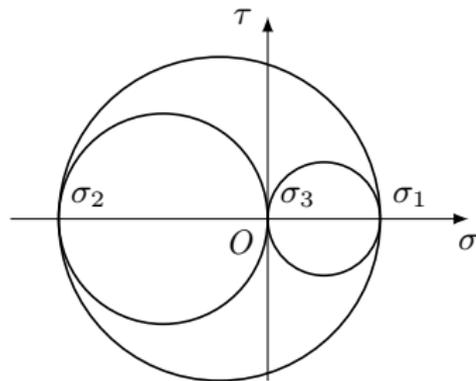
① $0 < \sigma_2 < \sigma_1$



Pour chacune des situations on peut tracer les cercles de Mohr et calculer la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} .

Cercles de Mohr pour les 3 situations :

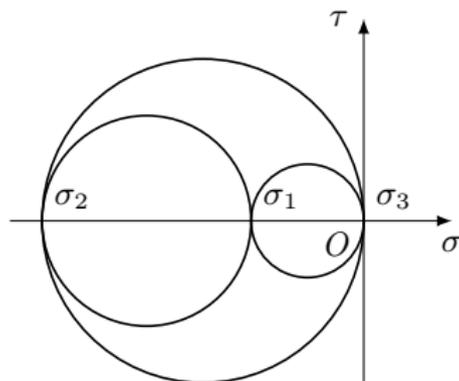
- 1 $0 < \sigma_2 < \sigma_1$
- 2 $\sigma_2 < 0 < \sigma_1$



Pour chacune des situations on peut tracer les cercles de Mohr et calculer la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} .

Cercles de Mohr pour les 3 situations :

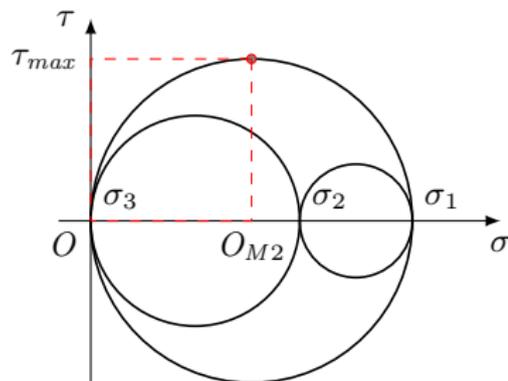
- 1 $0 < \sigma_2 < \sigma_1$
- 2 $\sigma_2 < 0 < \sigma_1$
- 3 $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$



Pour chacune des situations on peut tracer les cercles de Mohr et calculer la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} .

Cercles de Mohr pour les 3 situations :

- ❶ $0 < \sigma_2 < \sigma_1$
- ❷ $\sigma_2 < 0 < \sigma_1$
- ❸ $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$



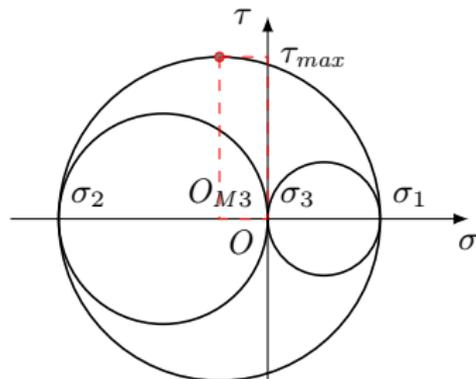
Valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} pour les 3 cas :

- ❶ Cas 1 : $\tau_{max} = \sigma_1/2$;

Pour chacune des situations on peut tracer les cercles de Mohr et calculer la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} .

Cercles de Mohr pour les 3 situations :

- ❶ $0 < \sigma_2 < \sigma_1$
- ❷ $\sigma_2 < 0 < \sigma_1$
- ❸ $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$



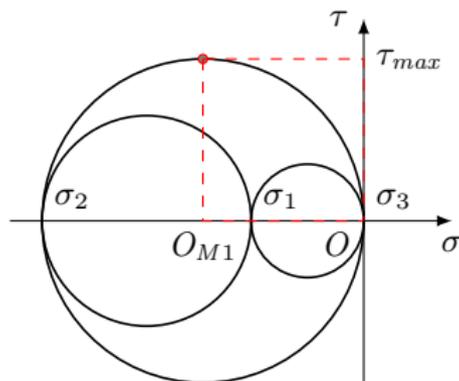
Valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} pour les 3 cas :

- ❶ Cas 1 : $\tau_{max} = \sigma_1/2$;
- ❷ Cas 2 : $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$;

Pour chacune des situations on peut tracer les cercles de Mohr et calculer la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} .

Cercles de Mohr pour les 3 situations :

- ❶ $0 < \sigma_2 < \sigma_1$
- ❷ $\sigma_2 < 0 < \sigma_1$
- ❸ $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$



Valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} pour les 3 cas :

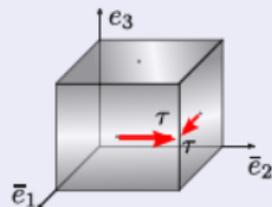
- ❶ Cas 1 : $\tau_{max} = \sigma_1/2$;
- ❷ Cas 2 : $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$;
- ❸ Cas 3 : $\tau_{max} = -\sigma_2/2$

État plan de cisaillement ou scission simple

Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur de cisaillement par rapport aux deux directions x_1 et x_2 le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

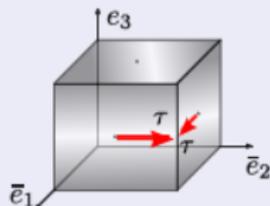


État plan de cisaillement ou scission simple

Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur de cisaillement par rapport aux deux directions x_1 et x_2 le tenseur $\bar{\sigma}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\sigma]_{(\bar{e}_i)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Conséquence : Les contraintes principales et les directions principales (dans la base (\bar{e}_i)) sont :

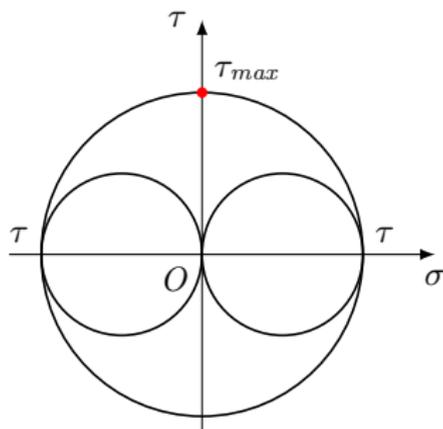
$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{n}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Cercles de Mohr pour un état de cisaillement

Les valeurs propres sont $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, $\sigma_3 = 0$, d'où le tricercale de Mohr

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



État de contrainte triaxial sphérique

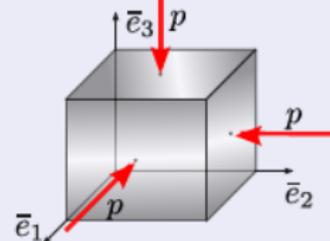
Définition

On appelle *tenseur des contraintes sphérique* le tenseur $\bar{\sigma}$ de la forme

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

quelque soit la base. On a donc pour tout vecteur \bar{n}

$$\bar{T}(\bar{n}) = -p\bar{n}$$



État de contrainte triaxial sphérique

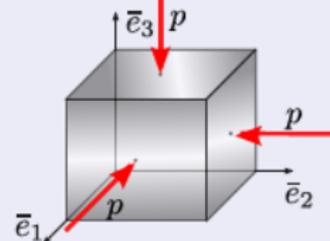
Définition

On appelle *tenseur des contraintes sphérique* le tenseur $\bar{\sigma}$ de la forme

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

quelque soit la base. On a donc pour tout vecteur \bar{n}

$$\bar{T}(\bar{n}) = -p\bar{n}$$



Conséquence :

Toute direction est direction principale associée à la contrainte principale $-p$. Si p est positif il s'agit d'une compression (le scalaire p représente la pression), si p est négatif il s'agit d'une traction.

État de contrainte triaxial sphérique

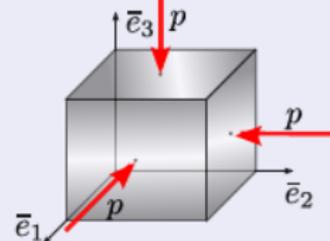
Définition

On appelle *tenseur des contraintes sphérique* le tenseur $\bar{\sigma}$ de la forme

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

quelque soit la base. On a donc pour tout vecteur \bar{n}

$$\bar{T}(\bar{n}) = -p\bar{n}$$



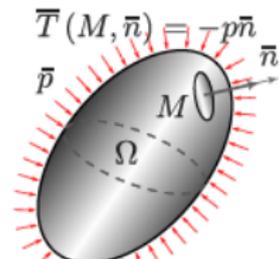
Conséquence :

Toute direction est direction principale associée à la contrainte principale $-p$. Si p est positif il s'agit d'une compression (le scalaire p représente la pression), si p est négatif il s'agit d'une traction.

Exemple :

Tout solide Ω soumis à un chargement de la forme

$$\bar{F}^s(M) = -p\bar{n} \quad \text{pour tout } M \in \partial\Omega$$

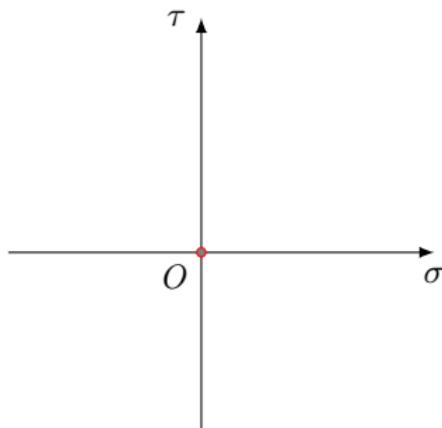


Cercles de Mohr pour un état de contrainte sphérique

Pour un état de contrainte sphérique

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

les 3 cercles de Mohr sont réduits au point O , centre du repère.



Plan du chapitre

- 1 Directions et contraintes principales
- 2 Représentation de Mohr
- 3 États de contraintes remarquables
- 4 Élasticité plane**
- 5 Critères limites d'élasticité

Définition d'un champ de contrainte plane

On considère une base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ et un solide $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

Définition

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$, $M \in \Omega$ est dit plan, parallèlement à (Oxy) si

Définition d'un champ de contrainte plane

On considère une base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ et un solide $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

Définition

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$, $M \in \Omega$ est dit plan, parallèlement à (Oxy) si

- *$\bar{\sigma}(M)$ est indépendant de la coordonnée z ;*

Définition d'un champ de contrainte plane

On considère une base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ et un solide $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

Définition

Le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$, $M \in \Omega$ est dit plan, parallèlement à (Oxy) si

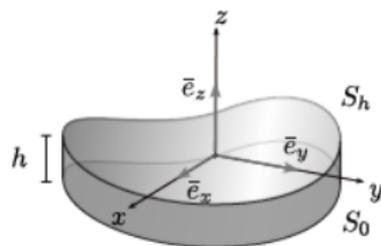
- $\bar{\sigma}(M)$ est indépendant de la coordonnée z ;
- $\bar{\sigma}(M)$ est un tenseur plan, relativement au plan (Oxy) c'est à dire si

$$[\sigma]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problème tridimensionnel de contrainte plane

On considère le problème d'équilibre suivant :

Soit un solide Ω de forme cylindrique, parallèle à (Oxy) , d'épaisseur h , soumis aux chargements suivants :

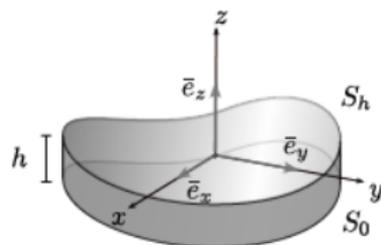


Problème tridimensionnel de contrainte plane

On considère le problème d'équilibre suivant :

Soit un solide Ω de forme cylindrique, parallèle à (Oxy) , d'épaisseur h , soumis aux chargements suivants :

- les forces volumiques \vec{f}^v sont parallèles à (Oxy) est indépendantes de z ;

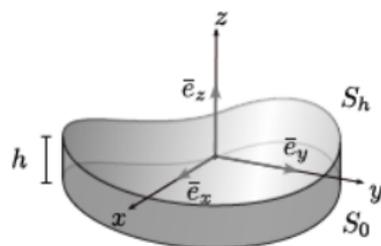


Problème tridimensionnel de contrainte plane

On considère le problème d'équilibre suivant :

Soit un solide Ω de forme cylindrique, parallèle à (Oxy) , d'épaisseur h , soumis aux chargements suivants :

- les forces volumiques \vec{f}^v sont parallèles à (Oxy) est indépendantes de z ;
- les surfaces S_0 et S_h sont libre de contrainte ;



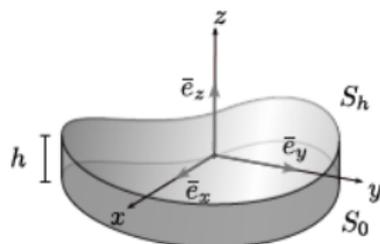
Problème tridimensionnel de contrainte plane

On considère le problème d'équilibre suivant :

Soit un solide Ω de forme cylindrique, parallèle à (Oxy) , d'épaisseur h , soumis aux chargements suivants :

- les forces volumiques \bar{f}^v sont parallèles à (Oxy) est indépendantes de z ;
- les surfaces S_0 et S_h sont libre de contrainte ;
- les forces de contour sur la surface latérale sont parallèle à (Oxy) est indépendantes de z :

$$\bar{F}^s(M) = F_x(x, y) \bar{e}_x + F_y(x, y) \bar{e}_y$$



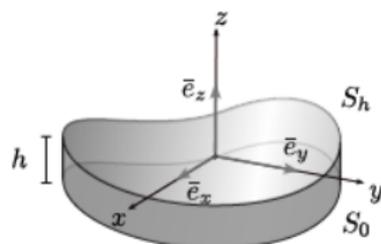
Problème tridimensionnel de contrainte plane

On considère le problème d'équilibre suivant :

Soit un solide Ω de forme cylindrique, parallèle à (Oxy) , d'épaisseur h , soumis aux chargements suivants :

- les forces volumiques \bar{f}^v sont parallèles à (Oxy) est indépendantes de z ;
- les surfaces S_0 et S_h sont libre de contrainte ;
- les forces de contour sur la surface latérale sont parallèle à (Oxy) est indépendantes de z :

$$\bar{F}^s(M) = F_x(x, y) \bar{e}_x + F_y(x, y) \bar{e}_y$$



Problème : le champ de contrainte solution de ce problème d'élasticité n'est en général pas plan.

Problème tridimensionnel de contrainte plane

On a cependant le résultat suivant :

Propriété

Lorsque l'épaisseur h est faible devant S_0 , ce problème peut être ramené à l'étude d'un problème plan.

*Cette simplification est appelée l'**approximation des tranches minces**.*

Problème tridimensionnel de contrainte plane

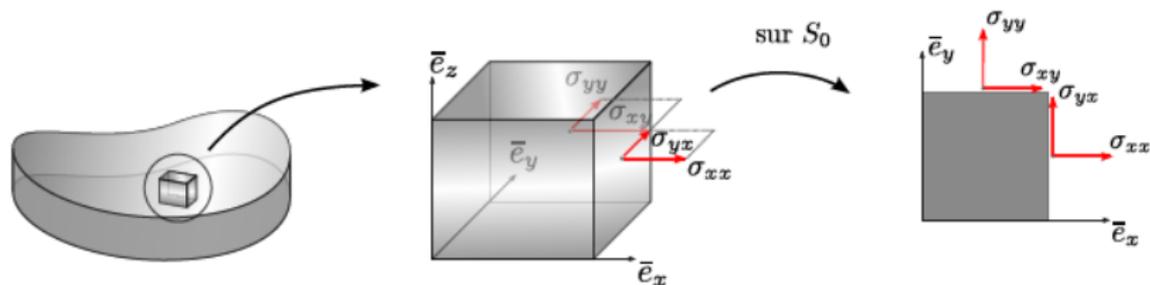
On a cependant le résultat suivant :

Propriété

Lorsque l'épaisseur h est faible devant S_0 , ce problème peut être ramené à l'étude d'un problème plan.

Cette simplification est appelée l'*approximation des tranches minces*.

Représentation des contraintes sur un élément de surface dS_0



Problème tridimensionnel de contrainte plane

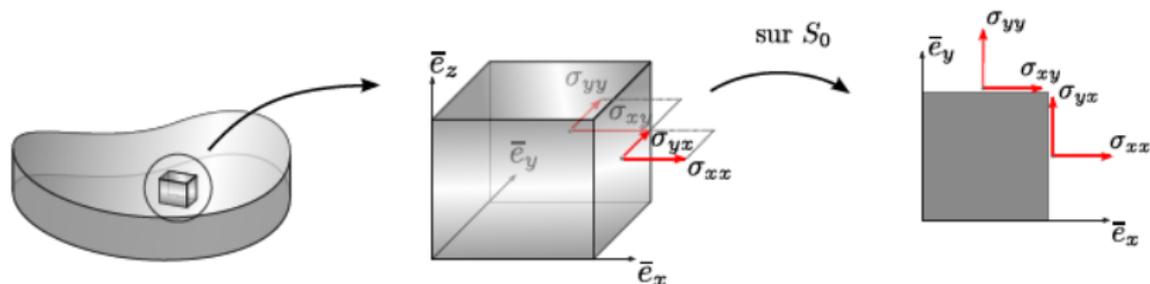
On a cependant le résultat suivant :

Propriété

Lorsque l'épaisseur h est faible devant S_0 , ce problème peut être ramené à l'étude d'un problème plan.

Cette simplification est appelée l'*approximation des tranches minces*.

Représentation des contraintes sur un élément de surface dS_0

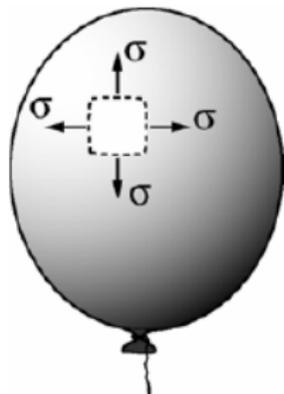


On écrira les composantes de $\bar{\sigma}$ sous la forme d'une matrice 2×2 :

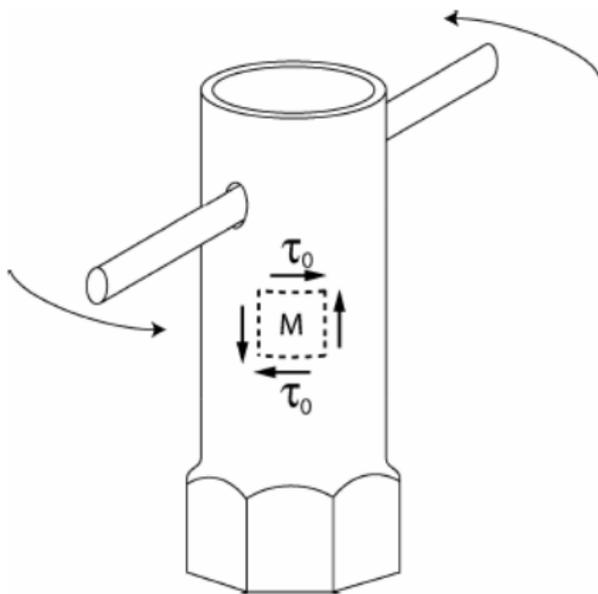
$$[\sigma]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{ou encore} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Exemples de problèmes assimilables à des problèmes d'élasticité plane

Ballon (film mince) sous pression :
état de contrainte biaxial équilibré



Torsion dans un tube mince : état
plan de cisaillement



Cercle de Mohr en contrainte plane

On est dans le cas particulier où Oz est une direction principale associée à la contrainte nulle : $\overline{T}(M, \bar{e}_z) = 0$.

On peut donc restreindre les facettes étudiées aux facettes parallèles à la direction Oz . Par conséquent, l'extrémité du vecteur contrainte $T = (\sigma, \tau)$ décrit le cercle de Mohr de diamètre $\sigma_1\sigma_2$

Cercle de Mohr en contrainte plane

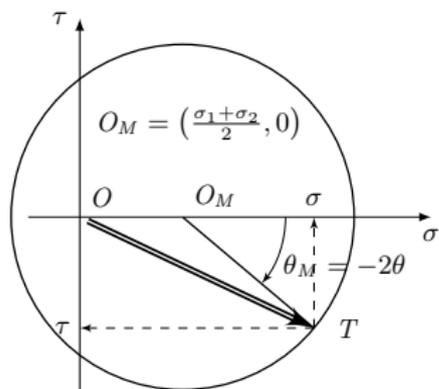
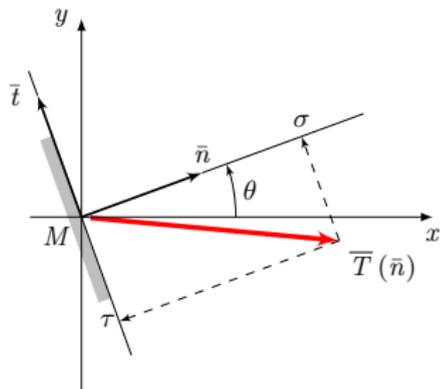
On est dans le cas particulier où Oz est une direction principale associée à la contrainte nulle : $\bar{T}(M, \bar{e}_z) = 0$.

On peut donc restreindre les facettes étudiées aux facettes parallèles à la direction Oz . Par conséquent, l'extrémité du vecteur contrainte $T = (\sigma, \tau)$ décrit le cercle de Mohr de diamètre $\sigma_1\sigma_2$

Rappel :

(important) On définit le vecteur unitaire \bar{t} dans le plan (M, \bar{n}, \bar{T}) tel que le trièdre $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_z)$ soit orthonormé direct. On écrit

$\bar{T}(\bar{n}) = \sigma\bar{n} + \tau\bar{t}$ dans le repère (\bar{n}, \bar{t}) et $T = (\sigma, \tau)$ dans le plan de Mohr



Cercle de Mohr en contrainte plane

En partant des composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère des directions principales :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Cercle de Mohr en contrainte plane

En partant des composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère des directions principales :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

on a obtenue les relations (17)

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta$$

$$\tau = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta$$

Cercle de Mohr en contrainte plane

En partant des composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère des directions principales :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

on a obtenue les relations (17)

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta$$

$$\tau = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta$$

et les mêmes en fonction de l'angle double $\theta_M = -2\theta$ (relation (18)) :

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\theta)$$

Formules du Cercle de Mohr en contrainte plane

Nouveau problème :

On cherche à exprimer les composantes (σ, τ) en fonction des composantes de $\bar{\sigma}$ dans un repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) quelconque :

$$[\sigma]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Formules du Cercle de Mohr en contrainte plane

Nouveau problème :

On cherche à exprimer les composantes (σ, τ) en fonction des composantes de $\bar{\sigma}$ dans un repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) quelconque :

$$[\sigma]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Solution :

En appliquant les formules de changement de base, de la base (\bar{e}_x, \bar{e}_y) vers la base (\bar{n}, \bar{t}) .

$$[\sigma]_{(\bar{n}, \bar{t})} = [R] [\sigma]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y)} {}^t[R] \quad \text{avec} \quad [R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

on obtient les relations générales

$$\begin{cases} \sigma_n = \cos^2 \theta \sigma_x + \sin^2 \theta \sigma_y + 2 \cos \theta \sin \theta \tau_{xy} \\ \sigma_t = \sin^2 \theta \sigma_x + \cos^2 \theta \sigma_y - 2 \cos \theta \sin \theta \tau_{xy} \\ \tau_{nt} = -\cos \theta \sin \theta (\sigma_x - \sigma_y) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tau_{xy} \end{cases} \quad (21)$$

En identifiant les termes σ_n avec σ et τ_{nt} avec τ , on obtient les formules

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (22a)$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (22b)$$

En identifiant les termes σ_n avec σ et τ_{nt} avec τ , on obtient les formules

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (22a)$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (22b)$$

Ou encore, en fonction de l'angle double $\theta_M = -2\theta$:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-2\theta) - \tau_{xy} \sin(-2\theta) \quad (23a)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(-2\theta) + \tau_{xy} \cos(-2\theta) \quad (23b)$$

En identifiant les termes σ_n avec σ et τ_{nt} avec τ , on obtient les formules

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (22a)$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (22b)$$

Ou encore, en fonction de l'angle double $\theta_M = -2\theta$:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-2\theta) - \tau_{xy} \sin(-2\theta) \quad (23a)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(-2\theta) + \tau_{xy} \cos(-2\theta) \quad (23b)$$

Remarque :

On retrouve les formules (17) et (18) si Ox et Oy sont les directions principales.

En effet on a dans ce cas $\tau_{xy} = 0$.

Détermination du cercle de Mohr en contrainte plane

On suppose connue les composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) :

$$[\sigma] = \begin{array}{ccc} & \overline{T}(M, \bar{e}_x) & \overline{T}(M, \bar{e}_y) & \overline{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{c} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ 0 \end{array} \right. & & & \\ & \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Problème : Comment tracer le cercle de Mohr à partir des composantes de $\bar{\sigma}$?

Détermination du cercle de Mohr en contrainte plane

On suppose connue les composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) :

$$[\sigma] = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overline{T}(M, \bar{e}_x) \\ \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \overline{T}(M, \bar{e}_y) \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \overline{T}(M, \bar{e}_z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Problème : Comment tracer le cercle de Mohr à partir des composantes de $\bar{\sigma}$?

Étape 1 : On oriente le vecteur unitaire \bar{t} tel que le trièdre $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_z)$ soit direct.

Détermination du cercle de Mohr en contrainte plane

On suppose connue les composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) :

$$[\sigma] = \begin{array}{ccc} \overline{T}(M, \bar{e}_x) & \overline{T}(M, \bar{e}_y) & \overline{T}(M, \bar{e}_z) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Problème : Comment tracer le cercle de Mohr à partir des composantes de $\bar{\sigma}$?

Étape 1 : On oriente le vecteur unitaire \bar{t} tel que le trièdre $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_z)$ soit direct.

Étape 2 : Par définition, les scalaires σ_x, τ_{yx} sont les composantes du vecteur contrainte

$$\overline{T}(\bar{e}_x) = \sigma_x \bar{e}_x + \tau_{yx} \bar{e}_y$$

Détermination du cercle de Mohr en contrainte plane

On suppose connue les composantes de $\bar{\sigma}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \overline{T}(M, \bar{e}_x) & \overline{T}(M, \bar{e}_y) & \overline{T}(M, \bar{e}_z) \\ \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problème : Comment tracer le cercle de Mohr à partir des composantes de $\bar{\sigma}$?

Étape 1 : On oriente le vecteur unitaire \bar{t} tel que le trièdre $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_z)$ soit direct.

Étape 2 : Par définition, les scalaires σ_x, τ_{yx} sont les composantes du vecteur contrainte

$$\overline{T}(\bar{e}_x) = \sigma_x \bar{e}_x + \tau_{yx} \bar{e}_y$$

Comme le repère (\bar{n}, \bar{t}) de la facette de normal

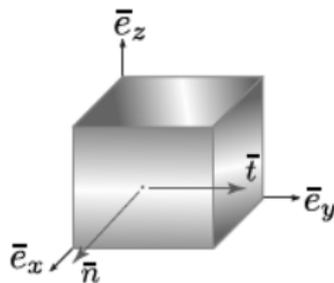
$\bar{n} = \bar{e}_x$ coïncide avec le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) on peut

écrire

$$\overline{T}(\bar{e}_x) = \sigma_x \bar{n} + \tau_{yx} \bar{t}$$

alors l'extrémité T_x du vecteur contrainte $\overline{T}(\bar{e}_x)$ dans le plan de Mohr a comme composante

$$T_x = (\sigma_x, \tau_{yx})$$



Étape 3 : Les scalaires σ_y, τ_{xy} sont les composantes du vecteur contrainte

$$\overline{T}(\bar{e}_y) = \sigma_y \bar{e}_y + \tau_{xy} \bar{e}_x$$

Étape 3 : Les scalaires σ_y, τ_{xy} sont les composantes du vecteur contrainte

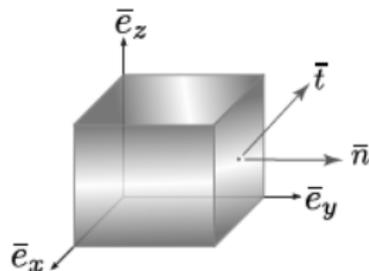
$$\bar{T}(\bar{e}_y) = \sigma_y \bar{e}_y + \tau_{xy} \bar{e}_x$$

Or, compte tenu de l'orientation du vecteur \bar{t} (avec la condition $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_z)$ direct) on a pour cette facette :

$$\bar{n} = \bar{e}_y, \quad \bar{t} = -\bar{e}_x$$

on peut donc écrire

$$\bar{T}(\bar{e}_x) = \sigma_x \bar{n} + -\tau_{yx} \bar{t}$$



Étape 3 : Les scalaires σ_y, τ_{xy} sont les composantes du vecteur contrainte

$$\bar{T}(\bar{e}_y) = \sigma_y \bar{e}_y + \tau_{xy} \bar{e}_x$$

Or, compte tenu de l'orientation du vecteur \bar{t} (avec la condition $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_z)$ direct) on a pour cette facette :

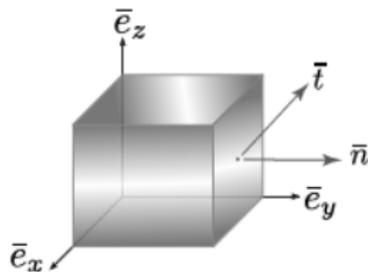
$$\bar{n} = \bar{e}_y, \quad \bar{t} = -\bar{e}_x$$

on peut donc écrire

$$\bar{T}(\bar{e}_x) = \sigma_x \bar{n} + -\tau_{yx} \bar{t}$$

Ainsi l'extrémité T_y du vecteur contrainte $\bar{T}(\bar{e}_y)$ dans le plan de Mohr a comme composante

$$T_y = (\sigma_y, -\tau_{xy})$$



Étape 3 : Les scalaires σ_y, τ_{xy} sont les composantes du vecteur contrainte

$$\bar{T}(\bar{e}_y) = \sigma_y \bar{e}_y + \tau_{xy} \bar{e}_x$$

Or, compte tenu de l'orientation du vecteur \bar{t} (avec la condition $(\bar{n}, \bar{t}, \bar{e}_z)$ direct) on a pour cette facette :

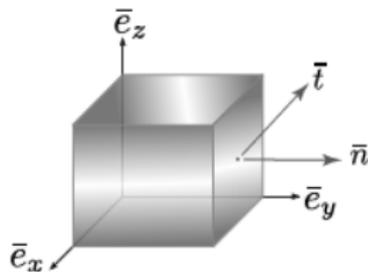
$$\bar{n} = \bar{e}_y, \quad \bar{t} = -\bar{e}_x$$

on peut donc écrire

$$\bar{T}(\bar{e}_x) = \sigma_x \bar{n} + -\tau_{yx} \bar{t}$$

Ainsi l'extrémité T_y du vecteur contrainte $\bar{T}(\bar{e}_y)$ dans le plan de Mohr a comme composante

$$T_y = (\sigma_y, -\tau_{xy})$$



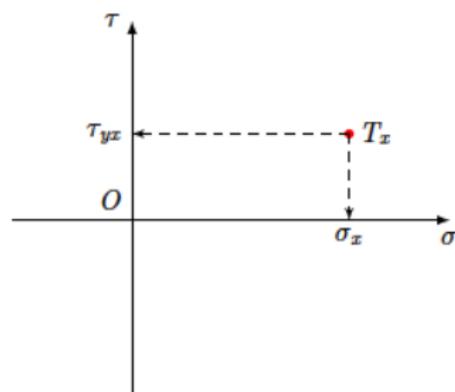
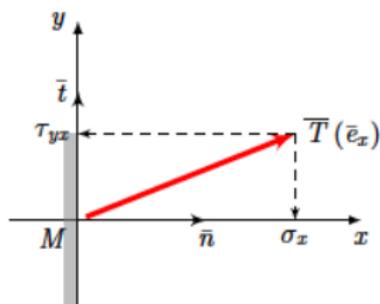
Bilan :

On dispose de 2 points T_x, T_y sur le cercle de Mohr correspondant à 2 facettes tournées de $\pi/2$.

Ces 2 points sont donc diamétralement opposés sur le cercle.

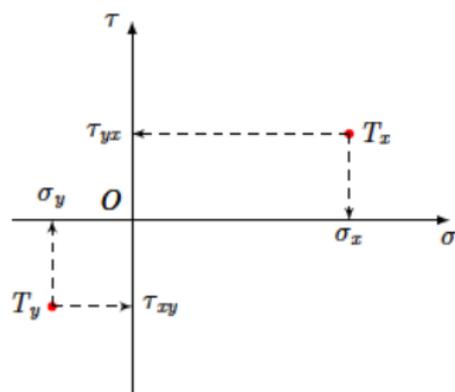
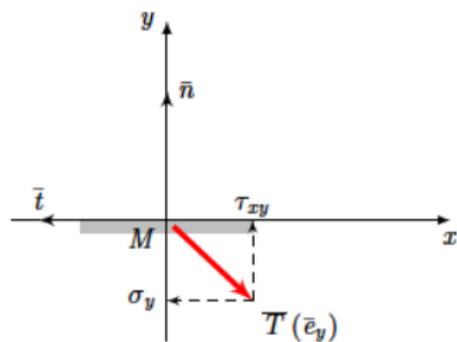
Construction du cercle de Mohr

- On place dans le plan de Mohr les points $T_x = (\sigma_x, \tau_{yx})$



Construction du cercle de Mohr

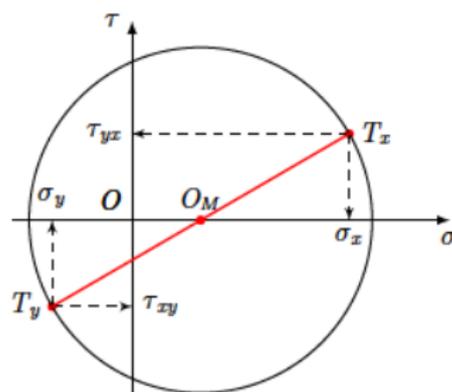
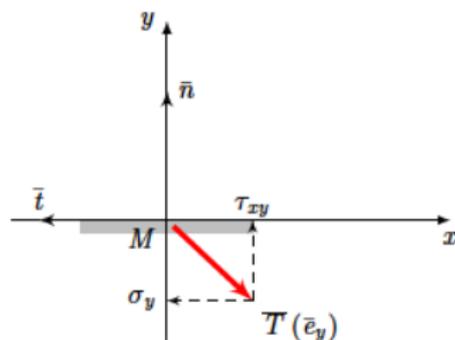
- 1 On place dans le plan de Mohr les points $T_x = (\sigma_x, \tau_{yx})$ et $T_y = (\sigma_y, -\tau_{xy})$.



Construction du cercle de Mohr

- 1 On place dans le plan de Mohr les points $T_x = (\sigma_x, \tau_{yx})$ et $T_y = (\sigma_y, -\tau_{xy})$.
- 2 Ces 2 points forment un diamètre $T_x T_y$; l'intersection de ce diamètre avec l'axe $O\sigma$ marque le centre du cercle de Mohr.

$$O_M = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$$



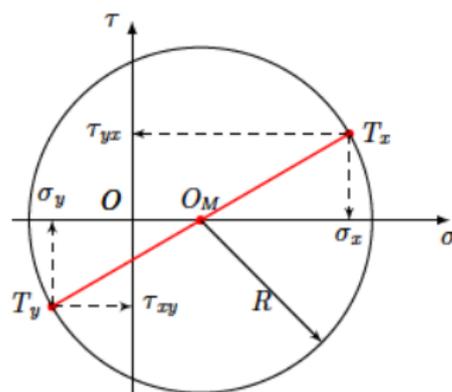
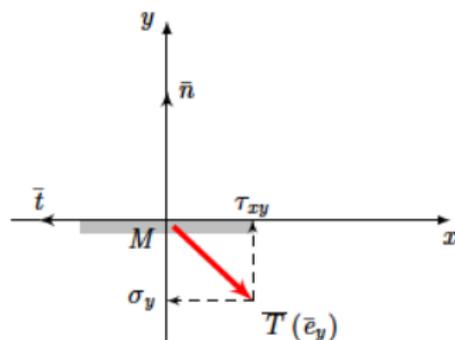
Construction du cercle de Mohr

- 1 On place dans le plan de Mohr les points $T_x = (\sigma_x, \tau_{yx})$ et $T_y = (\sigma_y, -\tau_{xy})$.
- 2 Ces 2 points forment un diamètre $T_x T_y$; l'intersection de ce diamètre avec l'axe $O\sigma$ marque le centre du cercle de Mohr.

$$O_M = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$$

- 3 Le rayon est donné par Pythagore

$$R = \|\overline{O_M T_x}\| = \sqrt{\left(\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right)^2 + \tau_{yx}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{yx}^2}$$



Utilisation pratique du Cercle de Mohr

On connaît les composantes de $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) .

Utilisation pratique du Cercle de Mohr

On connaît les composantes de $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) .

Problème : On cherche à utiliser les propriétés du cercle de Mohr pour déterminer les directions principales Ox_1, Ox_2 et les contraintes principales σ_1, σ_2 .

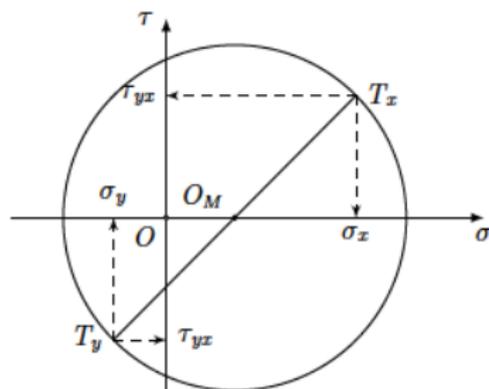
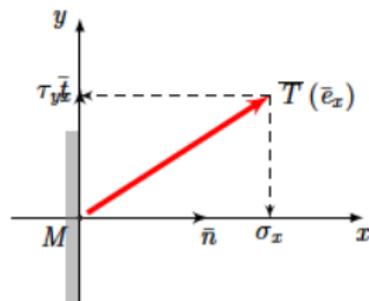
Utilisation pratique du Cercle de Mohr

On connaît les composantes de $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) .

Problème : On cherche à utiliser les propriétés du cercle de Mohr pour déterminer les directions principales Ox_1, Ox_2 et les contraintes principales σ_1, σ_2 .

Solution graphique :

- 1 On trace le cercle selon la méthode indiquée précédemment.



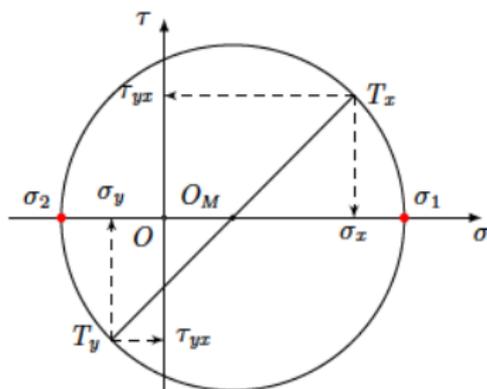
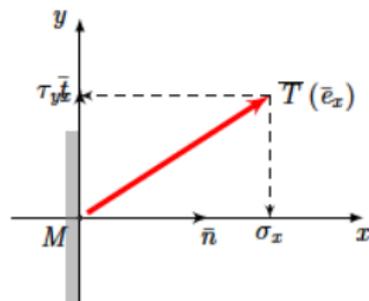
Utilisation pratique du Cercle de Mohr

On connaît les composantes de $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) .

Problème : On cherche à utiliser les propriétés du cercle de Mohr pour déterminer les directions principales Ox_1, Ox_2 et les contraintes principales σ_1, σ_2 .

Solution graphique :

- 1 On trace le cercle selon la méthode indiquée précédemment.
- 2 L'intersection du cercle avec l'axe $O\sigma$ donne σ_2, σ_1 (on ordonne arbitrairement $\sigma_2 \leq \sigma_1$)



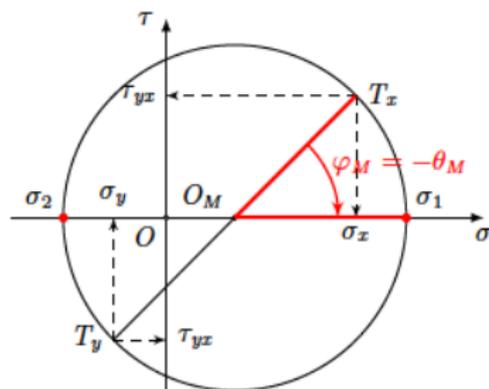
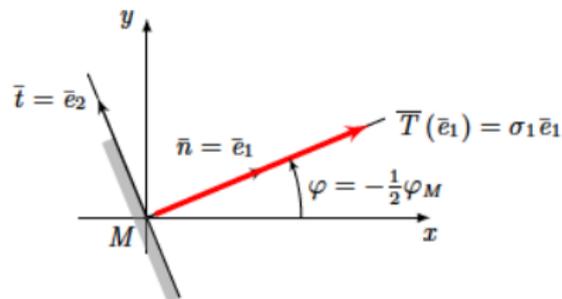
Utilisation pratique du Cercle de Mohr

On connaît les composantes de $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ dans le repère (\bar{e}_x, \bar{e}_y) .

Problème : On cherche à utiliser les propriétés du cercle de Mohr pour déterminer les directions principales Ox_1, Ox_2 et les contraintes principales σ_1, σ_2 .

Solution graphique :

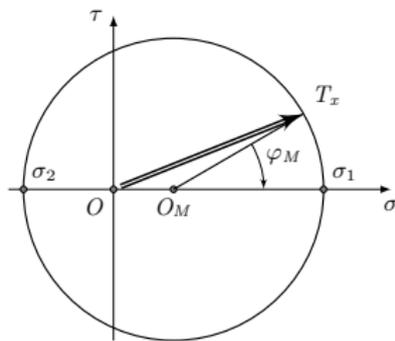
- 1 On trace le cercle selon la méthode indiquée précédemment.
- 2 L'intersection du cercle avec l'axe $O\sigma$ donne σ_2, σ_1 (on ordonne arbitrairement $\sigma_2 \leq \sigma_1$)
- 3 L'angle orienté $\varphi_M = -\theta_M$ dans le plan de Mohr, correspondant $\varphi = -\theta = -\frac{1}{2}\varphi_M = \frac{1}{2}\theta_M$, donne l'angle entre la direction Ox et la direction principale Ox_1 .



Formules déduites du cercle de Mohr

Du cercle de Mohr, on déduit les formules suivantes :

$$\overline{O\sigma_1} = \overline{OO_M} + R; \quad \overline{O\sigma_2} = \overline{OO_M} - R$$



Formules déduites du cercle de Mohr

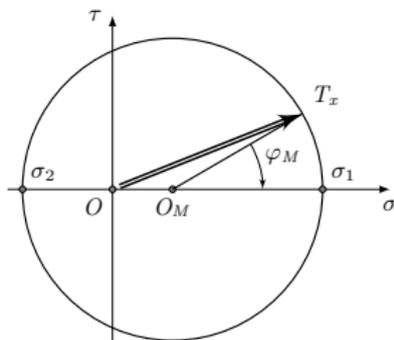
Du cercle de Mohr, on déduit les formules suivantes :

$$\overline{O\sigma_1} = \overline{OO_M} + R; \quad \overline{O\sigma_2} = \overline{OO_M} - R$$

soit

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (24a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (24b)$$



Formules déduites du cercle de Mohr

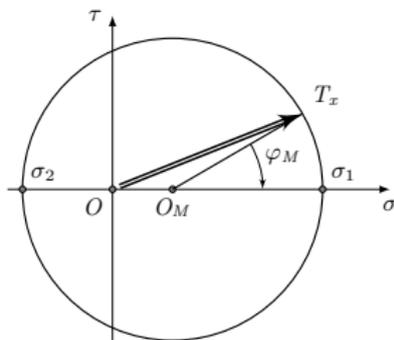
Du cercle de Mohr, on déduit les formules suivantes :

$$\overline{O\sigma_1} = \overline{OO_M} + R; \quad \overline{O\sigma_2} = \overline{OO_M} - R$$

soit

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (24a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (24b)$$



On a de plus

$$\operatorname{tg}(-\varphi_M) = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)}$$

soit

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (25)$$

Formules déduites du cercle de Mohr

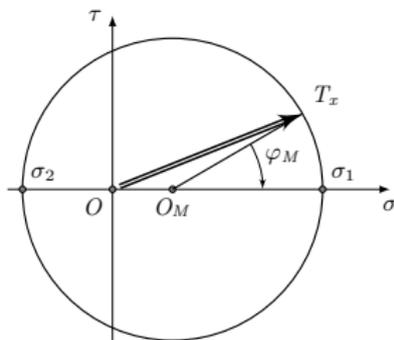
Du cercle de Mohr, on déduit les formules suivantes :

$$\overline{O\sigma_1} = \overline{OO_M} + R; \quad \overline{O\sigma_2} = \overline{OO_M} - R$$

soit

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (24a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (24b)$$



On a de plus

$$\operatorname{tg}(-\varphi_M) = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)}$$

soit

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (25)$$

Remarque :

On peut retrouver les relations (24) en calculant les valeurs propres du tenseur plan $\bar{\sigma}$ qui sont les racines du polynôme caractéristique.

Plan du chapitre

- 1 Directions et contraintes principales
- 2 Représentation de Mohr
- 3 États de contraintes remarquables
- 4 Élasticité plane
- 5 Critères limites d'élasticité**

Problématique

Problématique : pour un état de contrainte quelconque $\bar{\sigma}(M)$, on cherche à savoir si la contrainte limite d'élasticité a été atteinte.

Soit σ_s la limite d'élasticité obtenue expérimentalement lors d'un essai de traction uniaxial (voir TP n°1).

Lorsque l'état de contrainte au point M se réduit à une contrainte uniaxiale σ (scalaire), le critère s'écrit simplement

$$\sigma < \sigma_s$$

Problématique

Problématique : pour un état de contrainte quelconque $\bar{\sigma}(M)$, on cherche à savoir si la contrainte limite d'élasticité a été atteinte.

Soit σ_s la limite d'élasticité obtenue expérimentalement lors d'un essai de traction uniaxial (voir TP n°1).

Lorsque l'état de contrainte au point M se réduit à une contrainte uniaxiale σ (scalaire), le critère s'écrit simplement

$$\sigma < \sigma_s$$

Question : lorsque l'état de contrainte est complexe (plusieurs composantes non nulles) comment comparer $\bar{\sigma}$ à σ_s ?

Invariants de $\bar{\sigma}$

Soit $[\sigma] = (\sigma_{ij})$ la matrice des composantes de $\bar{\sigma}$ dans une base quelconque (\bar{e}_i) .

Comme on la vu précédemment, les contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les racines du polynôme caractéristique :

$$p(\lambda) = \det([\sigma] - \lambda[I]) = -\lambda^3 + I_I \lambda^2 - I_{II} \lambda + I_{III}$$

où

$$I_I = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{ii}$$

$$I_{II} = \frac{1}{2} [(\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}([\sigma]^2)]$$

$$I_{III} = \det[\sigma]$$

Invariants de $\bar{\sigma}$

Soit $[\sigma] = (\sigma_{ij})$ la matrice des composantes de $\bar{\sigma}$ dans une base quelconque (\bar{e}_i) .

Comme on la vu précédemment, les contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les racines du polynôme caractéristique :

$$p(\lambda) = \det([\sigma] - \lambda[I]) = -\lambda^3 + I_I \lambda^2 - I_{II} \lambda + I_{III}$$

où

$$I_I = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{ii}$$

$$I_{II} = \frac{1}{2} [(\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}([\sigma]^2)]$$

$$I_{III} = \det[\sigma]$$

propriété

Les grandeurs I_I, I_{II}, I_{III} sont les **invariants principaux** de $\bar{\sigma}$; ils sont invariant par changement de repère.

Remarque : on peut maintenant justifier que la fonction *trace*, définie par

$$\text{tr}\bar{\sigma} = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{ij},$$

et bien une fonction de tenseurs.

Fonction isotrope d'un tenseur symétrique

Soit une fonction $f : \bar{\sigma} \rightarrow f(\bar{\sigma})$ dans \mathbb{R} . De façon concrète, f dépend $\bar{\sigma}$ à travers ses composantes dans une base \mathcal{R} particulière, autrement dit

$$f(\bar{\sigma}) = f_{\mathcal{R}}(\sigma_{ij}) = f_{\mathcal{R}}([\sigma])$$

Définitions

On dit que f est isotrope si f est invariante dans toute isométrie c'est à dire, si

$$f([\sigma]) = f({}^t[Q][\sigma][Q]), \quad \forall [\sigma], \forall [Q] \text{ rotation}$$

Dans ce cas, on dit que f est fonction du seul tenseur $\bar{\sigma}$.

Fonction isotrope d'un tenseur symétrique

Soit une fonction $f : \bar{\sigma} \rightarrow f(\bar{\sigma})$ dans \mathbb{R} . De façon concrète, f dépend $\bar{\sigma}$ à travers ses composantes dans une base \mathcal{R} particulière, autrement dit

$$f(\bar{\sigma}) = f_{\mathcal{R}}(\sigma_{ij}) = f_{\mathcal{R}}([\sigma])$$

Définitions

On dit que f est isotrope si f est invariante dans toute isométrie c'est à dire, si

$$f([\sigma]) = f({}^t[Q][\sigma][Q]), \quad \forall [\sigma], \forall [Q] \text{ rotation}$$

Dans ce cas, on dit que f est fonction du seul tenseur $\bar{\sigma}$.

Théorème (de représentation)

Une fonction isotrope $f : \bar{\sigma} \rightarrow f(\bar{\sigma})$ dans \mathbb{R} ne dépend que des invariants de $\bar{\sigma}$:

$$f(\bar{\sigma}) = f(I_I(\bar{\sigma}), I_{II}(\bar{\sigma}), I_{III}(\bar{\sigma}))$$

Propriétés des fonctions isotropes

Propriété

Toute fonction $f([\sigma])$ à valeurs réelles qui ne dépend que des valeurs principales de $[\sigma]$ et qui est invariante par permutation circulaire de ses paramètres est isotrope.

Exemples - Les fonction :

$$J_1(\bar{\sigma}) = \text{tr}\bar{\sigma}; \quad J_2(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2}\text{tr}(\bar{\sigma}^2); \quad J_3(\bar{\sigma}) = \frac{1}{3}\text{tr}(\bar{\sigma}^3)$$

$$[\sigma] \rightarrow \sigma_{vM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

sont isotropes.

Propriétés des fonctions isotropes

Propriété

Toute fonction $f([\sigma])$ à valeurs réelles qui ne dépend que des valeurs principales de $[\sigma]$ et qui est invariante par permutation circulaire de ses paramètres est isotrope.

Exemples - Les fonction :

$$J_1(\bar{\sigma}) = \text{tr}\bar{\sigma}; \quad J_2(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2}\text{tr}(\bar{\sigma}^2); \quad J_3(\bar{\sigma}) = \frac{1}{3}\text{tr}(\bar{\sigma}^3)$$

$$[\sigma] \rightarrow \sigma_{vM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

sont isotropes.

Propriété

Les fonctions J_1, J_2, J_3 constituent un jeu d'invariants équivalents aux invariants principaux. Par conséquent, toute fonction isotrope peut s'exprimer en fonction de J_1, J_2, J_3 .

Tenseur déviateur des contraintes

Tout tenseur $\bar{\sigma}$ peut être décomposé en ses parties dites *sphérique* et *déviatorique*.

On introduit pour cela :

la **contrainte moyenne** σ_m :



$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma}$$

Alors la partie sphérique de $\bar{\sigma}$ est, par définition, le tenseur *isotrope*

$$\sigma_m \bar{\mathbf{1}}$$

dont les 3 valeurs propres sont égales à σ_m ; il vérifie $\text{tr}(\sigma_m \bar{\mathbf{1}}) = \text{tr} \bar{\sigma}$

Tenseur déviateur des contraintes

Tout tenseur $\bar{\sigma}$ peut être décomposé en ses parties dites *sphérique* et *déviatorique*.

On introduit pour cela :

la **contrainte moyenne** σ_m :

1

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma}$$

Alors la partie sphérique de $\bar{\sigma}$ est, par définition, le tenseur *isotrope*

$$\sigma_m \bar{\mathbf{1}}$$

dont les 3 valeurs propres sont égales à σ_m ; il vérifie $\text{tr}(\sigma_m \bar{\mathbf{1}}) = \text{tr} \bar{\sigma}$

La **contrainte déviatorique** \bar{s} , appelée aussi *déviateur* de $\bar{\sigma}$, définie par

2

$$\bar{s} = \bar{\sigma} - \sigma_m \bar{\mathbf{1}}$$

Par construction \bar{s} est de trace nulle : $\text{tr} \bar{s} = 0$.

Tenseur déviateur des contraintes

Tout tenseur $\bar{\sigma}$ peut être décomposé en ses parties dites *sphérique* et *déviatorique*.

On introduit pour cela :

la **contrainte moyenne** σ_m :

$$\textcircled{1} \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma}$$

Alors la partie sphérique de $\bar{\sigma}$ est, par définition, le tenseur *isotrope*

$$\sigma_m \bar{\mathbf{1}}$$

dont les 3 valeurs propres sont égales à σ_m ; il vérifie $\text{tr}(\sigma_m \bar{\mathbf{1}}) = \text{tr} \bar{\sigma}$

La **contrainte déviatorique** \bar{s} , appelée aussi *déviateur* de $\bar{\sigma}$, définie par

$$\textcircled{2} \quad \bar{s} = \bar{\sigma} - \sigma_m \bar{\mathbf{1}}$$

Par construction \bar{s} est de trace nulle : $\text{tr} \bar{s} = 0$.

Proposition

Tout tenseur $\bar{\sigma}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\bar{\sigma} = \sigma_m \bar{\mathbf{1}} + \bar{s} \quad \text{avec} \quad \text{tr} \bar{s} = 0$$

Exemple

Soit le tenseur des contraintes uniaxial dans la direction \bar{e}_1 :

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1$$

La contrainte moyenne de $\bar{\sigma}$ est

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma$$

alors

$$\bar{s} = \bar{\sigma} - \sigma_m \bar{\mathbf{1}} = \sigma \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 - \frac{1}{3}\sigma \bar{\mathbf{1}} = \frac{2}{3}\sigma \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 - \frac{1}{3}\sigma (\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3)$$

ou encore, la matrice de ses composantes est

$$[s] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

Critères limites d'élasticité

Définition

*Le domaine d'élasticité (initial) d'un matériau isotrope est défini par la donnée d'une fonction scalaire f du seul tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ appelée **critère limite d'élasticité** ou **fonction seuil**.*

Elle est construite de telle sorte que

$$\begin{cases} f < 0 & \text{représente le domaine des contraintes élastiques} \\ f = 0 & \text{représente la limite d'élasticité initiale} \end{cases}$$

Critères limites d'élasticité

Définition

Le domaine d'élasticité (initial) d'un matériau isotrope est défini par la donnée d'une fonction scalaire f du seul tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ appelée **critère limite d'élasticité** ou **fonction seuil**.

Elle est construite de telle sorte que

$$\begin{cases} f < 0 & \text{représente le domaine des contraintes élastiques} \\ f = 0 & \text{représente la limite d'élasticité initiale} \end{cases}$$

Critère de Rankine :

$$f_R(\bar{\sigma}) = \sup(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) - \sigma_s$$

il correspond au choix de la plus grande contrainte normale.

Critères limites d'élasticité

Définition

Le domaine d'élasticité (initial) d'un matériau isotrope est défini par la donnée d'une fonction scalaire f du seul tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ appelée **critère limite d'élasticité** ou **fonction seuil**.

Elle est construite de telle sorte que

$$\begin{cases} f < 0 & \text{représente le domaine des contraintes élastiques} \\ f = 0 & \text{représente la limite d'élasticité initiale} \end{cases}$$

Critère de Rankine :

$$f_R(\bar{\sigma}) = \sup(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) - \sigma_s$$

il correspond au choix de la plus grande contrainte normale.

Critère de Tresca :

$$f_T(\bar{\sigma}) = \sup(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) - \sigma_s$$

il correspond au choix de la plus grande contrainte tangentielle (avec un facteur 2).

Critère de von Mises :

$$f_{vM}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} - \sigma_s$$

il correspond au choix d'un critère en énergie. En effet, la contrainte de von Mises définie par

$$\sigma_{vM} = f_{vM}(\bar{\sigma})$$

est reliée à l'énergie de déformation élastique.

Ce critère peut aussi s'écrire en fonction des composantes σ_{ij} de $\bar{\sigma}$ dans un repère quelconque :

$$\sigma_{vM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

Critère de von Mises :

$$f_{vM}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} - \sigma_s$$

il correspond au choix d'un critère en énergie. En effet, la contrainte de von Mises définie par

$$\sigma_{vM} = f_{vM}(\bar{\sigma})$$

est reliée à l'énergie de déformation élastique.

Ce critère peut aussi s'écrire en fonction des composantes σ_{ij} de $\bar{\sigma}$ dans un repère quelconque :

$$\sigma_{vM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

On peut montrer que

$$f_{vM}(\bar{\sigma}) = \tilde{f}_{vM}(\bar{s}) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \bar{s}^2} - \sigma_s$$

Chapitre III - Étude des déformations dans un milieu continu

Objectifs :

1. Définir la notion de déformation, géométrique et mathématique
2. Savoir exploiter les méthodes de mesures expérimentales

Sommaire

- 1 Étude des déformations
- 2 Tenseur des petites déformations
- 3 Puissance de déformation volumique
- 4 Changement de repère et déformations principales
- 5 Cercle de Mohr des déformations
- 6 Mesure des déformations par extensométrie

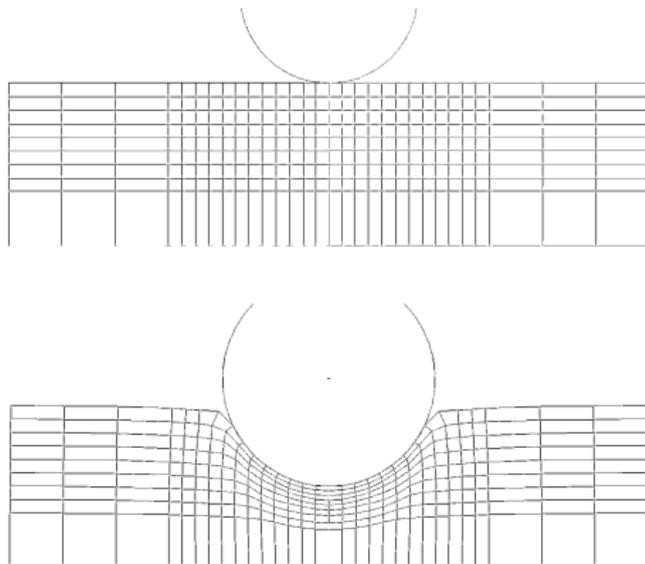
Plan du chapitre

- 1 Étude des déformations
- 2 Tenseur des petites déformations
- 3 Puissance de déformation volumique
- 4 Changement de repère et déformations principales
- 5 Cercle de Mohr des déformations
- 6 Mesure des déformations par extensométrie

Déformation d'un milieu continu

Lorsque l'on applique un chargement à un corps solide, celui-ci se déforme. Pour définir la notion de déformation on doit pouvoir décrire le changement de forme du solide entre deux instants ou deux configurations.

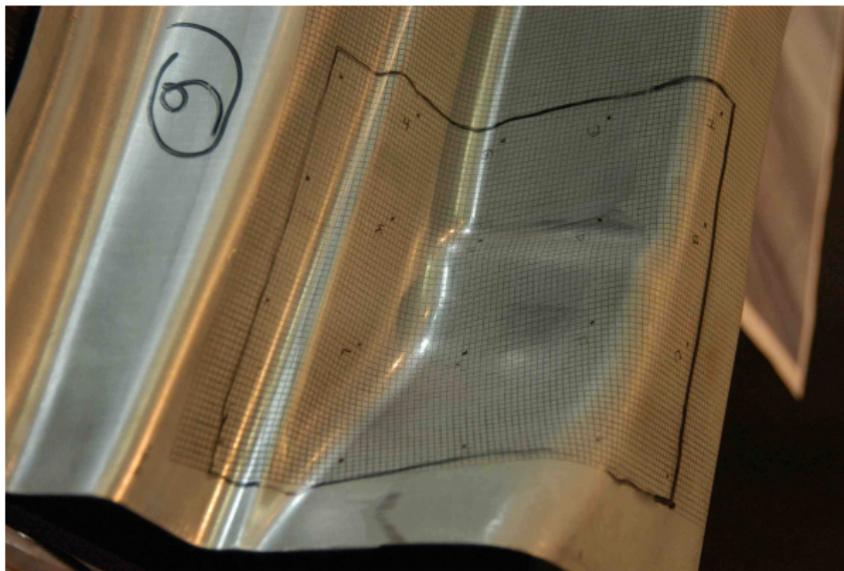
La déformation doit mesurer en quoi la transformation du solide diffère d'un mouvement de corps rigide, ce qui nécessite d'être capable de représenter le mouvement.



Exemples de grandes transformations (pas au programme)

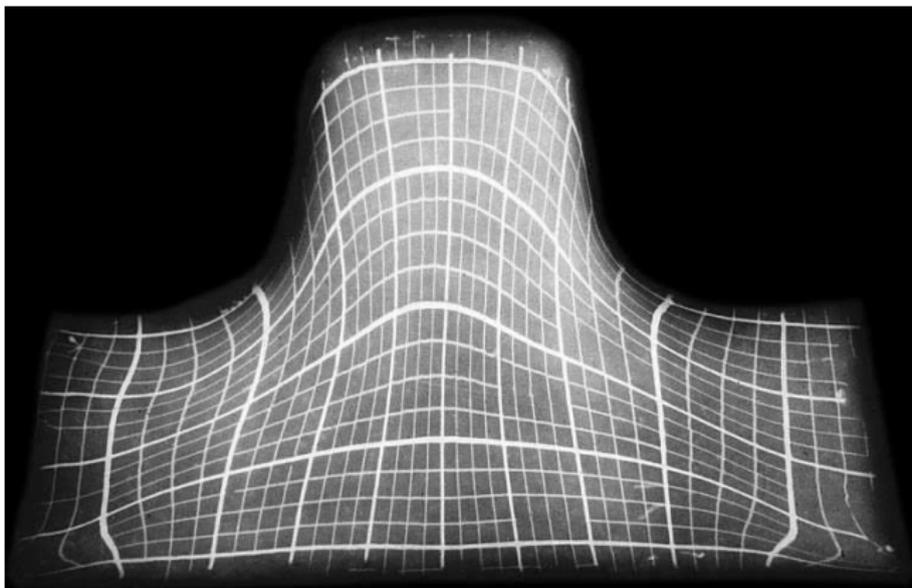
Emboutissage de tôle mince La déformation est repéré au moyen d'une grille rectangulaire dessinée sur la tôle initialement plane.

Les déformations sont irréversibles (plasticité).



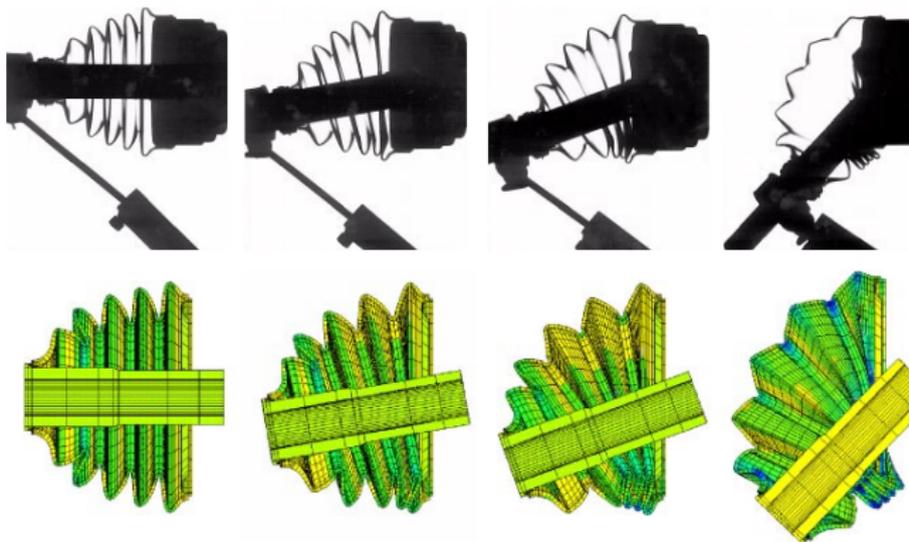
Matricage d'un bloc d'aluminium On peut observer grâce au marquage de la pièce les très grandes déformations.

Comme dans le cas de l'emboutissage, les déformations sont irréversibles (plasticité).



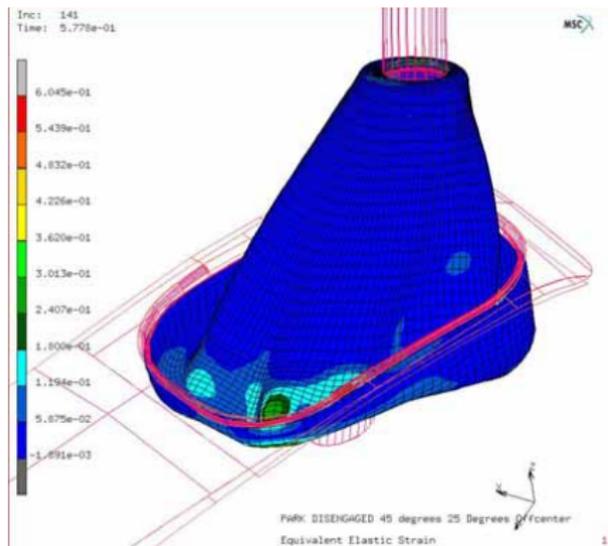
Déformation d'élastomères Les élastomères sont des matériaux très souples qui admettent de grandes déformations tout en restant élastiques (c'est-à-dire réversibles) : ils sont dit *hyperélastique*.

Résultats de calculs sur des soufflets en caoutchouc



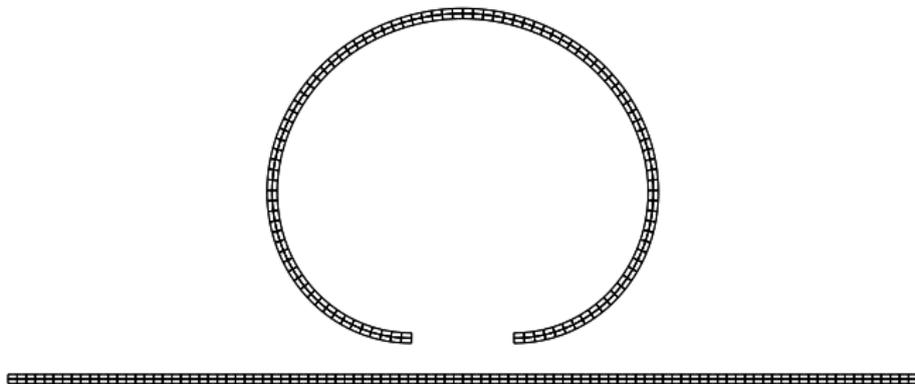
Ces soufflets sont utilisés dans de nombreuses industries de protéger les connexions souples entre les deux organes. Ils sont notamment utilisés dans l'industrie automobile pour protéger les joints d'entraînement.

Soufflet de levier de vitesse

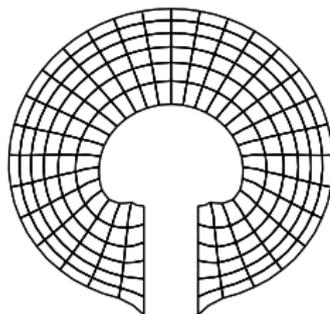
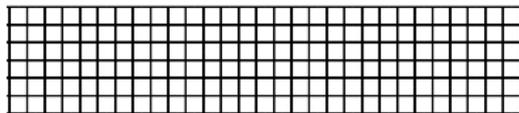


On peut rencontrer des transformations qui conduisent à des grands déplacements mais sans grande déformation.

Cas d'une **structure mince** qui subit de grands déplacements (et rotations) bien que les déformations restent faibles.



Cas d'une **structure est épaisse** : la même transformation entraîne de grandes déformations.

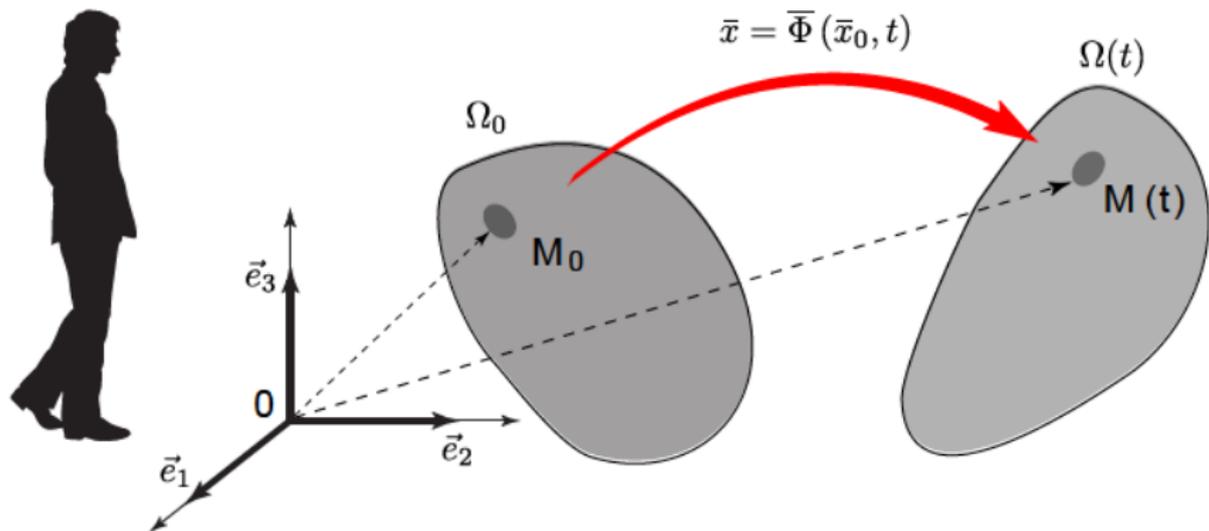


Transformation d'un milieu continu

La position d'un point matériel M_0 , dans la configuration de référence Ω_0 , est repérée par le vecteur position

$$\bar{x}_0 = \overline{OM_0}$$

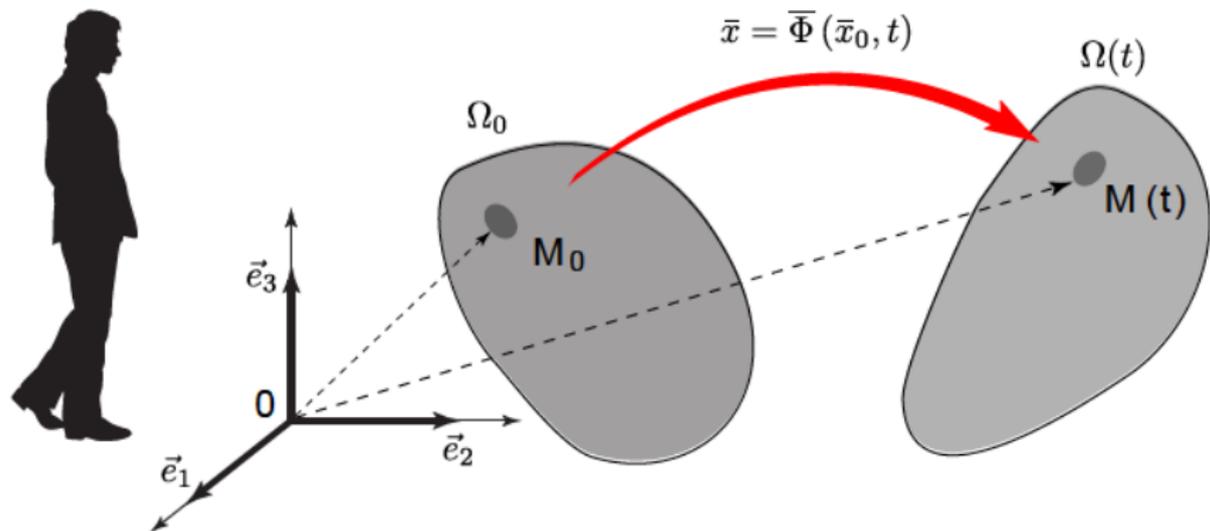
A l'instant t , après transformation, ce même point matériel se retrouve à la position repérée par le point M .



Transformation d'un milieu continu

On suppose qu'il existe une fonction continue et dérivable $\bar{\Phi}(\bar{x}_0, t)$ telle qu'à chaque instant t , la position d'un point quelconque M_0 est donnée par

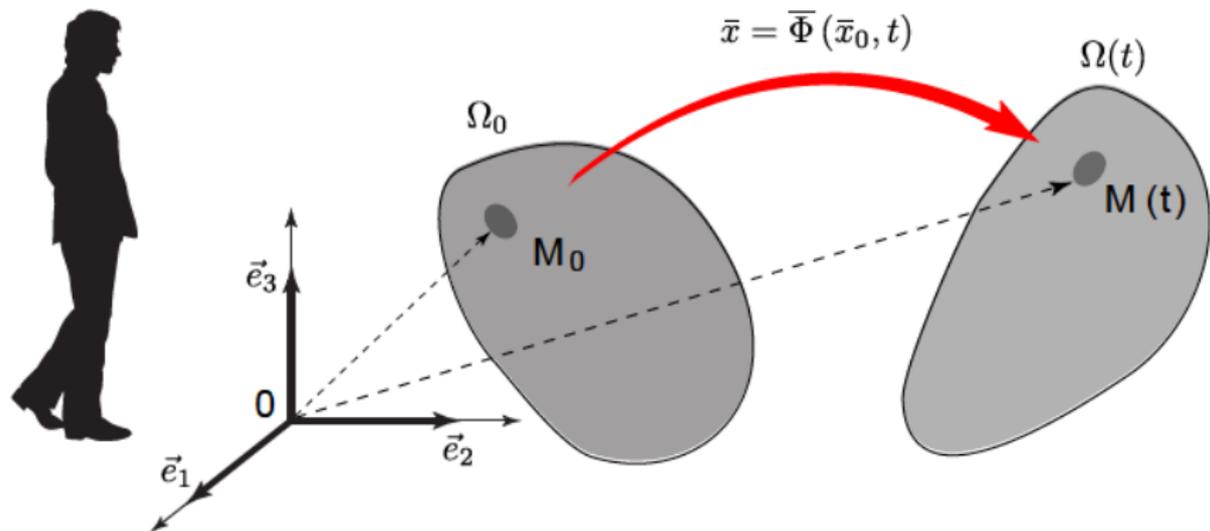
$$\bar{x} = \overline{OM} = \bar{\Phi}(\bar{x}_0, t)$$



Transformation d'un milieu continu

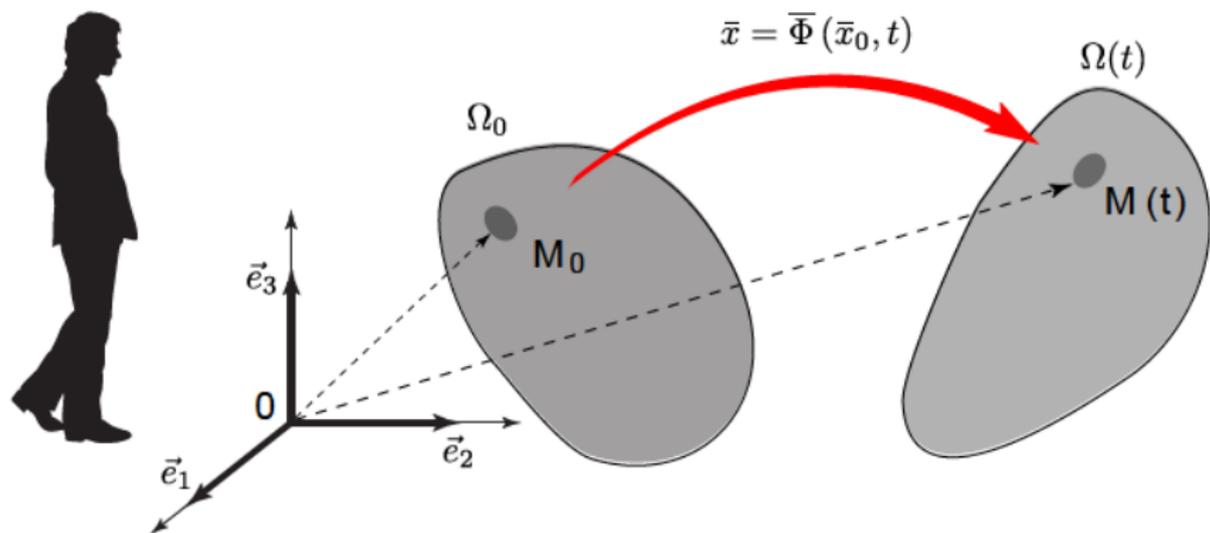
On définit le vecteur déplacement du point M_0 par

$$\bar{u} = \overline{OM} - \overline{OM}_0 = \bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{\Phi}(\bar{x}_0, t) - \bar{x}_0$$



Transformation d'un milieu continu

La fonction $\bar{\phi}$ permet de caractériser la position (et donc le déplacement du milieu continu) mais pas sa déformation, c'est-à-dire la variation locale de longueur et la distorsion.



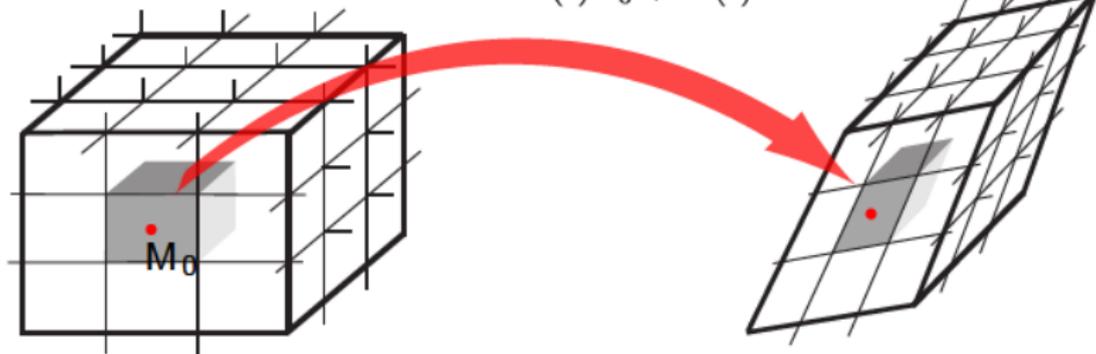
Cas des transformations homogènes

On considère une transformation affine de la forme :

$$\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x} = \bar{\phi}(\bar{x}_0, t) = \bar{\bar{F}}(t) \bar{x}_0 + \bar{C}(t)$$

où \bar{C} est un vecteur et $\bar{\bar{F}}$ un tenseur d'ordre 2.

$$\bar{x} = \bar{\bar{F}}(t) \bar{x}_0 + \bar{C}(t)$$



Le tenseur $\bar{\bar{F}}$ peut être représenté par une matrice 3×3 dans une base donnée. Cette transformation est identique dans tout le solide.

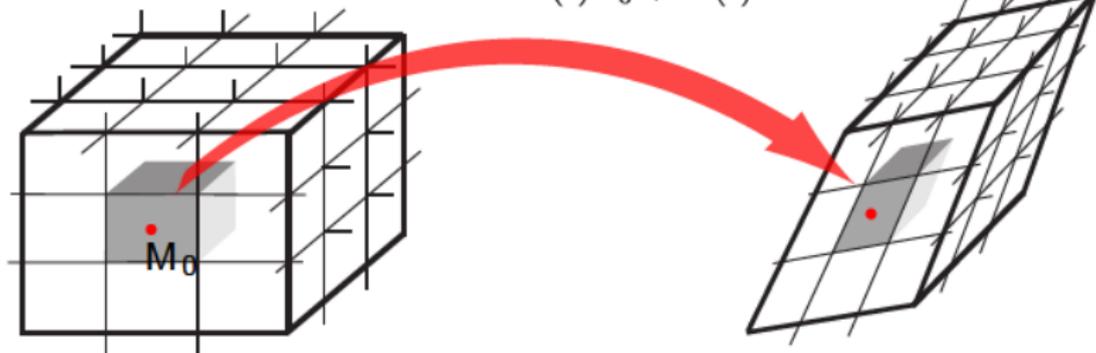
Cas des transformations homogènes

On considère une transformation affine de la forme :

$$\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x} = \bar{\phi}(\bar{x}_0, t) = \bar{\bar{F}}(t) \bar{x}_0 + \bar{C}(t)$$

où \bar{C} est un vecteur et $\bar{\bar{F}}$ un tenseur d'ordre 2.

$$\bar{x} = \bar{\bar{F}}(t) \bar{x}_0 + \bar{C}(t)$$



Le tenseur $\bar{\bar{F}}$ peut être représenté par une matrice 3×3 dans une base donnée. Cette transformation est identique dans tout le solide.

On peut montrer que la dilatation volumique est donnée par

$$\frac{V}{V_0} = \det \bar{\bar{F}}$$

(26)

Transport d'un vecteur

On cherche à mesurer le transport d'un segment matériel de la configuration initiale à la configuration à l'instant t .



Transport d'un vecteur

On considère pour cela 2 points matériels M_0, M'_0 . On note respectivement M, M' les points transformés.

Calculons la transformée du vecteur $\overline{M_0 M'_0}$, on a

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{F}(t) \left(\overline{OM'_0} - \overline{OM_0} \right) = \overline{F}(t) \overline{M_0 M'_0}$$



Transport d'un vecteur

On considère pour cela 2 points matériels M_0, M'_0 . On note respectivement M, M' les points transformés.

Calculons la transformée du vecteur $\overline{M_0M'_0}$, on a

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{F}(t) (\overline{OM'_0} - \overline{OM_0}) = \overline{F}(t) \overline{M_0M'_0}$$

Ainsi, la transformée d'un vecteur \bar{u}_0 est donnée par

$$\bar{u} = \overline{F}(t) \bar{u}_0 \quad (27)$$



Tenseur des dilatations

Mesurer une dilatation nécessite de savoir mesurer la longueur d'un vecteur et donc de connaître la transformée d'un produit scalaire.



Tenseur des dilatations

Mesurer une dilatation nécessite de savoir mesurer la longueur d'un vecteur et donc de connaître la transformée d'un produit scalaire.

Soient 2 vecteurs \bar{u}_0, \bar{v}_0 et les vecteurs transformés selon la formule :

$$\bar{u} = \overline{\overline{F}} \bar{u}_0, \quad \bar{v} = \overline{\overline{F}} \bar{v}_0$$

On a ainsi

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \overline{\overline{F}} \bar{u}_0 \cdot \overline{\overline{F}} \bar{v}_0 = \bar{u}_0 \cdot \overleftarrow{\overline{\overline{F}}} \bar{v}_0$$



Le tenseur

$$\overline{\overline{C}} = {}^t\overline{\overline{F}}\overline{\overline{F}} \quad (28)$$

est appelé le tenseur des dilatations. C'est un tenseur symétrique ($\overline{\overline{C}} = {}^t\overline{\overline{C}}$).

Il permet d'exprimer le produit scalaire des vecteurs transportés en fonction des vecteurs initiaux selon la formule :

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}_0 \overline{\overline{C}} \bar{v}_0$$

Dilatation dans une direction

Il s'agit de comparer la longueur d'un vecteur \bar{u}_0 dans la configuration initiale et la longueur de son transporté dans la configuration déformée.

En faisant $\bar{u}_0 = \bar{v}_0$ dans la formule du transport du produit scalaire, on obtient

$$|\bar{u}|^2 = \bar{u}_0 \bar{C} \bar{u}_0$$

Dilatation dans une direction

Il s'agit de comparer la longueur d'un vecteur \bar{u}_0 dans la configuration initiale et la longueur de son transporté dans la configuration déformée.

En faisant $\bar{u}_0 = \bar{v}_0$ dans la formule du transport du produit scalaire, on obtient

$$|\bar{u}|^2 = \bar{u}_0 \bar{C} \bar{u}_0$$

Définition

On appelle *dilatation dans la direction* \bar{u}_0 le rapport :

$$\lambda(\bar{u}_0) = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{u}_0|} = \frac{\sqrt{\bar{u}_0 \bar{C} \bar{u}_0}}{|\bar{u}_0|}$$

Dilatation dans une direction

Il s'agit de comparer la longueur d'un vecteur \bar{u}_0 dans la configuration initiale et la longueur de son transporté dans la configuration déformée.

En faisant $\bar{u}_0 = \bar{v}_0$ dans la formule du transport du produit scalaire, on obtient

$$|\bar{u}|^2 = \bar{u}_0 \bar{C} \bar{u}_0$$

Définition

On appelle *dilatation dans la direction* \bar{u}_0 le rapport :

$$\lambda(\bar{u}_0) = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{u}_0|} = \frac{\sqrt{\bar{u}_0 \bar{C} \bar{u}_0}}{|\bar{u}_0|}$$

Définition

On appelle *allongement unitaire dans la direction* \bar{u}_0 la grandeur :

$$\delta(\bar{u}_0) = \frac{|\bar{u}| - |\bar{u}_0|}{|\bar{u}_0|} = \lambda(\bar{u}_0) - 1$$

Glissement dans un couple de directions orthogonales

La variation de longueur induit des variations angulaires. On s'intéresse en particulier à la variation de l'angle de deux vecteurs matériels initialement orthogonaux.

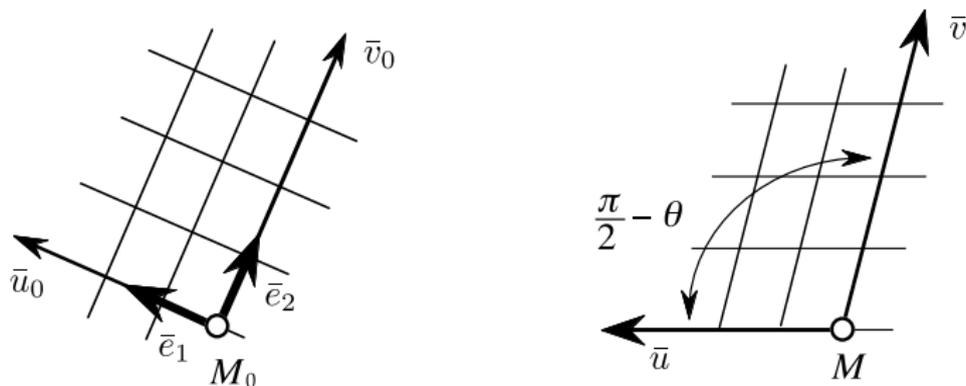
Définition

On définit le **glissement** θ de deux directions orthogonales \bar{u}_0, \bar{v}_0 par :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - (\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}_0, \bar{v}_0) - (\bar{u}, \bar{v})$$

autrement dit

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\pi}{2} - \theta$$



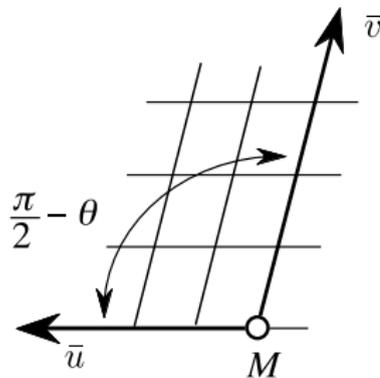
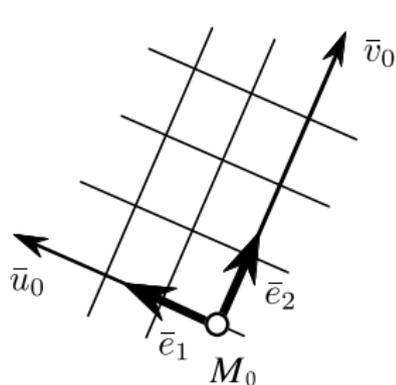
Glissement dans un couple de directions orthogonales

En utilisant ce qui précède et la formule du transport du produit scalaire, on a

$$\sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|} = \frac{\bar{u}_0 \bar{C} \bar{v}_0}{\left(\bar{u}_0 \bar{C} \bar{u}_0\right)^{1/2} \left(\bar{v}_0 \bar{C} \bar{v}_0\right)^{1/2}}$$

d'où la relation

$$\sin \theta = \frac{\bar{u}_0 \bar{C} \bar{v}_0}{\left(\bar{u}_0 \bar{C} \bar{u}_0\right)^{1/2} \left(\bar{v}_0 \bar{C} \bar{v}_0\right)^{1/2}}$$



Dilatations principales

Le tenseur $\overline{\overline{C}}$ étant symétrique, il est toujours possible de construire une base orthogonale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ orientée selon les directions principales.

La matrice des composantes de $\overline{\overline{C}}$ dans cette base est alors diagonale ; elle s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

où les C_i sont les valeurs propres.

Dilatations principales

Le tenseur $\overline{\overline{C}}$ étant symétrique, il est toujours possible de construire une base orthogonale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ orientée selon les directions principales.

La matrice des composantes de $\overline{\overline{C}}$ dans cette base est alors diagonale ; elle s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

où les C_i sont les valeurs propres.

Les C_i étant positifs (la forme quadratique associée $\bar{u}_0 \rightarrow \bar{u}_0 \overline{\overline{C}} \bar{u}_0 = |\bar{u}|^2$ est définie positive) on peut définir les grandeurs

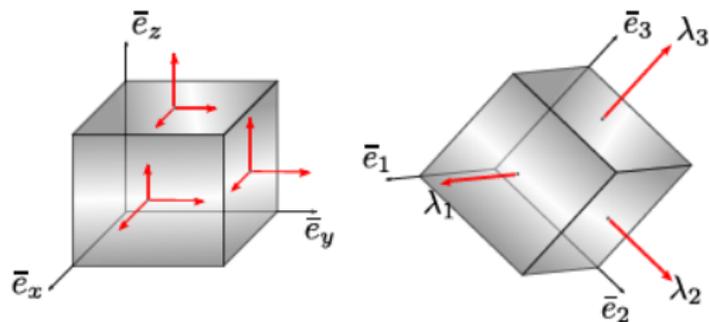
$$\lambda_i = \sqrt{C_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

On a alors

$$\lambda(\bar{e}_i) = \sqrt{\bar{e}_i \bar{C} \bar{e}_i} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3$$

ainsi λ_i représente la dilatation dans la direction principale \bar{e}_i .

Pour cette raison, les λ_i sont appelées les dilatations principales.

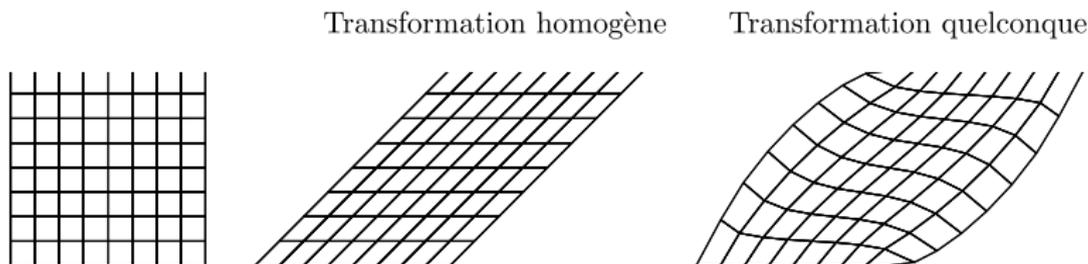


Transformations quelconques

Question :

Dans le cas général d'une transformation $\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x} = \bar{\Phi}(\bar{x}_0, t)$ quelconque,

- 1 quel sens peut on donner au transport d'un segment matériel
- 2 comment définir la notion de dilatation ?



Soient une transformation $\bar{\Phi}$ et 2 vecteur \bar{x}_0 et \bar{x}'_0 , on a

$$\overline{OM} = \bar{x} = \bar{\phi}(\bar{x}_0), \quad \overline{OM}' = \bar{x}' = \bar{\phi}(\bar{x}'_0)$$

En réalisant un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de \bar{x}_0 , on peut écrire

$$\begin{aligned} \overline{MM}' &= \overline{OM}' - \overline{OM} = \bar{\Phi}(\bar{x}'_0) - \bar{\Phi}(\bar{x}_0) \\ &\simeq \overline{\overline{\nabla\Phi}}(\bar{x}_0) (\bar{x}'_0 - \bar{x}_0) \\ &\simeq \overline{\overline{\nabla\Phi}}(\bar{x}_0) \overline{M_0M}'_0 \end{aligned}$$

Soient une transformation $\bar{\Phi}$ et 2 vecteur \bar{x}_0 et \bar{x}'_0 , on a

$$\overline{OM} = \bar{x} = \bar{\phi}(\bar{x}_0), \quad \overline{OM}' = \bar{x}' = \bar{\phi}(\bar{x}'_0)$$

En réalisant un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de \bar{x}_0 , on peut écrire

$$\begin{aligned} \overline{MM}' &= \overline{OM}' - \overline{OM} = \bar{\Phi}(\bar{x}'_0) - \bar{\Phi}(\bar{x}_0) \\ &\simeq \overline{\nabla\bar{\Phi}}(\bar{x}_0)(\bar{x}'_0 - \bar{x}_0) \\ &\simeq \overline{\nabla\bar{\Phi}}(\bar{x}_0)\overline{M_0M'_0} \end{aligned}$$

On note $\overline{\bar{F}}(\bar{x}_0) = \overline{\nabla\bar{\Phi}}(\bar{x}_0)$ le tenseur de composante $\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial x_{ij}}$.

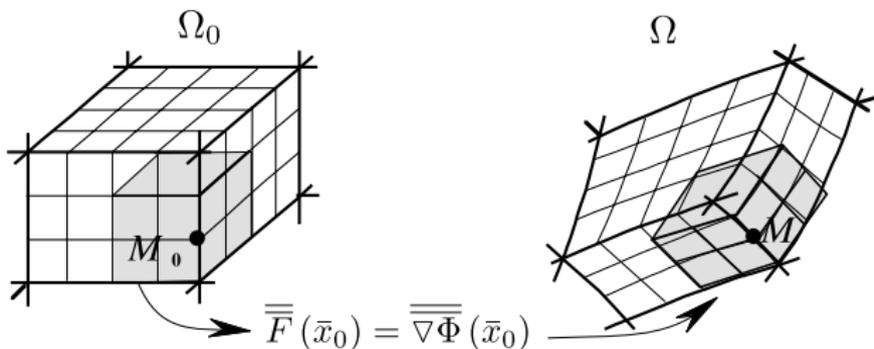
D'après ce qui précède, on a la relation

$$\overline{dx} = \overline{\bar{F}}(\bar{x}_0)\overline{dx_0} \quad (29)$$

Cette relation est l'analogie de la formule du transport d'un vecteur, valable seulement pour les transformations homogènes.

La déformation est une notion locale. Cela nécessite de se placer au niveau d'un point M_0 et de prendre la transformation tangente.

Il faut donc considérer un petit élément de volume autour de M_0 .



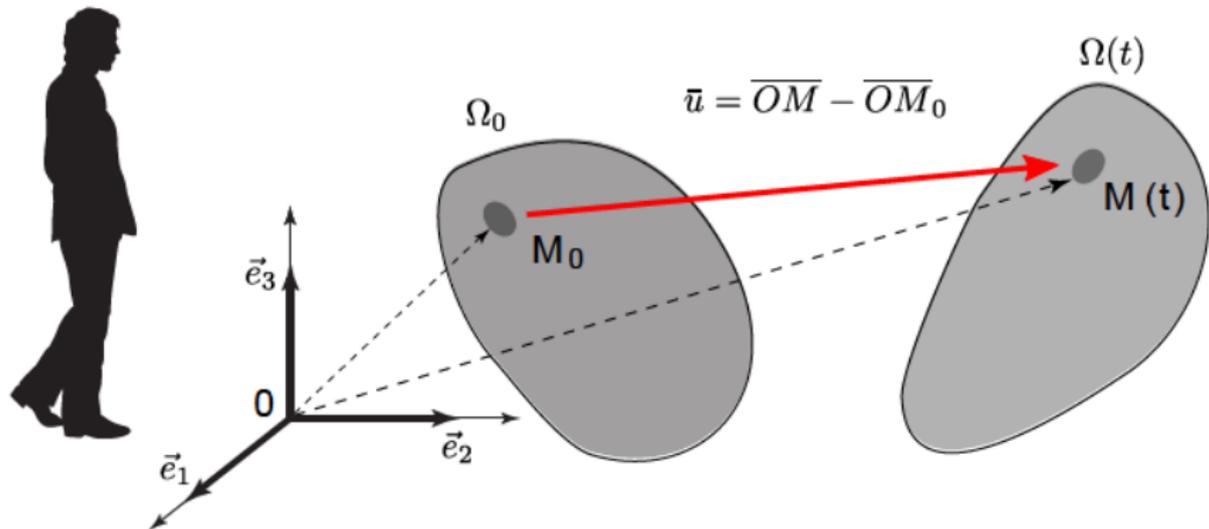
Soit \bar{u} le vecteur déplacement défini par

$$\bar{u}(\bar{x}_0) = \overline{OM} - \overline{OM}_0 = \bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{\Phi}(\bar{x}_0, t) - \bar{x}_0$$

on a alors la relation

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}_0 \bar{\bar{C}} \bar{v}_0$$

où $\bar{\bar{I}}$ désigne le tenseur unité.



Tenseurs des déformation

Il y a plusieurs choix possibles pour définir un tenseur des déformations. Celui-ci doit vérifier plusieurs conditions :

- 1 le tenseur doit être symétrique.
- 2 il doit conduire à une mesure nulle pour tout mouvement de corps rigide (combinaison d'une rotation et d'une translation).

Tenseurs des déformation

Il y a plusieurs choix possibles pour définir un tenseur des déformations. Celui-ci doit vérifier plusieurs conditions :

- 1 le tenseur doit être symétrique.
- 2 il doit conduire à une mesure nulle pour tout mouvement de corps rigide (combinaison d'une rotation et d'une translation).

Définition

Le tenseur défini par

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{1}}) = \frac{1}{2} (\overline{\overline{F}} \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{1}})$$

est appelé le tenseur de **Green-Lagrange**.

Tenseurs des déformation

Il y a plusieurs choix possibles pour définir un tenseur des déformations. Celui-ci doit vérifier plusieurs conditions :

- ① le tenseur doit être symétrique.
- ② il doit conduire à une mesure nulle pour tout mouvement de corps rigide (combinaison d'une rotation et d'une translation).

Définition

Le tenseur défini par

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) = \frac{1}{2} (\overline{\overline{F}} \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}})$$

est appelé le tenseur de **Green-Lagrange**.

Proposition

$\overline{\overline{E}}$ est symétrique et nul pour tout mouvement de corps rigide. Il peut également s'écrire en fonction de $\overline{\overline{\nabla u}}$:

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\nabla u}} + \overline{\overline{\nabla u}}) + \frac{1}{2} \overline{\overline{\nabla u}} \overline{\overline{\nabla u}}$$

Remarque : la relation $\bar{u} \rightarrow \bar{\bar{E}}(\bar{u})$ est non linéaire du fait de la présence du terme quadratique $\overleftarrow{\nabla u} \overleftarrow{\nabla u}$

Remarque : la relation $\bar{u} \rightarrow \overline{\overline{E}}(\bar{u})$ est non linéaire du fait de la présence du terme quadratique $\overline{\overline{\nabla u \nabla u}}$

De la formule du transport d'un produit scalaire on tire la relation

$$\bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{u}_0 \cdot \bar{v}_0 = 2\bar{u}_0 \overline{\overline{E}} \bar{v}_0$$

et si l'on prend $\bar{v}_0 = \bar{u}_0$ on obtient

$$|\bar{u}|^2 - |\bar{u}_0|^2 = 2\bar{u}_0 \overline{\overline{E}} \bar{u}_0$$

Les formules donnant la dilatation, l'allongement unitaire et le glissement peuvent s'exprimer en fonction de $\overline{\overline{E}}$.

En particulier, la dilatation d'un vecteur \bar{u}_0 s'écrit

$$\lambda(\bar{u}_0) = \sqrt{1 + 2 \frac{\bar{u}_0 \overline{\overline{E}} \bar{u}_0}{|\bar{u}_0|^2}}$$

Plan du chapitre

- 1 Étude des déformations
- 2 Tenseur des petites déformations**
- 3 Puissance de déformation volumique
- 4 Changement de repère et déformations principales
- 5 Cercle de Mohr des déformations
- 6 Mesure des déformations par extensométrie

Hypothèse des petites perturbations (HPP)

Définition

La transformation est dite infinitésimale si

$$\left\| \overline{\nabla u}(\bar{x}_0) \right\| \ll 1 \text{ pour tout } \bar{x}_0 \in \Omega_0$$

Hypothèse des petites perturbations (HPP)

Définition

La transformation est dite infinitésimale si

$$\left\| \overline{\nabla u}(\bar{x}_0) \right\| \ll 1 \text{ pour tout } \bar{x}_0 \in \Omega_0$$

Cette condition est équivalente à la condition

$$\overline{F}(\bar{x}_0) = o\left(\overline{1}\right)$$

Sous cette hypothèse, l'application $\bar{u}_0 \rightarrow \overline{E}(\bar{u}_0)$ peut être linéarisée en partant de l'expression du tenseur de **Green-Lagrange** :

$$\overline{E}(\bar{x}_0) = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + \overleftarrow{\nabla u} \right) + o\left(\overline{\nabla u}\right) = \overline{\varepsilon} + o\left(\overline{\nabla u}\right)$$

Définition

Le tenseur

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + {}^t \overline{\nabla u} \right)$$

est appelé le **tenseur des petites déformations**.

Ce tenseur vérifie

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{\varepsilon}} + o \left(\overline{\nabla u} \right) \simeq \bar{\bar{\varepsilon}}$$

de plus

$$\|\bar{\bar{\varepsilon}}\| \ll 1$$

Définition

Le tenseur

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + \overline{\nabla u}^t \right)$$

est appelé le **tenseur des petites déformations**.

Ce tenseur vérifie

$$\bar{E} = \bar{\bar{\varepsilon}} + o\left(\overline{\nabla u}\right) \simeq \bar{\bar{\varepsilon}}$$

de plus

$$\|\bar{\bar{\varepsilon}}\| \ll 1$$

Si l'on se place dans une base orthonormée (\bar{e}_i) , et en notant $\bar{u} = (u_i)$ les composantes du vecteur \bar{u} dans cette base, les composantes de ce tenseur dans une base orthonormée sont

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Ces composantes peuvent être écrites sous la formes de la matrice symétrique

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

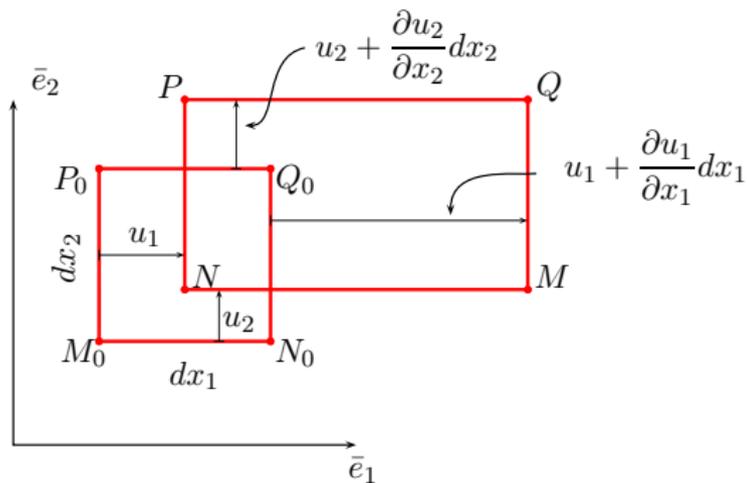
Extensions simples dans le plan (\bar{e}_1, \bar{e}_2)

L'extension simple dans le plan (\bar{e}_1, \bar{e}_2) est caractérisée par les 2 composantes normales

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

ce qui correspond à la matrice 2×2 diagonale

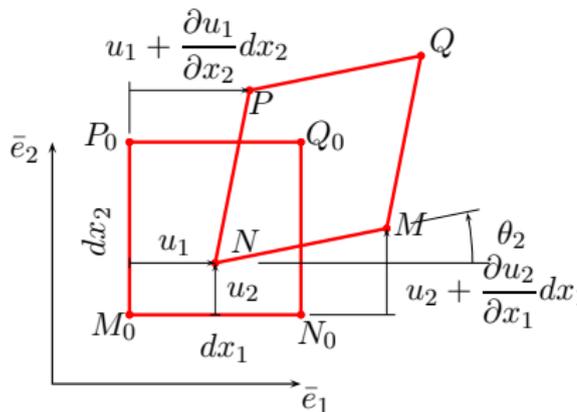
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$



Glissement double selon les directions \bar{e}_1 et \bar{e}_2

Le glissement double est caractérisé par les 2 composantes tangentielles

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$



$$\theta_1 \simeq \tan \theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\theta_2 \simeq \tan \theta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Le glissement des 2 directions \bar{e}_1 et \bar{e}_2 est donné par

$$\gamma(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 2\epsilon_{12} = 2\epsilon_{21}$$

ce glissement est noté γ_{12} . On introduit ainsi les 6 glissements :

$$\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}, \quad i \neq j$$

Propriétés du tenseurs des petites déformations

On peut montrer à partir des formules du cours que l'allongement unitaire et le glissement peuvent être approchés par des expressions fonction de $\bar{\bar{\epsilon}}$.

Propriétés du tenseurs des petites déformations

On peut montrer à partir des formules du cours que l'allongement unitaire et le glissement peuvent être approchés par des expressions fonction de $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

L'**allongement unitaire** δ d'un vecteur élémentaire $\overline{dM}_0 = ds_0 \overline{dM}_0 / |\overline{dM}_0|$ peut être calculé par la relation :

$$\delta (\overline{dM}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \simeq \frac{\overline{dM}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \overline{dM}_0}{|\overline{dM}_0|^2}$$

ou encore, si on note $\bar{n}_0 = \overline{dM}_0 / |\overline{dM}_0|$,

$$\delta (\overline{dM}_0) \simeq \bar{n}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{n}_0 = {}^t\{n_0\} [\varepsilon] \{n_0\}$$

Propriétés du tenseurs des petites déformations

On peut montrer à partir des formules du cours que l'allongement unitaire et le glissement peuvent être approchés par des expressions fonction de $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

L'**allongement unitaire** δ d'un vecteur élémentaire $\overline{dM}_0 = ds_0 \overline{dM}_0 / |\overline{dM}_0|$ peut être calculé par la relation :

$$\delta(\overline{dM}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \simeq \frac{\overline{dM}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \overline{dM}_0}{|\overline{dM}_0|^2}$$

ou encore, si on note $\bar{n}_0 = \overline{dM}_0 / |\overline{dM}_0|$,

$$\delta(\overline{dM}_0) \simeq \bar{n}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{n}_0 = {}^t\{n_0\} [\varepsilon] \{n_0\}$$

Le **glissement** θ de deux directions orthogonales $\overline{dM}_0, \overline{dM}'_0$ peut être calculé par la relation :

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \simeq \text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Propriétés du tenseur des petites déformations

On peut montrer à partir des formules du cours que l'allongement unitaire et le glissement peuvent être approchés par des expressions fonction de $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

L'**allongement unitaire** δ d'un vecteur élémentaire $\overline{dM}_0 = ds_0 \overline{dM}_0 / |\overline{dM}_0|$ peut être calculé par la relation :

$$\delta(\overline{dM}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \simeq \frac{\overline{dM}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \overline{dM}_0}{|\overline{dM}_0|^2}$$

ou encore, si on note $\bar{n}_0 = \overline{dM}_0 / |\overline{dM}_0|$,

$$\delta(\overline{dM}_0) \simeq \bar{n}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{n}_0 = {}^t\{n_0\} [\varepsilon] \{n_0\}$$

Le **glissement** θ de deux directions orthogonales $\overline{dM}_0, \overline{dM}'_0$ peut être calculé par la relation :

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \simeq \text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

La **variation relative de volume** $\varepsilon_V(M_0)$ au point M_0 peut être approchée par

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \simeq \text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Démonstration

Démonstration de la formule

$$\delta(\bar{n}_0) \simeq \bar{n}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{n}_0 = {}^t\{n_0\} [\varepsilon] \{n_0\}$$

pour un vecteur unitaire \bar{n}_0 .

On a vu précédemment que

$$\lambda(\bar{u}_0) = \sqrt{1 + 2 \frac{\bar{u}_0 \bar{\bar{E}} \bar{u}_0}{|\bar{u}_0|^2}}$$

or on a, à l'ordre 1,

$$\bar{\bar{E}} \simeq \bar{\bar{\varepsilon}} \text{ et } \|\bar{\bar{\varepsilon}}\| \ll 1$$

alors, si on considère un vecteur élémentaire \bar{u}_0 , on peut écrire

$$\lambda(\bar{u}_0) \simeq \sqrt{1 + 2 \frac{\bar{u}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{u}_0}{|\bar{u}_0|^2}} \simeq 1 + \frac{\bar{u}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{u}_0}{|\bar{u}_0|^2}$$

Comme $\delta(\bar{u}_0) = \lambda(\bar{u}_0) - 1$, on obtient la formule demandée :

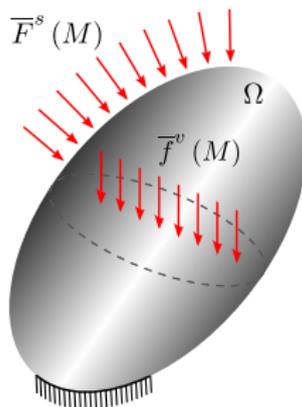
$$\delta(\bar{u}_0) \simeq \frac{\bar{u}_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{u}_0}{|\bar{u}_0|^2}$$

Plan du chapitre

- 1 Étude des déformations
- 2 Tenseur des petites déformations
- 3 Puissance de déformation volumique**
- 4 Changement de repère et déformations principales
- 5 Cercle de Mohr des déformations
- 6 Mesure des déformations par extensométrie

Puissance de déformation volumique

On considère un corps Ω soumis aux systèmes de forces surfacique \overline{F}^s et volumique \overline{f}^v .



On cherche à déterminer la puissance volumique (par unité de volume) des efforts intérieurs Π_{def}

Puissance des forces surfaciques

La puissance des forces surfaciques \overline{F}^S qui s'exercent sur la frontière du solide à l'instant t est donnée par

$$\int_{\partial\Omega_t} \overline{F}^S(M) \cdot \dot{\vec{u}}(M) da$$

où $\dot{\vec{u}}$ désigne le champ de vitesse.

Puissance des forces surfaciques

La puissance des forces surfaciques \bar{F}^S qui s'exercent sur la frontière du solide à l'instant t est donnée par

$$\int_{\partial\Omega_t} \bar{F}^S(M) \cdot \dot{\bar{u}}(M) da$$

où $\dot{\bar{u}}$ désigne le champ de vitesse.

En appliquant la formule de Cauchy et le théorème de divergence, on peut écrire

$$\int_{\partial\Omega} (\bar{\sigma} \cdot \bar{n}) \cdot \dot{\bar{u}} da = \int_{\partial\Omega} (\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{u}}) \cdot \bar{n} da = \int_{\Omega} \operatorname{div} (\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{u}}) dv$$

On cherche à transformer l'expression $\operatorname{div} (\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{u}})$

On a la relation

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{u}}) = (\operatorname{div} \bar{\sigma}) \cdot \dot{\bar{u}} + \bar{\sigma} : \overline{\overline{\nabla \cdot \dot{\bar{u}}}} \quad (30)$$

Le premier terme peut être transformé au moyen de l'équation du mouvement

$$\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v - \operatorname{div} \bar{\sigma} = 0$$

On a la relation

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{u}}) = (\operatorname{div} \bar{\sigma}) \cdot \dot{\bar{u}} + \bar{\sigma} : \overline{\nabla \cdot \dot{\bar{u}}} \quad (30)$$

Le premier terme peut être transformé au moyen de l'équation du mouvement

$$\rho \bar{\gamma} - \bar{f}^v - \operatorname{div} \bar{\sigma} = 0$$

Le second terme peut être réécrit de la façon suivante :

$$\bar{\sigma} : \overline{\nabla \cdot \dot{\bar{u}}} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\partial_j \dot{u}_i + \partial_i \dot{u}_j)$$

puisque $\bar{\sigma}$ est symétrique.

Ainsi, on a

$$\bar{\sigma} : \overline{\nabla \cdot \dot{\bar{u}}} = \bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}}$$

où

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\partial_j \dot{u}_i + \partial_i \dot{u}_j) = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla \cdot \dot{\bar{u}}} + \overleftarrow{\nabla \cdot \dot{\bar{u}}} \right)$$

désigne le tenseur des vitesses de déformation.

On obtient ainsi, à partir de (30) la relation

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (\bar{\sigma} \cdot \dot{u}) \, dv + \int_{\Omega} \bar{f}^v \cdot \dot{u} \, dv - \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}} \, dv = \int_{\Omega} \rho \bar{\gamma} \cdot \dot{u} \, dv$$

On reconnaît, dans les 2 premiers termes, la puissance des forces extérieures surfaciques et la puissance des forces extérieures de volume.

Le terme de droite n'est autre que la dérivée (particulaire) de l'énergie cinétique

$$\frac{dC}{dt} = \int_{\Omega} \rho \bar{\gamma} \cdot \dot{u} \, dv \quad \text{ou} \quad C = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}^2 \, dv$$

Le troisième terme du membre de gauche peut être identifié en évoquant le théorème de l'énergie cinétique :

Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée (particulaire) de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances de tous les efforts extérieurs et intérieurs.

Puissance de déformation volumique

Bilan : on peut poser

Définition

La puissance volumique (i.e. par unité de volume) des efforts intérieurs à Ω est donnée par

$$\Pi_{def} = \bar{\bar{\sigma}} : \dot{\bar{\bar{\epsilon}}}$$

Plan du chapitre

- 1 Étude des déformations
- 2 Tenseur des petites déformations
- 3 Puissance de déformation volumique
- 4 Changement de repère et déformations principales**
- 5 Cercle de Mohr des déformations
- 6 Mesure des déformations par extensométrie

Déformations principales

Théorème

Le tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ étant symétrique, Il possède 3 valeurs propres réelles (distinctes ou confondues) $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ et 3 directions propres Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

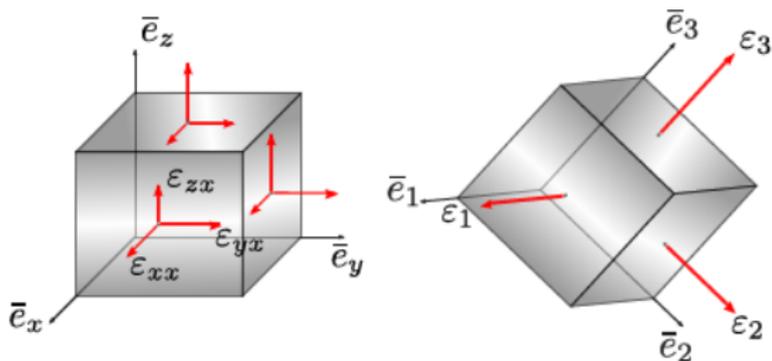
Il est donc toujours possible de définir une base orthonormée propres $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ construit sur les directions propres Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

- Les déformations $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sont appelées les déformations principales.*
- Les directions propres sont les directions principales (des déformations).*

Corollaire

Il est toujours possible de se placer dans une base orthonormée $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ de telle sorte que l'état de déformation soit réduit aux trois déformations normales $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Le solide est alors en extension simple dans les 3 directions.



Déformations planes

Définition

Soit (\bar{e}_i) une base orthonormée. On appelle tenseur plan (relativement au plan Ox_1x_2) le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$ tel que ses composantes dans la base (\bar{e}_i) soient

$$[\bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Autrement dit, les déformations sont uniquement dans le plan Ox_1x_2 .

Déformation dans un plan normal à une direction principale

On considère une base orthonormée $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ telle que Ox_3 soit une direction principale pour le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$, alors la matrice des composantes du tenseur dans cette base s'écrit

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Exemple : en surface d'une pièce, si Ox_3 est la normal à la surface, le champ de tenseur est toujours de cette forme.

Plan du chapitre

- 1 Étude des déformations
- 2 Tenseur des petites déformations
- 3 Puissance de déformation volumique
- 4 Changement de repère et déformations principales
- 5 Cercle de Mohr des déformations**
- 6 Mesure des déformations par extensométrie

Cercle de Mohr des déformations

La méthode des cercles de Mohr développée pour les contraintes peut être utilisée pour représenter les composantes normale et angulaire de la déformation.

Elle s'applique dans le cas où l'un des axes du repère est déjà principal, ce qui est le cas des tenseurs de la forme (31) et (32).

On reprend dans ce qui suit les calculs déjà réalisés pour les contraintes.

Cercle de Mohr des déformations

La méthode des cercles de Mohr développée pour les contraintes peut être utilisée pour représenter les composantes normale et angulaire de la déformation.

Elle s'applique dans le cas où l'un des axes du repère est déjà principal, ce qui est le cas des tenseurs de la forme (31) et (32).

On reprend dans ce qui suit les calculs déjà réalisés pour les contraintes.

Soit un tenseur des déformations de la forme

$$[\varepsilon]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$.

On considère une seconde base $(\bar{e}_n, \bar{e}_t, \bar{e}_z)$ déduite de la première par une rotation autour de l'axe Oz d'angle θ .

En utilisant la formule de changement de repère (14), avec comme matrice de passage

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient la matrice

$$[\varepsilon]_{(\bar{e}_n, \bar{e}_t, \bar{e}_z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_n & \varepsilon_{nt} & 0 \\ \varepsilon_{tn} & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \cos^2 \theta \varepsilon_x + \sin^2 \theta \varepsilon_y + 2 \cos \theta \sin \theta \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_t = \sin^2 \theta \varepsilon_x + \cos^2 \theta \varepsilon_y - 2 \cos \theta \sin \theta \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{nt} = -\cos \theta \sin \theta (\varepsilon_x - \varepsilon_y) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \varepsilon_{xy} \end{cases}$$

Notons $\gamma/2 = \varepsilon_{nt}$ la composante de glissement, on obtient

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (33a)$$

$$\gamma/2 = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (33b)$$

Notons $\gamma/2 = \varepsilon_{nt}$ la composante de glissement, on obtient

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (33a)$$

$$\gamma/2 = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (33b)$$

On peut écrire ces formules en fonction de l'angle double -2θ en utilisant les relations trigonométriques :

$$2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta, \quad 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta, \quad 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

Notons $\gamma/2 = \varepsilon_{nt}$ la composante de glissement, on obtient

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (33a)$$

$$\gamma/2 = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (33b)$$

On peut écrire ces formules en fonction de l'angle double -2θ en utilisant les relations trigonométriques :

$$2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta, \quad 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta, \quad 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

On obtient alors les formules

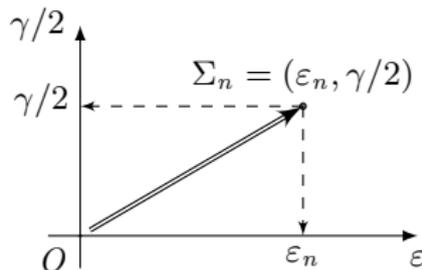
$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(-2\theta) - \varepsilon_{xy} \sin(-2\theta) \quad (34a)$$

$$\gamma/2 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin(-2\theta) + \varepsilon_{xy} \cos(-2\theta) \quad (34b)$$

Ces formules traduisent la transformation géométrique suivante. On considère un plan muni de 2 axes :

- (i) l'axe $O\varepsilon$ des déformations normales ε comme axe des abscisses ;
- (ii) l'axe $O\gamma$ des déformations angulaires $\gamma/2$ comme axe des ordonnées.

Ce plan est appelé le **plan de Mohr**. Le couple $(\varepsilon_n, \gamma/2)$ constitue les coordonnées d'un point $\Sigma_n = (\varepsilon_n, \gamma/2)$ dans ce plan.

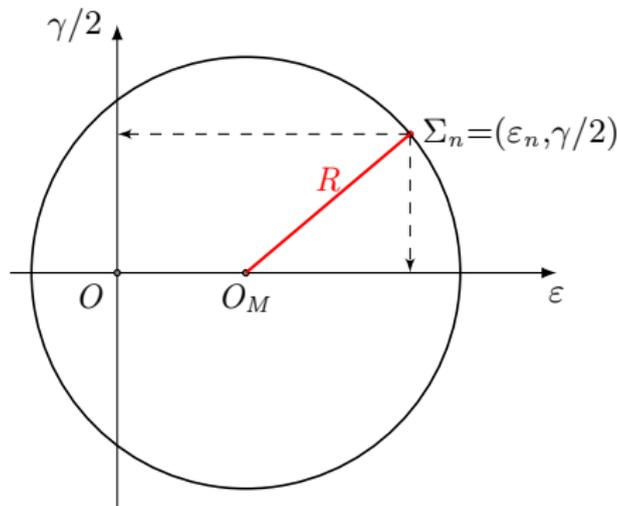


Théorème (du cercle de Mohr)

On peut montrer à partir des relations (34) que lorsque le repère $(\bar{e}_n, \bar{e}_t, \bar{e}_z)$ tourne d'un angle θ par rapport au repère de référence $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$.

Le point $\Sigma_n = (\varepsilon_n, \gamma/2)$ décrit dans le plan de Mohr un cercle de centre O_M et de rayon R avec

$$O_M = \left(\frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), 0 \right), \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$



Cas où le repère de référence est principal

Dans le cas où le repère de référence est principal, on note $(Ox_1x_2x_3)$, la matrice des composantes de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est diagonale :

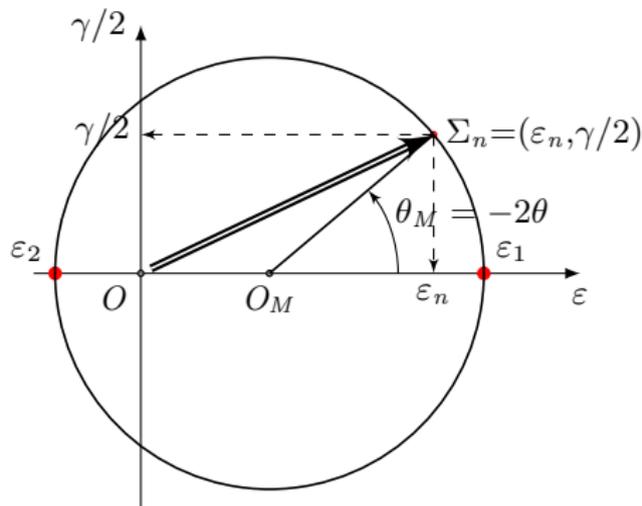
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Les relations (34) deviennent, en introduisant l'angle $\theta_M = -2\theta$,

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos \theta_M \quad (35a)$$

$$\gamma/2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin \theta_M \quad (35b)$$

On reconnaît la description paramétrique d'un cercle de centre $O_M = \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), 0\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.



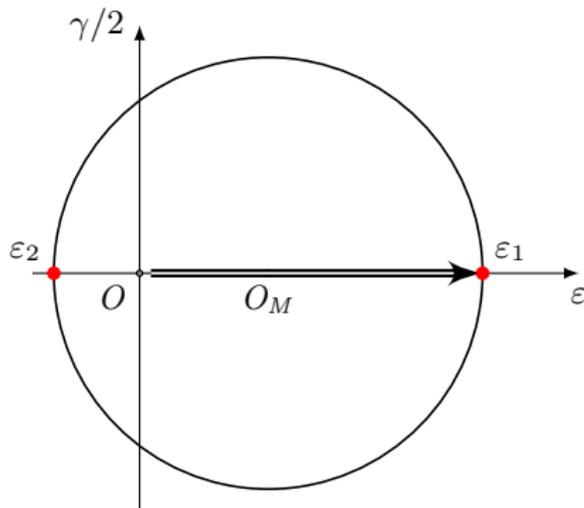
$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos \theta_M$$

$$\gamma/2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin \theta_M$$

Dans ce cas particulier, l'angle $\theta = -\frac{1}{2}\theta_M$ représente l'angle entre l'axe Ox_1 du repère de référence et l'axe On du repère courant.

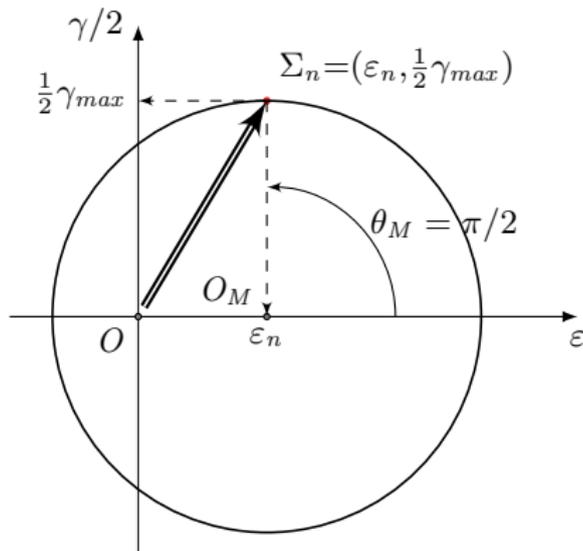
On peut distinguer 3 points remarquables sur le cercle.

Lorsque $\theta_M = 0$, le point Σ_n coïncide avec le point $(\varepsilon_1, 0)$ autrement dit, $\varepsilon_n = \varepsilon_1$ et $\gamma = 0$.

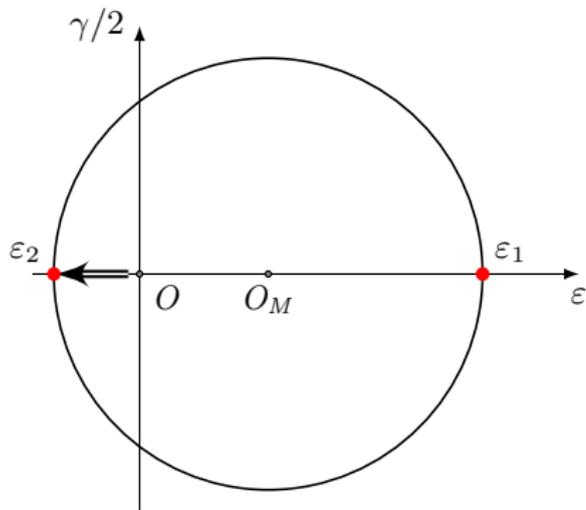


Lorsque $\theta_M = \pi/2$, soit $\theta = -\pi/4$, on a $\Sigma_n = (\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))$.

On déduit directement de la représentation de Mohr que la direction définie par $\theta = -\pi/4$ porte la plus grande composante de glissement γ_{max}



Lorsque $\theta_M = \pi$, soit $\theta = -\pi/2$, le point Σ_n coïncide avec le point $(\varepsilon_2, 0)$ autrement dit, $\varepsilon_n = \varepsilon_2$ et $\gamma = 0$.



On déduit de ces observations les propriétés suivantes :

Propriétés déduites du cercle de Mohr

- 1 Les déformations principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont respectivement la plus grande et la plus petite déformations normales dans plan ; elles sont portées par les directions principales Ox_1, Ox_2 :

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_1, \text{ quelque soit la direction } O_n$$

- 2 La plus grande déformations angulaire (ou composante de glissement) est donnée par le diamètre du cercle de Mohr

$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

elle correspond à la variation d'angle droit des directions Ox_1, Ox_2 tournées de $\theta = -\pi/4$

Plan du chapitre

- 1 Étude des déformations
- 2 Tenseur des petites déformations
- 3 Puissance de déformation volumique
- 4 Changement de repère et déformations principales
- 5 Cercle de Mohr des déformations
- 6 **Mesure des déformations par extensométrie**

Moyens de mesure

Il existe un certain nombre de moyens mécaniques et optiques permettant de mesurer les déformations dans une pièce. On peut distinguer 3 types de mesures.

1. Les mesures par déplacement relatif de 2 points :

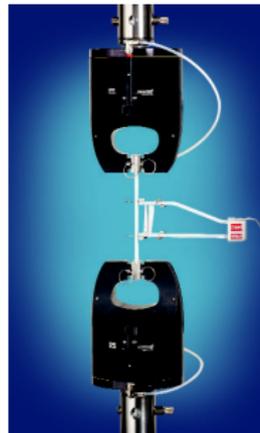
- les extensomètres mécaniques ;
- les extensomètres optiques (balayage laser, caméra, ...).

Cette méthode suppose que la déformation est homogène dans l'espace qui sépare les 2 points.

Éprouvette cylindrique métallique



Éprouvette plastique



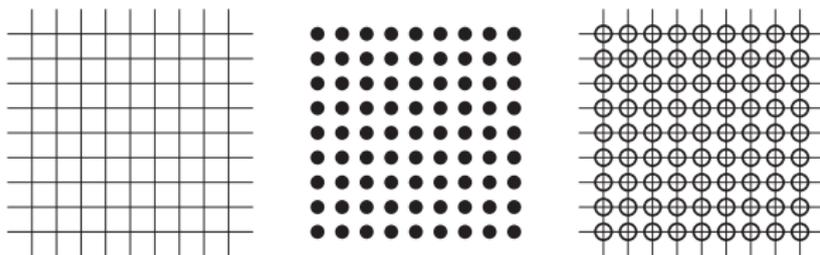
2. Les mesures locales par jauges de déformation. Cette méthode est la plus répandue, elle sera détaillée plus loin.

3. Les mesures de champ de déplacement 2-d (voire 3-d) par des méthodes optiques.

On trouve :

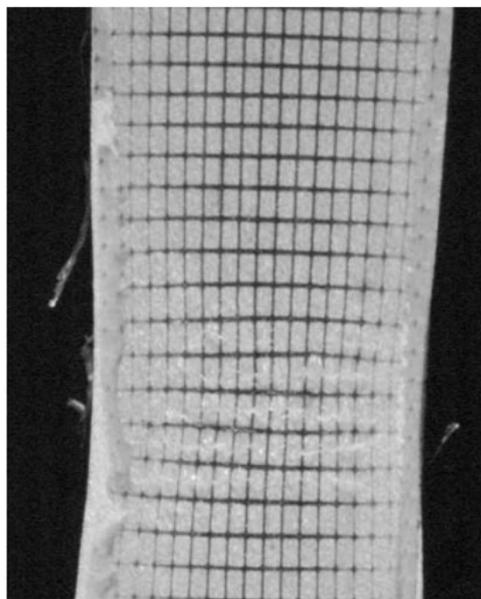
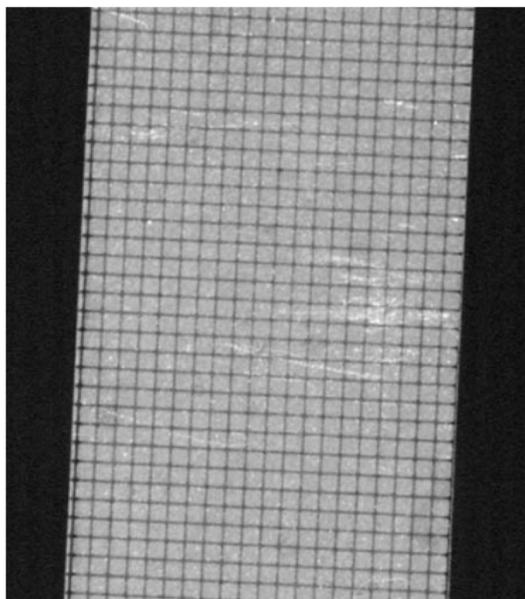
- **la méthode par marquage** : la surface de l'objet est préalablement équipée de marqueurs ou marquée d'une grille régulière.

Motifs utilisés par les méthodes de suivi de marqueurs ou de grilles

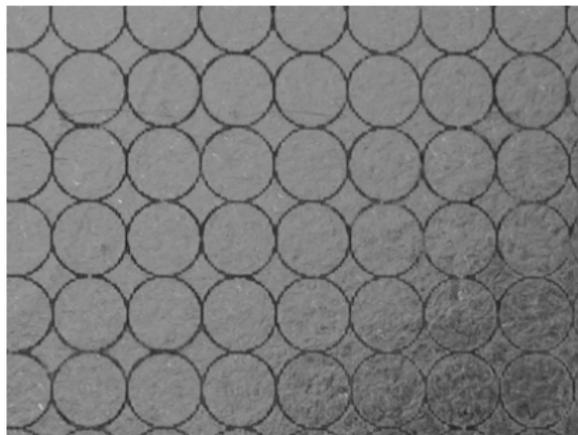


La méthode consiste à suivre, à travers une séquence d'images, le déplacement des marqueurs ou des noeuds de la grille.

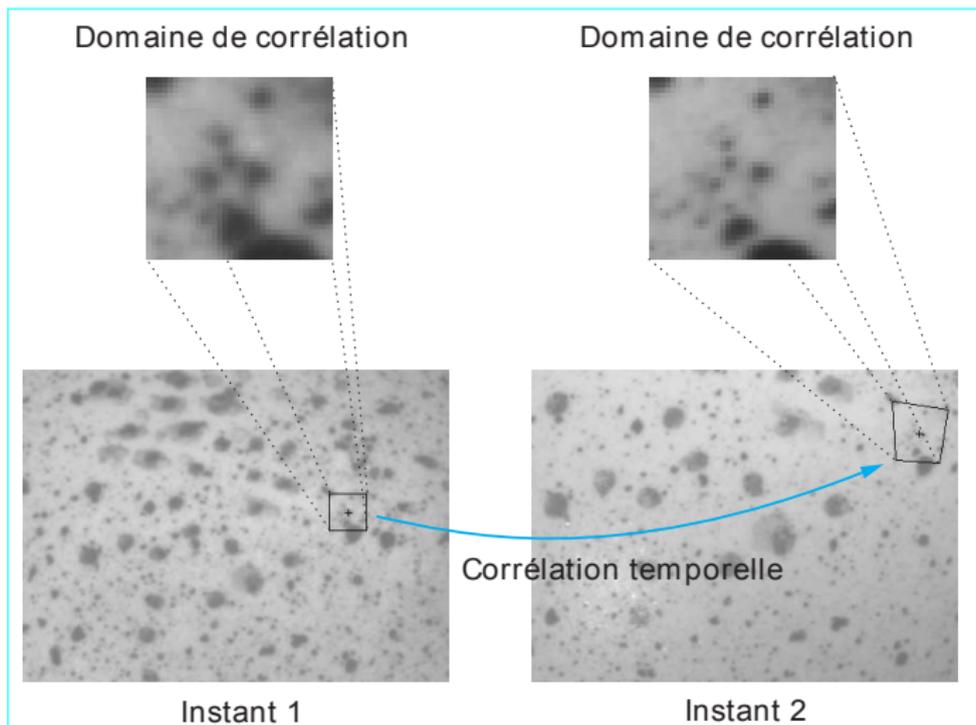
Marquage par grilles rectangulaires



Marquage par petits cercles



- **La méthode par corrélation d'images** : mesure de la ressemblance entre deux pixels.



Mesure de l'allongement unitaire par jauges d'extensométrie

La détermination expérimentale des tenseurs de déformations s'appuie sur des mesures d'allongement unitaire

$$\delta (\overline{dM}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

Elle est obtenue par comparaison des longueurs d'un vecteur matériel dans la configuration initiale de référence et dans la configuration actuelle.

Les techniques expérimentales classiques utilisent les extensomètres à fil résistant (jauges électriques de déformation ou jauges d'extensométrie).

Mesure de l'allongement unitaire par jauges d'extensométrie

La détermination expérimentale des tenseurs de déformations s'appuie sur des mesures d'allongement unitaire

$$\delta (\overline{dM}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

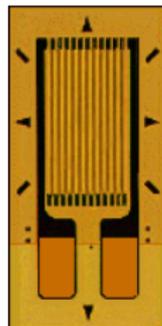
Elle est obtenue par comparaison des longueurs d'un vecteur matériel dans la configuration initiale de référence et dans la configuration actuelle.

Les techniques expérimentales classiques utilisent les extensomètres à fil résistant (jauges électriques de déformation ou jauges d'extensométrie).

Principe :

Faire subir à un fil la même extension que celle du matériau dans une direction donnée, et à mesurer la variation de résistance électrique correspondante.

L'effet est amplifié en repliant le fil plusieurs fois sur lui-même.

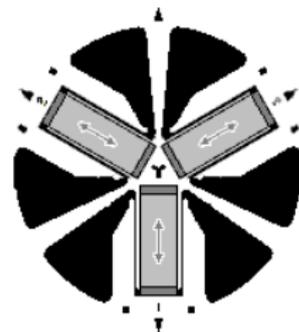
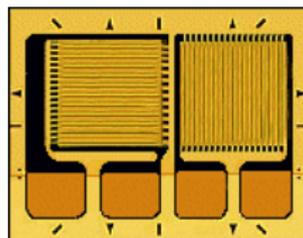
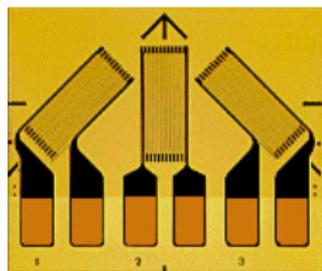






Rosettes

Les jauges sont groupées par 3 pour former une rosette, de façon à recueillir suffisamment d'information pour la détermination de la déformation dans le plan tangent à la surface du solide.



Exercice

Exercice 4.15 Dépouillement d'une rosette à 45°

On considère une rosette à 45° orientée de telle sorte que la jauge centrale soit alignée avec l'axe (Ox).

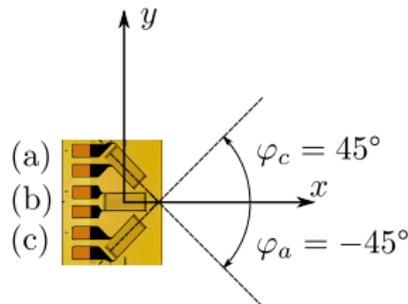
On note respectivement $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ les mesures fournies par les jauges (a), (b), (c).

Le but de l'exercice est d'établir les formules permettant de calculer les composantes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ du tenseur des déformations dans le repère ($Oxyz$) en fonction des données des jauges.

- 1 En appliquant la formule donnant l'allongement unitaire, écrire les 3 équations

$$\delta(\bar{n}_\alpha) = \varepsilon_\alpha, \quad \alpha = a, b, c$$

- 2 Inverser le système linéaire de sorte à exprimer les composantes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ en fonction de $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$



Correction

Question 1 - On applique la formule

$$\delta(\bar{n}) = {}^t\{n\} [\varepsilon] \{n\}$$

avec

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad \{n_a\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \{n_b\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{n_c\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \delta(\bar{n}_a) = {}^t\{n_a\} [\varepsilon] \{n_a\} = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \varepsilon_{xy} = \varepsilon_a \\ \delta(\bar{n}_b) = {}^t\{n_b\} [\varepsilon] \{n_b\} = \varepsilon_x = \varepsilon_b \\ \delta(\bar{n}_c) = {}^t\{n_c\} [\varepsilon] \{n_c\} = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_{xy} = \varepsilon_c \end{cases}$$

Correction

Question 1 - On applique la formule

$$\delta(\bar{n}) = {}^t\{n\} [\varepsilon] \{n\}$$

avec

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad \{n_a\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \{n_b\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{n_c\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \delta(\bar{n}_a) = {}^t\{n_a\} [\varepsilon] \{n_a\} = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \varepsilon_{xy} = \varepsilon_a \\ \delta(\bar{n}_b) = {}^t\{n_b\} [\varepsilon] \{n_b\} = \varepsilon_x = \varepsilon_b \\ \delta(\bar{n}_c) = {}^t\{n_c\} [\varepsilon] \{n_c\} = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_{xy} = \varepsilon_c \end{cases}$$

On peut obtenir les mêmes équations en utilisant la relation (34a) de la façon suivante

$$\begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -2\theta = +\frac{\pi}{2} \rightarrow \varepsilon_n = \varepsilon_a = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \varepsilon_{xy} \\ \theta = 0 \Rightarrow -2\theta = 0 \rightarrow \varepsilon_n = \varepsilon_b = \varepsilon_x \\ \theta = +\frac{\pi}{4} \Rightarrow -2\theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \varepsilon_n = \varepsilon_c = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_{xy} \end{cases}$$

Question 2 - Résolution du système linéaire

En combinant les équations (1)+(3), on obtient

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_c$$

et avec l'équation (2), on trouve

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b$$

Avec la combinaison (3)-(1) on obtient directement

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_a}{2}$$

Question 2 - Résolution du système linéaire

En combinant les équations (1)+(3), on obtient

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_c$$

et avec l'équation (2), on trouve

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b$$

Avec la combinaison (3)-(1) on obtient directement

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_a}{2}$$

Bilan.

Les formules permettant de dépouiller une rosette à 45° sont :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon_b \\ \varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (\varepsilon_c - \varepsilon_a) \end{array} \right.$$

Chapitre IV - Comportement des matériaux

Objectif : définir la loi de Hooke généralisée

Sommaire

- 0 Comportement des matériaux
- 1 Loi de comportement élastique
- 2 Interprétation des coefficients d'élasticité
- 3 Formulation ingénieur
- 4 Cas de l'élasticité plane

Plan du chapitre

- 0 Comportement des matériaux
- 1 Loi de comportement élastique
- 2 Interprétation des coefficients d'élasticité
- 3 Formulation ingénieur
- 4 Cas de l'élasticité plane

Les matériaux homogènes, isotropes, élastiques, linéaires

Les relations que l'on établit entre contraintes déformations sont des lois empiriques propres à chaque type de matériau.

Ces lois rentrent cependant dans des cadres précis. Dans ce cours, on s'intéresse aux matériaux vérifiant les propriétés suivantes :

Homogénéité On suppose que les propriétés des matériaux sont identiques en tout point du milieu continu.

Pour cela, il faut se placer à une échelle bien supérieure à la taille des hétérogénéités.

Les matériaux homogènes, isotropes, élastiques, linéaires

Les relations que l'on établit entre contraintes déformations sont des lois empiriques propres à chaque type de matériau.

Ces lois rentrent cependant dans des cadres précis. Dans ce cours, on s'intéresse aux matériaux vérifiant les propriétés suivantes :

Homogénéité On suppose que les propriétés des matériaux sont identiques en tout point du milieu continu.

Pour cela, il faut se placer à une échelle bien supérieure à la taille des hétérogénéités.

Type de matériaux	Type et taille des hétérogénéités	Éléments de volume caractéristique
Métaux et alliages	grain : 0,001 à 0,1 mm	$0,5 \times 0,5 \text{ mm}$
Polymères	molécule : 0,01 à 0,05 mm	$1 \times 1 \times 1 \text{ mm}$
bois	fibre : 0,1 à 1 mm	$10 \times 10 \times 10 \text{ mm}$
béton	granulats : 10 mm	$100 \times 100 \times 100 \text{ mm}$

Isotropie La relation force-déplacement du matériau doit être la même quelque soit la direction de sollicitation.

Les matériaux comportant des directions matérielles privilégiées, par la présence de fibres par exemple (composites, bois) sont anisotropes (isotrope transverse, orthotrope,....).

Isotropie La relation force-déplacement du matériau doit être la même quelque soit la direction de sollicitation.

Les matériaux comportant des directions matérielles privilégiées, par la présence de fibres par exemple (composites, bois) sont anisotropes (isotrope transverse, orthotrope,...).

Élasticité La transformation du matériau est parfaitement réversible. D'un point de vu thermodynamique, on dit qu'il n'y a pas dissipation d'énergie.

Cette propriété est en général vraie pour de faibles chargements.

- Si l'on charge un matériau métallique au-delà d'une valeur seuil, des déformations irréversibles apparaissent : ce comportement (élastoplastique) n'est pas réversible.
- Pour les bétons (et certains composites), une charge trop élevée entraîne une fissuration de la matrice et par suite une diminution de la raideur. Ce comportement élastique-endommageable n'est pas réversible.

Linéarité Si l'on se place au voisinage de la configuration d'équilibre, on peut approcher la relation force-déplacement par une relation linéaire.

Pour les matériaux métalliques on suppose en général que la relation force déplacement est linéaire dans le domaine des déformations réversibles .

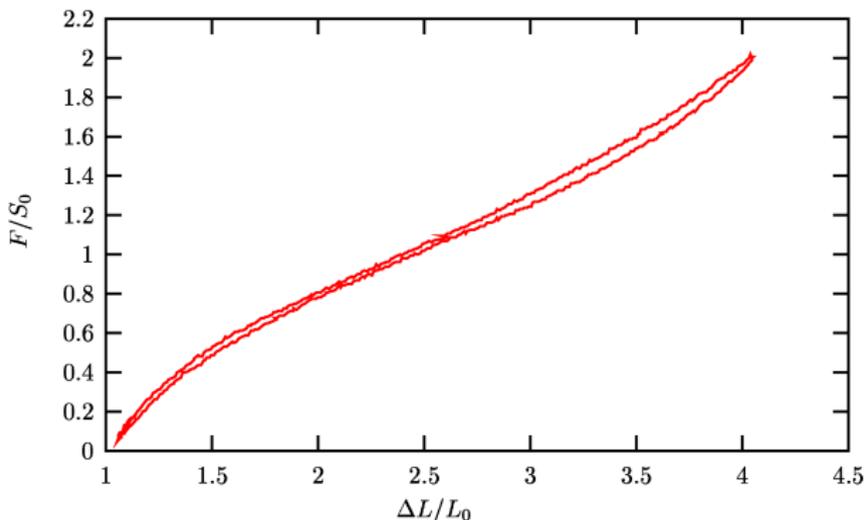
Cette approximation est d'autant plus vraie que le matériau a un comportement fragile (rupture brutale), par exemple les aciers à haute limite d'élasticité, les céramiques).

Linéarité Si l'on se place au voisinage de la configuration d'équilibre, on peut approcher la relation force-déplacement par une relation linéaire.

Pour les matériaux métalliques on suppose en général que la relation force déplacement est linéaire dans le domaine des déformations réversibles .

Cette approximation est d'autant plus vraie que le matériau a un comportement fragile (rupture brutale), par exemple les aciers à haute limite d'élasticité, les céramiques).

Cette restriction n'est plus vraie dans le cas des élastomères, ils admettent de grandes déformations réversibles mais non linéaires en fonction de la charge.



Plan du chapitre

- 0 Comportement des matériaux
- 1 Loi de comportement élastique**
- 2 Interprétation des coefficients d'élasticité
- 3 Formulation ingénieur
- 4 Cas de l'élasticité plane

Matériaux élastique

Définition

Un matériau est dit élastique si, en tout point M et à chaque instant, les valeurs du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ sont entièrement déterminées par la seule connaissance du tenseur des déformations en ce point et à cet instant.

$$\bar{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\bar{\epsilon}(t))$$

Matériaux élastique

Définition

Un matériau est dit élastique si, en tout point M et à chaque instant, les valeurs du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ sont entièrement déterminées par la seule connaissance du tenseur des déformations en ce point et à cet instant.

$$\bar{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\bar{\epsilon}(t))$$

Autrement dit, l'état de contrainte ne dépend pas de l'histoire des déformations (comme la plasticité) mais uniquement des valeurs actuelles des déformations.

Matériaux élastique

Définition

Un matériau est dit élastique si, en tout point M et à chaque instant, les valeurs du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ sont entièrement déterminées par la seule connaissance du tenseur des déformations en ce point et à cet instant.

$$\bar{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}(t))$$

Autrement dit, l'état de contrainte ne dépend pas de l'histoire des déformations (comme la plasticité) mais uniquement des valeurs actuelles des déformations.

En exprimant les principes thermodynamiques (premier et second principe) on montre qu'il existe un **potentiel thermodynamique**, c'est à dire une fonction $\psi : \bar{\varepsilon} \rightarrow \psi(\bar{\varepsilon})$ à valeur réelle, telle que la loi de comportement dérive de ce potentiel :

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}) \quad (36)$$

Matériaux élastique

Définition

Un matériau est dit élastique si, en tout point M et à chaque instant, les valeurs du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ sont entièrement déterminées par la seule connaissance du tenseur des déformations en ce point et à cet instant.

$$\bar{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}(t))$$

Autrement dit, l'état de contrainte ne dépend pas de l'histoire des déformations (comme la plasticité) mais uniquement des valeurs actuelles des déformations.

En exprimant les principes thermodynamiques (premier et second principe) on montre qu'il existe un **potentiel thermodynamique**, c'est à dire une fonction $\psi : \bar{\varepsilon} \rightarrow \psi(\bar{\varepsilon})$ à valeur réelle, telle que la loi de comportement dérive de ce potentiel :

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}) \quad (36)$$

Remarque :

Le terme $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}}$ définit un tenseur d'ordre 2 dont les composantes, dans une base orthonormées (\bar{e}_i) , sont

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}(\bar{\varepsilon}) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Matériau élastique isotrope

Si le matériau est isotrope, c'est-à-dire s'il ne dépend pas de directions matérielles privilégiées (à la différence des composites) alors nécessairement le potentiel thermodynamique est une fonction isotrope de $\bar{\sigma}$.

Matériau élastique isotrope

Si le matériau est isotrope, c'est-à-dire s'il ne dépend pas de directions matérielles privilégiées (à la différence des composites) alors nécessairement le potentiel thermodynamique est une fonction isotrope de $\bar{\bar{\sigma}}$.

En application du théorème de représentation (cf. poly), on peut écrire

$$\psi(\bar{\bar{\epsilon}}) = \psi(J_1, J_2, J_3)$$

où les I_1, I_2, I_3 sont les invariants de $\bar{\bar{\epsilon}}$ définis par

$$J_1 = \text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}^2, \quad J_3 = \frac{1}{3}\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}^3$$

Matériau élastique isotrope

Si le matériau est isotrope, c'est-à-dire s'il ne dépend pas de directions matérielles privilégiées (à la différence des composites) alors nécessairement le potentiel thermodynamique est une fonction isotrope de $\bar{\sigma}$.

En application du théorème de représentation (cf. poly), on peut écrire

$$\psi(\bar{\varepsilon}) = \psi(J_1, J_2, J_3)$$

où les I_1, I_2, I_3 sont les invariants de $\bar{\varepsilon}$ définis par

$$J_1 = \text{tr}\bar{\varepsilon}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\text{tr}\bar{\varepsilon}^2, \quad J_3 = \frac{1}{3}\text{tr}\bar{\varepsilon}^3$$

On montre facilement que

$$\frac{\partial J_1}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{1}, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}, \quad \frac{\partial J_3}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}^2$$

Matériau élastique isotrope

Si le matériau est isotrope, c'est-à-dire s'il ne dépend pas de directions matérielles privilégiées (à la différence des composites) alors nécessairement le potentiel thermodynamique est une fonction isotrope de $\bar{\sigma}$.

En application du théorème de représentation (cf. poly), on peut écrire

$$\psi(\bar{\varepsilon}) = \psi(J_1, J_2, J_3)$$

où les I_1, I_2, I_3 sont les invariants de $\bar{\varepsilon}$ définis par

$$J_1 = \text{tr}\bar{\varepsilon}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\text{tr}\bar{\varepsilon}^2, \quad J_3 = \frac{1}{3}\text{tr}\bar{\varepsilon}^3$$

On montre facilement que

$$\frac{\partial J_1}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{1}}, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}, \quad \frac{\partial J_3}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}^2$$

En application de la relation (36) on obtient la formulation générale suivante :

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = \frac{\partial \psi}{\partial J_1} \bar{\mathbf{1}} + \frac{\partial \psi}{\partial J_2} \bar{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial J_3} \bar{\varepsilon}^2 \quad (37)$$

Matériau élastique isotrope linéarisé : loi de Hooke

On est dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et donc en particulier

$$\|\bar{\varepsilon}\| \ll 1$$

On cherche donc à linéariser la loi élastique générale précédente.

Matériau élastique isotrope linéarisé : loi de Hooke

On est dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et donc en particulier

$$\|\bar{\bar{\epsilon}}\| \ll 1$$

On cherche donc à linéariser la loi élastique générale précédente.

Idée :

Écrire la fonction $\psi(\bar{\bar{\epsilon}})$ sous la forme de son développement limité en 0 en se limitant aux termes du second degré des composantes de $\bar{\bar{\epsilon}}$; il ne doit dépendre que des invariants de $\bar{\bar{\epsilon}}$

$$\psi(J_1, J_2, J_3) = \psi\left(\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}, \frac{1}{2}\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}^2, \frac{1}{3}\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}^3\right)$$

Matériau élastique isotrope linéarisé : loi de Hooke

On est dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et donc en particulier

$$\|\bar{\bar{\epsilon}}\| \ll 1$$

On cherche donc à linéariser la loi élastique générale précédente.

Idée :

Écrire la fonction $\psi(\bar{\bar{\epsilon}})$ sous la forme de son développement limité en 0 en se limitant aux termes du second degré des composantes de $\bar{\bar{\epsilon}}$; il ne doit dépendre que des invariants de $\bar{\bar{\epsilon}}$

$$\begin{aligned} \psi(J_1, J_2, J_3) &= \psi\left(\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}, \frac{1}{2}\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}^2, \frac{1}{3}\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}^3\right) \\ &\simeq \psi(0) + \frac{\partial\psi}{\partial J_1}(0) \text{tr}\bar{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{2} \frac{\partial\psi}{\partial J_2}(0) \text{tr}\bar{\bar{\epsilon}}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial J_1^2}(0) (\text{tr}\bar{\bar{\epsilon}})^2 \end{aligned}$$

Matériau élastique isotrope linéarisé : loi de Hooke

On est dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et donc en particulier

$$\|\bar{\varepsilon}\| \ll 1$$

On cherche donc à linéariser la loi élastique générale précédente.

Idée :

Écrire la fonction $\psi(\bar{\varepsilon})$ sous la forme de son développement limité en 0 en se limitant aux termes du second degré des composantes de $\bar{\varepsilon}$; il ne doit dépendre que des invariants de $\bar{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \psi(J_1, J_2, J_3) &= \psi(\text{tr}\bar{\varepsilon}, \frac{1}{2}\text{tr}\bar{\varepsilon}^2, \frac{1}{3}\text{tr}\bar{\varepsilon}^3) \\ &\simeq \psi(0) + \frac{\partial\psi}{\partial J_1}(0) \text{tr}\bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\partial\psi}{\partial J_2}(0) \text{tr}\bar{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial J_1^2}(0) (\text{tr}\bar{\varepsilon})^2 \\ &\simeq \psi(0) + \sigma^0 \text{tr}\bar{\varepsilon} + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}\bar{\varepsilon})^2 + \mu \text{tr}\bar{\varepsilon}^2 \end{aligned}$$

où σ^0, λ, μ sont des constantes scalaires.

Matériau élastique isotrope linéarisé : loi de Hooke

Loi de comportement est obtenue par dérivation selon la formule (36) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}}(\bar{\bar{\varepsilon}}) &= \sigma_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} (\bar{\bar{\varepsilon}} : \bar{\bar{1}}) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} (\bar{\bar{\varepsilon}} : \bar{\bar{1}})^2 + 2\mu \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} (\bar{\bar{\varepsilon}} : \bar{\bar{\varepsilon}}) \\ &= \sigma_0 \bar{\bar{1}} + \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{1}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}}\end{aligned}$$

On suppose de plus qu'à déformation nulle le matériau est non contraint, ce qui correspond à prendre $\sigma^0 = 0$.

On a alors le résultat suivant :

Matériau élastique isotrope linéarisé : loi de Hooke

Loi de comportement est obtenue par dérivation selon la formule (36) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}}(\bar{\bar{\varepsilon}}) &= \sigma_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} (\bar{\bar{\varepsilon}} : \bar{\bar{1}}) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} (\bar{\bar{\varepsilon}} : \bar{\bar{1}})^2 + 2\mu \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} (\bar{\bar{\varepsilon}} : \bar{\bar{\varepsilon}}) \\ &= \sigma_0 \bar{\bar{1}} + \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{1}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}}\end{aligned}$$

On suppose de plus qu'à déformation nulle le matériau est non contraint, ce qui correspond à prendre $\sigma^0 = 0$.

On a alors le résultat suivant :

Loi de Hooke

La loi de comportement linéarisé d'un matériau isotrope est donnée par

$$\bar{\bar{\sigma}}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{1}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (38)$$

les scalaires λ, μ sont appelés les **coefficients d'élasticité de Lamé**.

Autres expressions de la loi de Hooke

En décomposant les tenseurs en leur partie sphérique et déviatorique, on peut écrire la loi de Hooke sous la forme suivante

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_m = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_m \\ \bar{s} = 2\mu \bar{e} \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \varepsilon_m = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_m \\ \bar{e} = \frac{1}{2\mu} \bar{s} \end{array} \right. \quad (39)$$

Cette formulation en partie sphérique et déviatorique à l'avantage de pouvoir être très facilement inversée.

Énergie de déformation élastique

La puissance volumique des efforts intérieurs est donnée par (Ch. IV)

$$\Pi_{def} = \bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}}$$

En utilisant la loi de Hooke, c'est-à-dire la linéarité de la relation $\bar{\epsilon} \rightarrow \bar{\sigma}$, on peut montrer que

$$\Pi_{def} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\bar{\sigma} : \bar{\epsilon})$$

Soit W_{def} l'énergie de déformation du volume unité engendrée par les forces extérieures entre l'état naturel à l'instant 0 (et l'instant (*i.e* $\bar{\epsilon}(0) = 0$) et l'instant actuel t :

$$W_{def} = \int_0^t \Pi_{def} dt' = \frac{1}{2} [\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}]_0^t = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}$$

Énergie de déformation élastique

D'où le théorème :

Théorème

L'énergie de déformation du volume unité engendrée par les forces extérieures ne dépend que de l'état actuel et elle est donnée par

$$W_{def} = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} \quad (40)$$

Plan du chapitre

- 0 Comportement des matériaux
- 1 Loi de comportement élastique
- 2 Interprétation des coefficients d'élasticité**
- 3 Formulation ingénieur
- 4 Cas de l'élasticité plane

Compression uniforme

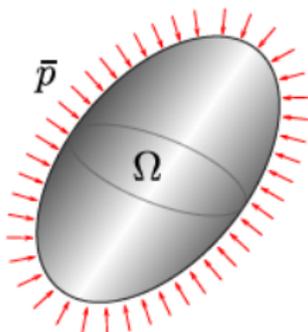
Énoncé du problème :

Soit un corps élastique, homogène isotrope, occupant une région Ω .

On suppose que le solide est plongé dans un liquide exerçant une pression constante p et on néglige les forces de pesanteur.

Les composantes sont rapportées à un système de coordonnées cartésiennes $(0x_1x_2x_3)$.

On cherche à déterminer le champ de contrainte $\bar{\sigma}(M)$ statiquement admissible et d'obtenir une relation entre la pression p et la variation de volume ε_V . La résolution comporte 3 étapes.



Étape 1 - Résolution du problème d'équilibre

La densité de force exercée par le fluide en tout point M de la surface du solide est

$$\overline{F}^S(M) = -p\bar{n} \quad \text{où } \bar{n} \text{ est la normale en } M \text{ à } \partial\Omega$$

Étape 1 - Résolution du problème d'équilibre

La densité de force exercée par le fluide en tout point M de la surface du solide est

$$\bar{F}^S(M) = -p\bar{n} \quad \text{où } \bar{n} \text{ est la normale en } M \text{ à } \partial\Omega$$

La forme du tenseur sur le contour est donnée par la condition de raccordement :

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{F}^S = -p\bar{n} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\sigma_{ij}n_j = -pn_i) \quad (41)$$

Étape 1 - Résolution du problème d'équilibre

La densité de force exercée par le fluide en tout point M de la surface du solide est

$$\bar{F}^S(M) = -p\bar{n} \quad \text{où } \bar{n} \text{ est la normale en } M \text{ à } \partial\Omega$$

La forme du tenseur sur le contour est donnée par la condition de raccordement :

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{F}^S = -p\bar{n} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\sigma_{ij}n_j = -pn_i) \quad (41)$$

En l'absence de force de volume l'équation d'équilibre devient

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \right) \quad (42)$$

Étape 1 - Résolution du problème d'équilibre

La densité de force exercée par le fluide en tout point M de la surface du solide est

$$\bar{F}^S(M) = -p\bar{n} \quad \text{où } \bar{n} \text{ est le normale en } M \text{ à } \partial\Omega$$

La forme du tenseur sur le contour est donnée par la condition de raccordement :

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{F}^S = -p\bar{n} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\sigma_{ij}n_j = -pn_i) \quad (41)$$

En l'absence de force de volume l'équation d'équilibre devient

$$\text{div} \bar{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \right) \quad (42)$$

Ainsi, le champ de contrainte homogène (constant)

$$\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma} = -p\bar{1} \quad (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij})$$

vérifie à la fois l'équation d'équilibre (42) et les conditions limites (41), il est donc statique admissible (SA).

Étape 2 - Calcul de la loi de volume

En utilisant la loi de Hooke sous la forme (39) on peut déterminer l'expression de $\bar{\bar{\epsilon}}$ en fonction de p :

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_m = \frac{\frac{1}{3} \text{tr} \bar{\bar{\sigma}}}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}$$

$$\bar{\bar{e}} = \frac{1}{2\mu} \bar{\bar{s}} = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{\bar{\sigma}} - \frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}} \right) = 0$$

Le tenseur des déformations est donc purement sphérique

$$\bar{\bar{\epsilon}} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \bar{\bar{1}}$$

Étape 2 - Calcul de la loi de volume

En utilisant la loi de Hooke sous la forme (39) on peut déterminer l'expression de $\bar{\bar{\epsilon}}$ en fonction de p :

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_m = \frac{\frac{1}{3} \text{tr} \bar{\bar{\sigma}}}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}$$

$$\bar{\bar{e}} = \frac{1}{2\mu} \bar{\bar{s}} = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{\bar{\sigma}} - \frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}} \right) = 0$$

Le tenseur des déformations est donc purement sphérique

$$\bar{\bar{\epsilon}} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \bar{\bar{1}}$$

On a d'après l'expression de la déformation volumique

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \text{tr} \bar{\bar{\epsilon}} = -\frac{3}{3\lambda + 2\mu} p$$

Étape 2 - Calcul du champ de déplacement

Par définition

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + \overleftarrow{\nabla u} \right) \iff \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

On a donc 6 équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{p}{(3\lambda + 2\mu)} \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \quad i \neq j \end{array} \right.$$

Étape 2 - Calcul du champ de déplacement

Par définition

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla u} + \overleftarrow{\nabla u} \right) \iff \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

On a donc 6 équations différentielles

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{p}{(3\lambda + 2\mu)} \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \quad i \neq j \end{array} \right.$$

En intégrant, on obtient un champ de déplacement défini à une constante additive près

$$\bar{u}(x) = -\frac{p}{(3\lambda + 2\mu)} \bar{x} + \bar{\lambda} + \bar{\omega} \wedge \bar{x}$$

où

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\lambda} \text{ vecteur de translation arbitraire} \\ \bar{\omega} \text{ vecteur de rotation arbitraire} \end{array} \right.$$

Interprétation

Le calcul de la variation de volume d'un solide chargé par une pression uniforme fait apparaître la constante

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

Cette constante est appelée le **module de rigidité à la compression** (*bulk modulus*).

Interprétation

Le calcul de la variation de volume d'un solide chargé par une pression uniforme fait apparaître la constante

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

Cette constante est appelée le **module de rigidité à la compression** (*bulk modulus*).

On a le résultat suivant :

Proposition

Pour une pression p donnée la variation de volume est inversement proportionnelle au module de rigidité à la compression K :

$$\varepsilon_V = -\frac{p}{K} \text{ avec } K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

Interprétation

Le calcul de la variation de volume d'un solide chargé par une pression uniforme fait apparaître la constante

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

Cette constante est appelée le **module de rigidité à la compression** (*bulk modulus*).

On a le résultat suivant :

Proposition

Pour une pression p donnée la variation de volume est inversement proportionnelle au module de rigidité à la compression K :

$$\varepsilon_V = -\frac{p}{K} \text{ avec } K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

Les anglo-saxons formule la loi de Hooke de la façon suivante

$$\bar{\sigma} = K (\text{tr}\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbb{1}} + 2G\bar{\varepsilon} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{9K} (\text{tr}\bar{\sigma}) \bar{\mathbb{1}} + \frac{1}{2G} \bar{s}$$

La constante $G = \mu$ est appelée le **module de cisaillement** (*shear modulus*)

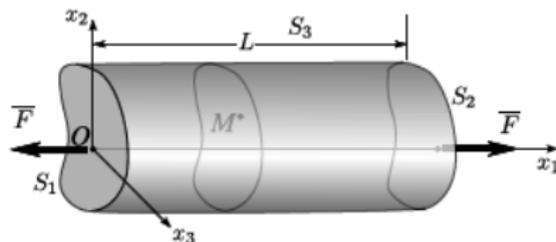
Traction simple

On cherche à exprimer les grandeurs classiques E, ν en fonction de coefficients de Lamé λ, μ de la loi de Hooke (38).

On s'intéresse pour cela à l'essai de traction sur une poutre cylindrique de longueur L limitée par les deux sections droites S_1, S_2 .

On suppose que la surface latérale du cylindre est libre de contrainte et on néglige les forces de volume.

On se place dans un système de coordonnées cartésiennes $Ox_1x_2x_3$. La résolution se déroule de 2 étapes.



Étape 1 - Résolution du problème d'équilibre

On cherche tout d'abord à déterminer le champ de tenseur $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ vérifiant le problème d'équilibre :

$$\operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et les conditions limites :

$$\bar{\bar{\sigma}} \bar{n} = \bar{F}^s(M), \quad M \in \partial\Omega$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = -F \bar{e}_1 & \text{sur } S_1 \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = F \bar{e}_1 & \text{sur } S_2 \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = 0 & \text{sur } S_3 \end{array} \right.$$

En explicitant ces relations en fonction des composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{11} = F, \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 & \text{sur } S_1 \\ \sigma_{11} = F, \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 & \text{sur } S_2 \\ \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3 = 0, i = 1, 2, 3 & \text{sur } S_3 \end{array} \right.$$

Ces conditions nous incitent à proposer le champ de contrainte uniforme

$$\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma} = F\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1$$

Ce champ vérifie les équations d'équilibre et les CL : il est donc statiquement admissible.

Remarque : les directions Ox_1, Ox_2, Ox_3 sont principales ; en particulier, toute direction orthogonale à \bar{e}_1 est principale.

Étape 2 - Calcul des champs de déformation et déplacement

En développant la loi de Hooke donnée par (38) on obtient les équations

$$\sigma_{11} = F = \lambda \operatorname{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} + 2\mu \varepsilon_{11} \quad (a)$$

$$\sigma_{22} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} + 2\mu \varepsilon_{22} \quad (b)$$

$$\sigma_{33} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} + 2\mu \varepsilon_{33} \quad (c)$$

$$\sigma_{ij} = 0 = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i \neq j \quad (d)$$

Étape 2 - Calcul des champs de déformation et déplacement

En développant la loi de Hooke donnée par (38) on obtient les équations

$$\sigma_{11} = F = \lambda \operatorname{tr} \bar{\bar{\epsilon}} + 2\mu \varepsilon_{11} \quad (a)$$

$$\sigma_{22} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\bar{\epsilon}} + 2\mu \varepsilon_{22} \quad (b)$$

$$\sigma_{33} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\bar{\epsilon}} + 2\mu \varepsilon_{33} \quad (c)$$

$$\sigma_{ij} = 0 = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i \neq j \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0$$

$$(a) - (b) \Leftrightarrow \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \frac{F}{2\mu} \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} - \frac{F}{2\mu}$$

$$(b) - (c) \Leftrightarrow 2\mu(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$$

$$(a) \Leftrightarrow (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = F$$

Étape 2 - Calcul des champs de déformation et déplacement

En développant la loi de Hooke donnée par (38) on obtient les équations

$$\left. \begin{array}{l}
 \sigma_{11} = F = \lambda \operatorname{tr} \bar{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{11} \quad (a) \\
 \sigma_{22} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{22} \quad (b) \\
 \sigma_{33} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{33} \quad (c) \\
 \sigma_{ij} = 0 = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i \neq j \quad (d)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 (d) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0 \\
 (a) - (b) \Leftrightarrow \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \frac{F}{2\mu} \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} - \frac{F}{2\mu} \\
 (b) - (c) \Leftrightarrow 2\mu(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} \\
 (a) \Leftrightarrow (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = F
 \end{array}$$

A partir des équations lignes 2 et 4 on tire

$$(3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} = F \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

D'où les résultats finaux

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F; \quad \varepsilon_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

Étape 2 - Calcul des champs de déformation et déplacement

En développant la loi de Hooke donnée par (38) on obtient les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = F = \lambda \operatorname{tr} \bar{\epsilon} + 2\mu \epsilon_{11} \quad (a) \\ \sigma_{22} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\epsilon} + 2\mu \epsilon_{22} \quad (b) \\ \sigma_{33} = 0 = \lambda \operatorname{tr} \bar{\epsilon} + 2\mu \epsilon_{33} \quad (c) \\ \sigma_{ij} = 0 = 2\mu \epsilon_{ij} \quad i \neq j \quad (d) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (d) \Rightarrow \epsilon_{ij} = 0 \\ (a) - (b) \Leftrightarrow \epsilon_{11} - \epsilon_{22} = \frac{F}{2\mu} \Leftrightarrow \epsilon_{22} = \epsilon_{11} - \frac{F}{2\mu} \\ (b) - (c) \Leftrightarrow 2\mu(\epsilon_{22} - \epsilon_{33}) = 0 \Leftrightarrow \epsilon_{22} = \epsilon_{33} \\ (a) \Leftrightarrow (\lambda + 2\mu)\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = F \end{array} \right.$$

A partir des équations lignes 2 et 4 on tire

$$(3\lambda + 2\mu)\epsilon_{11} = F \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

D'où les résultats finaux

$$\epsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F; \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F; \quad \epsilon_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

On obtient le champ de déplacement par intégration directe, à une constante additive près :

$$u_1 = \epsilon_{11} x_1, \quad u_2 = \epsilon_{22} x_2, \quad u_3 = \epsilon_{33} x_3$$

L'allongement de la poutre est donnée par le déplacement d'un point extrémité, par exemple $(L, 0, 0)$, soit

$$\Delta L = u_1(L, 0, 0) = \varepsilon_{11}L = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}FL$$

L'allongement de la poutre est donnée par le déplacement d'un point extrémité, par exemple $(L, 0, 0)$, soit

$$\Delta L = u_1(L, 0, 0) = \varepsilon_{11}L = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}FL$$

Alors l'allongement unitaire est

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}F$$

Les grandeurs E et ν sont introduites lors d'un essai de traction par les relations

$$F = E \frac{\Delta L}{L}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

On détermine donc immédiatement les correspondances

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Compléments

L'expérience montre que les grandeurs K , E et ν sont toujours, on a donc

$$3\lambda + 2\nu > 0, \quad \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} > 0, \quad \frac{\lambda}{\lambda + \mu} > 0$$

Donc, nécessairement,

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0$$

Comme

$$0 < \frac{\lambda}{\lambda + \mu} < 1$$

on a la condition

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

Relations entre les coefficients d'élasticité

En élasticité linéaire isotrope, la relation contrainte - déformation est donnée par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}} \quad \text{ou} \quad \bar{\bar{\sigma}} = \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{1}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}}$$

et en notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Relations entre les coefficients d'élasticité

En élasticité linéaire isotrope, la relation contrainte - déformation est donnée par :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\sigma}) \bar{\mathbb{1}} \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma} = \lambda (\text{tr} \bar{\varepsilon}) \bar{\mathbb{1}} + 2\mu \bar{\varepsilon}$$

et en notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Relations entre les coefficients élastiques :

Coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G$$

Module d'Young et coefficient de Poisson :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Module de compressibilité (*Bulk modulus*)

$$3K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

Plan du chapitre

- 0 Comportement des matériaux
- 1 Loi de comportement élastique
- 2 Interprétation des coefficients d'élasticité
- 3 Formulation ingénieur**
- 4 Cas de l'élasticité plane

Traction selon 3 axes

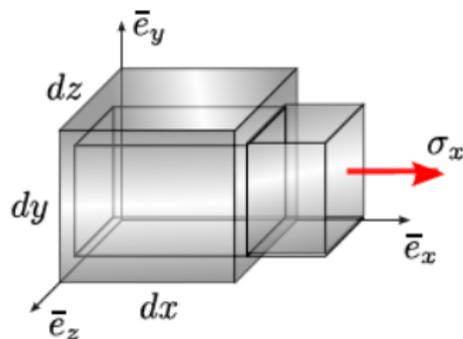
Objectif : construire la loi de Hooke à la main par une approche ingénieur.

On considère un volume élémentaire $dx \times dy \times dz$ orienté selon les directions Ox , Oy , Oz du repère.

On soumet la face de normale \bar{e}_x à une contrainte normale σ_x .

On observe un allongement suivant la direction Ox et une contraction suivant les deux autres directions :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \end{array} \right.$$



E désigne le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

On procède de même pour les deux autres direction.

On peut synthétiser les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

	Traction suivant Ox	Traction suivant Oy	Traction suivant Oz
déformation suivant Ox	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x$	$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$	$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$
déformation suivant Oy	$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y$	$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$
déformation suivant Oz	$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$	$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z$

Pour obtenir la loi de Hooke bi et tridimensionnelle on applique le principe de superposition justifié par la linéarité de la réponse.

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{array} \right.$$

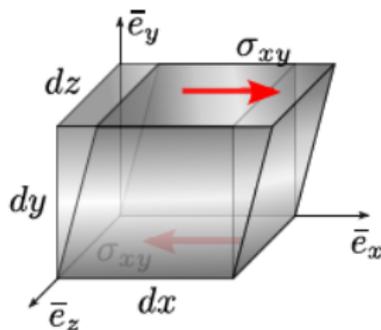
Cisaillement

On applique une contrainte de cisaillement σ_{xy} sur notre élément de volume et on obtient

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \quad \text{avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ou encore,

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$



G est appelé le module de cisaillement.

On procède de même pour les deux autres plans avec les contraintes σ_{yz} et σ_{xz} et on obtient

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} ; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

Superposition

En superposant les sollicitations précédente, on retrouve la loi de Hooke généralisée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} ; \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} ; \varepsilon = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \end{array} \right. \quad \text{avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Cette relation linéaire peut être inversée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} ; \sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} ; \sigma = 2G\varepsilon_{xz} \quad \text{avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right.$$

Plan du chapitre

- 0 Comportement des matériaux
- 1 Loi de comportement élastique
- 2 Interprétation des coefficients d'élasticité
- 3 Formulation ingénieur
- 4 Cas de l'élasticité plane**

État de contrainte plane

Le champ de contrainte en contrainte plane est de la forme :

Le champ de contrainte	Le champ de déformation
$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$

Loi de Hooke :

Contrainte \rightarrow déformation	déformation \rightarrow Contrainte
$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{array} \right.$

État plan de déformation

Le champ de déformation en déformation plane est de la forme :

Le champ de déformation	Le champ de contrainte
$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$

Loi de Hooke :

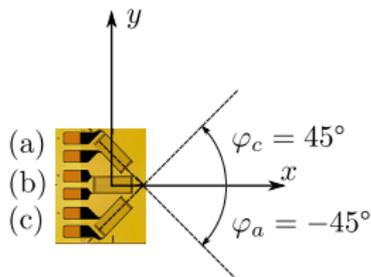
Contrainte \rightarrow déformation	déformation \rightarrow Contrainte
$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]$ $\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]$ $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ $\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$	$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y)$ $\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x)$ $\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$

Exercice

Exercice 5.5 Dépouillement d'une rosette à 45°

Sur un matériau élastique de caractéristique E, ν est collée une rosette à 45° orientée comme indiqué sur la figure.

On note respectivement $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ les mesures fournies par les 3 jauges.



- 1 Calculer les composantes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ du tenseur des déformations dans le repère $(Oxyz)$ en fonction de $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$.

Indication : reprendre les résultats de l'exercice (voir poly)

- 2 En déduire la déformation transversale ε_{zz}

Correction

Question 1 - Les formules permettant de dépouiller une rosette à 45° sont :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon_b \\ \varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (\varepsilon_c - \varepsilon_a) \end{array} \right.$$

En combinant avec les formules du cours :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{array} \right.$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [(1 - \nu) \varepsilon_b + \nu (\varepsilon_a + \varepsilon_c)] \\ \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_a + \varepsilon_c - (1 - \nu) \varepsilon_b] \\ \sigma_{xy} = G (\varepsilon_c - \varepsilon_a) \end{array} \right.$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [(1 - \nu) \varepsilon_b + \nu (\varepsilon_a + \varepsilon_c)] \\ \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_a + \varepsilon_c - (1 - \nu) \varepsilon_b] \\ \sigma_{xy} = G (\varepsilon_c - \varepsilon_a) \end{array} \right.$$

Question 2 - Déformation transversale est donnée par

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1 + \nu} (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

FIN DU COURS