

C O N C E P T I O N

Première épreuve : TECHNOLOGIE - durée : 2h30

Toutes les questions sont indépendantes. On précisera pour chaque calcul le modèle et les hypothèses et on mettra en évidence les résultats. Documents autorisés : cours et TD.

On se propose d'étudier une POMPE à PISTONS AXIAUX à CYLINDREE VARIABLE suivant le principe défini par la figure 1.1.

1-ETUDE GLOBALE DE LA POMPE ET DE SON MOTEUR D'ENTRAÎNEMENT :

La pompe comporte 7 pistons de diamètre $d = 15\text{mm}$, situés sur un cylindre de rayon $R = 24\text{mm}$. L'angle d'inclinaison maximal du plateau $\alpha = 18^\circ$ et la vitesse de rotation du bloc cylindre $N = 3000 \text{ tr/mn}$. On estime le rendement volumétrique $\eta_v = 0,90$ et le rendement mécanique $\eta_m = 0,96$ à la pression de fonctionnement en continu $P = 280 \text{ bars}$.

- En déduire :
- 1-1 : la cylindrée par tour
 - 1-2 : le débit réel à 3000 tr/mn
 - 1-3 : la puissance du moteur d'entraînement

2-ETUDE CINEMATIQUE :

Le bloc cylindre est entraîné autour de l'axe Ox à vitesse ω constante, le plateau est incliné d'un angle α , les 7 pistons de section s sont disposés sur un cylindre d'axe Ox et de rayon R .

2-1 : Ecrire l'expression de la vitesse instantanée du piston par rapport au bloc cylindre ;

2-2 : En déduire le débit instantané Q_i de la pompe et donner une représentation de $Q_i = f(\theta)$. On calculera les valeurs extrêmes (données numériques du I°).

2-3 : Calculer la valeur du critère de régularité de débit.

$$r = \frac{\Delta Q_i}{Q_{i\text{MAX}}} \quad \text{Intérêt d'un nombre impair de pistons.}$$

3 - EFFORT DE COMMANDE DE VARIATION DE CYLINDREE :

La variation de cylindrée est obtenue par rotation du plateau autour de l'axe OZ. En négligeant toutes les forces autres que celles dues à la pression statique de refoulement et en admettant, compte tenu du contact piston plateau réalisé par patin hydrostatique, que les frottements peuvent être négligés :

3-1 : Déterminer en fonction de θ l'expression de l'effort F_A de manoeuvre du plateau (la liaison A est telle que F_A est parallèle à OY - figure 1-1) ;

3-2 : Représenter $F_A = f(\theta)$ pour $\alpha = 18^\circ$ et $\alpha = 0$ et pour les valeurs $R = 24$ mm, $d = 15$ mm, $\delta = 50$ mm et $P = 280$ bars. Calculer les valeurs particulières.

4 - ETUDE DE LA COMMANDE A COMPENSATION DE PRESSION :

Afin de ne fournir, à haute pression, que le débit juste nécessaire, ce qui permet d'économiser l'énergie et d'éviter un échauffement important du fluide au passage dans la valve de surpression, il est possible de faire varier la cylindrée de la pompe en fonction de la pression de refoulement de manière à obtenir la caractéristique figure 1-2.

4-1 : Etude de la commande à action directe (figure 1-3)

a) Détermination du ressort (étude statique) :

En estimant que l'effort F_A variable est négligeable par rapport aux forces de pression de commande, que la course est de $C = 15$ mm, le diamètre du piston de commande $D = 12$ mm, que l'encombrement du système impose un diamètre extérieur $D_e \ll 50$ mm. Rechercher un ressort qui convienne et ses cotes de mise en place. On précisera les hypothèses de calcul, le matériau choisi et le critère de choix retenu.

b) L'effort F_A est tel que $-500 \text{ N} < F_A < +500 \text{ N}$. quels seraient les déplacements entraînés par cette variation d'effort si elle était lente.

c) En estimant la masse mobile $M = 300$ g, en négligeant les actions du fluide et la masse du ressort, évaluer la fréquence propre du système. Que peut-on en conclure ?

4-2 : Influence de la résistance R :

Pour obtenir une meilleure "stabilité" du système, on place une résistance R sur l'admission du fluide. En considérant le fluide comme incompressible et la résistance R comme laminaire, en négligeant tous les frottements et toutes les actions du fluide autres que la pression, écrire l'équation du mouvement du système de masse M sous une sollicitation périodique du plateau :

$$F_A = F_M \cos \omega t \quad (\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cte})$$

(M = masse équivalente de l'ensemble, K : raideur du ressort, alimentation à Po = constante).

Montrer l'intérêt de la résistance R.

4-3 : Commande par servocommande :

La solution précédente présente encore un certain nombre d'inconvénients. Faire un schéma d'une autre solution technologique en utilisant une commande asservie. Préciser son fonctionnement et ses avantages par rapport à la solution étudiée précédemment.

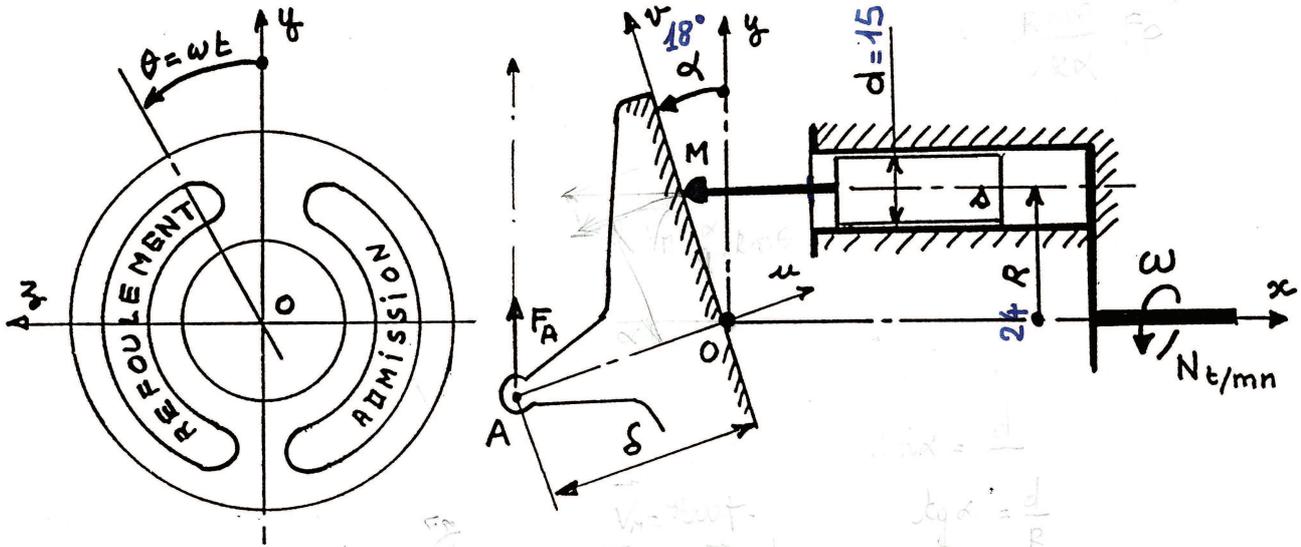


FIGURE 1-1

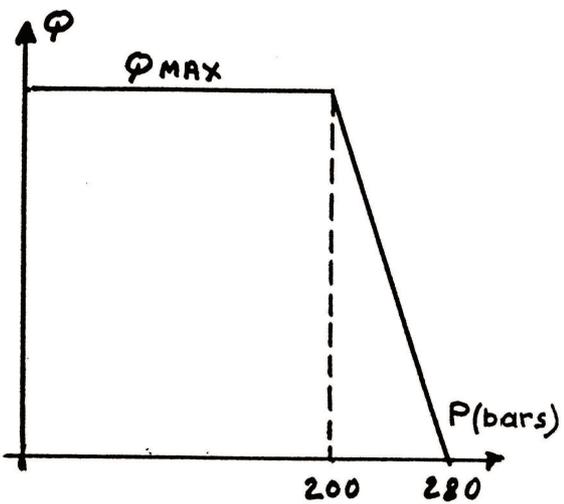


FIGURE 1-2

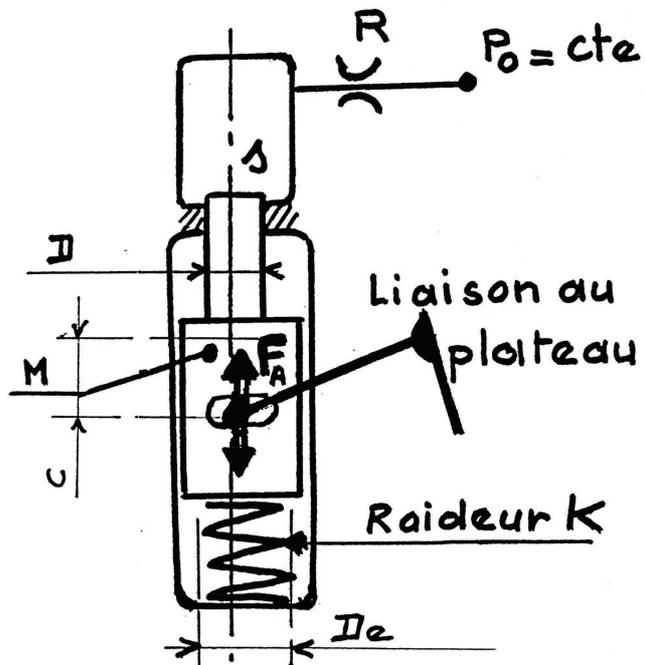


FIGURE 1.3

5. QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES.

5.1: Dans une première construction on a utilisé des pistons pleins. En admettant que le débit de fuite moyen par piston est voisin de celui d'un piston centré de hauteur de fuite h_0 et de longueur de fuite la longueur moyenne l_m (fig 12a), calculer :

a) Le débit de fuite pour un piston dans la configuration suivante :
 $d = 15 \text{ mm}$, $l_m = 41 \text{ mm}$, $h_0 = 0,02 \text{ mm}$ et pour un fluide de viscosité cinématique $\nu = 30 \text{ cst}$ et de masse volumique $\rho = 840 \text{ Kg/m}^3$ (pression de travail 280 bars).

b) En déduire le débit de fuite moyen total.

c) Calculer le débit de fuite moyen en tenant compte de la variation de longueur de fuite.

5.2: On suppose maintenant que le piston composé d'un tube mince se déforme sous l'action de la pression et, compte tenu des faibles déformations, que l'on peut admettre le modèle approché (fig 12b)

La déformation au bord intérieur est nulle ; la partie déformée est assimilée à un tronç de cône de longueur l_m parfaitement centré dans le cylindre.

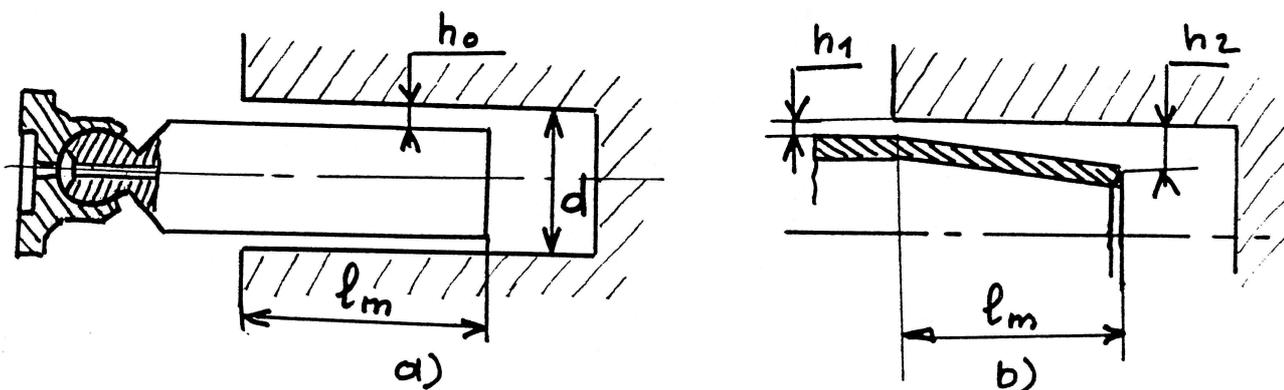
a) Ecrire l'expression du débit de fuite pour une longueur l_m , un diamètre d et des hauteurs extrêmes h_1 et h_2 .

b) Calculer le débit de fuite moyen pour un piston sachant que l'épaisseur de la paroi $e = 1,2 \text{ mm}$, que celui-ci est en acier de $E = 20000 \text{ daN/mm}^2$ et que le jeu à vide $J = 2 h_0 = 0,04 \text{ mm}$ (mêmes conditions qu'en 5.1)

c) Tenir compte de la variation de longueur de fuite

d) Ce piston est chargé et déchargé à chaque tour, choisir l'acier pour que à pleine puissance (3000 t/mn, 280 bars) la durée de vie soit supérieure à 2000 heures.

5.3 Déterminer les vis de liaison du corps de pompe.



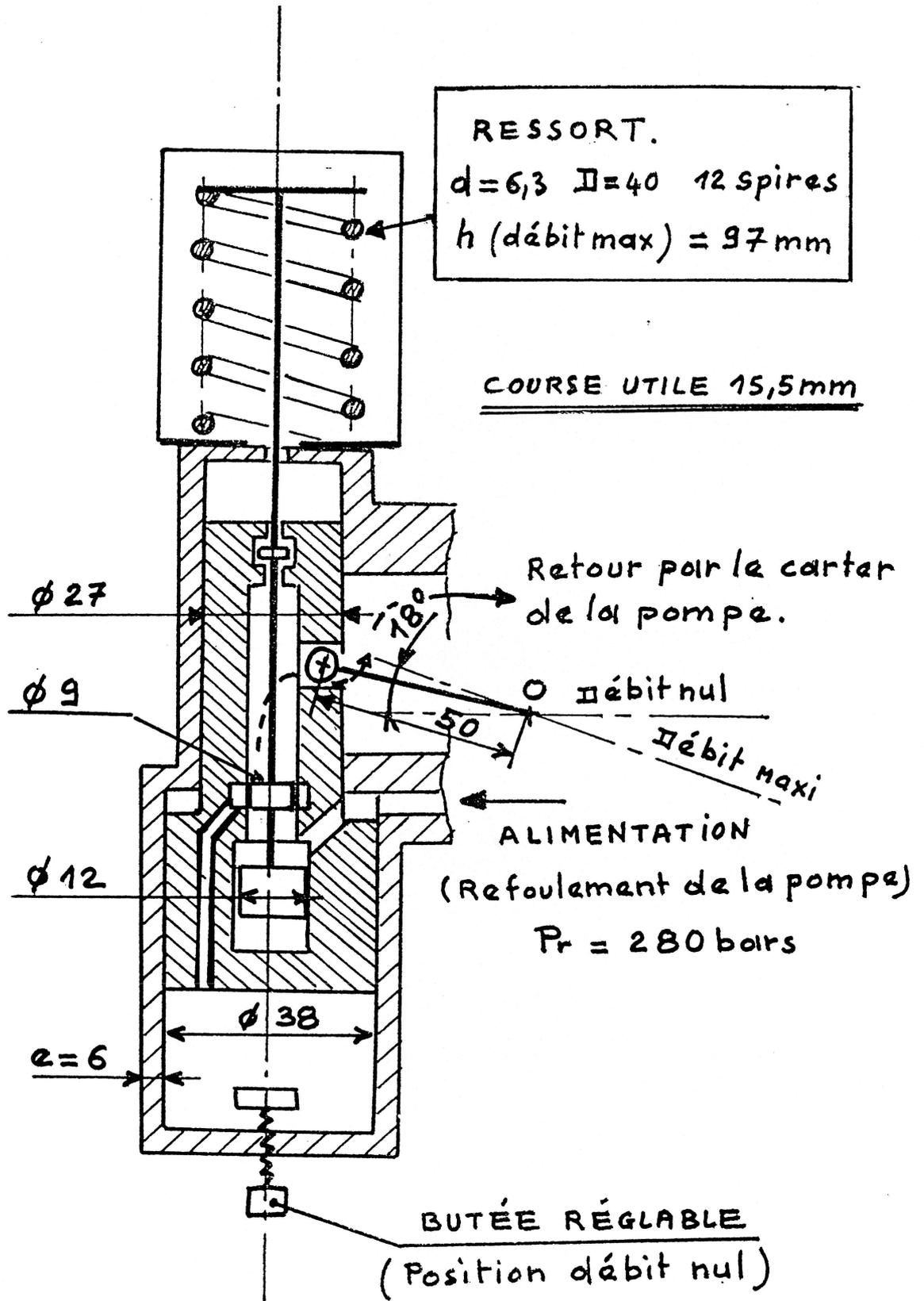


FIGURE 2.2

C O N C E P T I O N

Deuxième épreuve : PROJET - durée : 5 heures

On donne le dessin incomplètement défini, à l'échelle 1, d'une pompe à pistons axiaux à débit constant (fig.2-1). On se propose de la modifier pour la rendre à débit variable, la variation de débit étant commandée par un régulateur automatique à compensation de pression, dont le principe et les principales dimensions sont données par la figure 2-2.

On demande de réaliser le dessin d'étude du régulateur et de la partie de la pompe modifiée (fond 4-5, plateau 32). Prévoir un plateau sphérique centré en 0. Le reste de la pompe sera représenté par son encombrement. Toutefois, on précisera les trous d'alimentation et de retour du fluide de la servocommande ainsi que les liaisons avec les parties de la pompe que l'on aura conservées.

Pour la partie étudiée, on indiquera les jeux, les matériaux des pièces principales ainsi que toutes les indications nécessaires à la bonne définition de l'ensemble.

UV

Pompe à pistons axiaux
à cylindrée variable

on a : course = $2 \times R \cdot \tan \alpha = 15,596$
section = $\frac{\pi \cdot 15^2}{4}$ or 7 pistons

\Rightarrow cylindrée / tour = $7 \times$ course \times section = $19,292 \text{ mm}^3$
= $19,3 \text{ cm}^3$

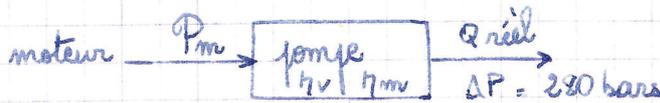
débit théorique à 3000 tr/min.

= $19,292 \times 3000 = 57876 \text{ cm}^3/\text{min}$

or pompe : $\eta_v = \frac{Q_{\text{réel}}}{Q_{\text{thé}}}$

$\Rightarrow Q_{\text{réel}} = 0,9 \times 57877 = 52099 \text{ cm}^3/\text{min}$

$Q_{\text{réel}} = 868,15 \text{ cm}^3/\text{s}$

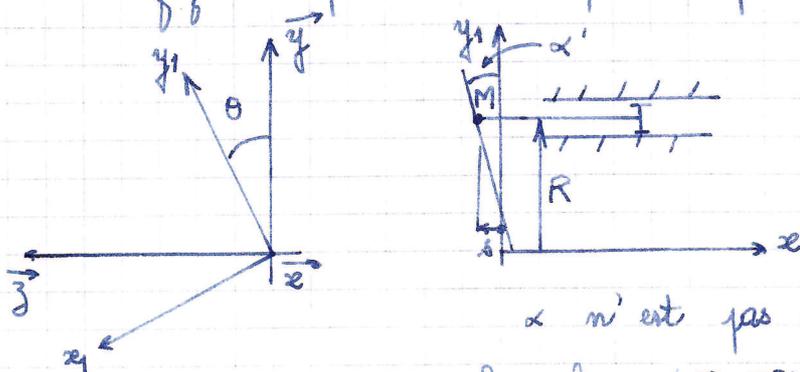


on a : $P_{mv} = \Delta P \times Q_{\text{réel}} \times (\eta_v \times \eta_{mv})^{-1}$

$P_{mv} = 28,13 \text{ kW}$

calcul de la vitesse linéaire du piston par rapport à la chemise.

⚠ la figure représente une position particulière.



α n'est pas en vraie grandeur dans le plan (\vec{x}, \vec{y})

O et M E tj au même plan (et \vec{u} normale.)

$$\vec{OM} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{OM} = s \vec{x} + R \vec{y}_1 \\ \vec{u} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y} \\ \vec{y}_1 = \cos \alpha \vec{y} - \sin \alpha \vec{z}_1 \end{cases} \quad (2)$$

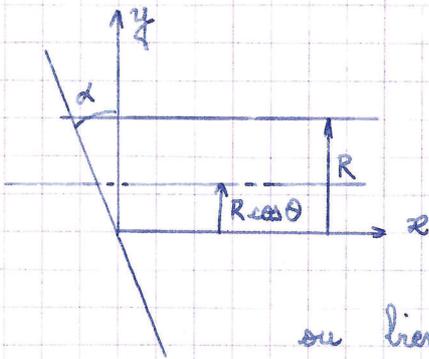
$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \theta \\ -\sin \alpha \sin \theta \end{pmatrix} \quad (x, y, z_1)$$

$$\Rightarrow \vec{OM} \cdot \vec{u} = 0 = s \cos \alpha + R \sin \alpha \cos \theta = 0$$

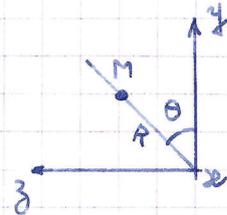
$$\Rightarrow s = -R \operatorname{tg} \alpha \cos \theta$$

$$\Rightarrow \text{vitesse} = \frac{ds}{dt} = v = \omega R \operatorname{tg} \alpha \sin \theta$$

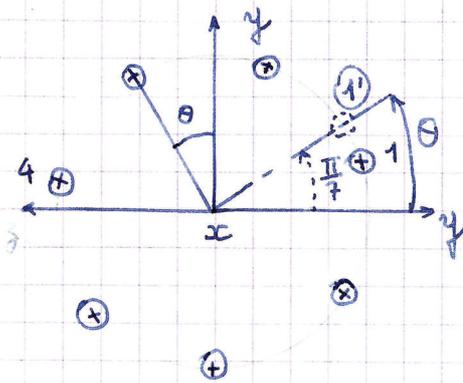
on peut aussi partir de :



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta}{R \cos \theta}$$



ou bien $s = -R \operatorname{tg} \alpha'$ et $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{R \cos \theta \operatorname{tg} \alpha}{R}$



valeur critique $\frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$;

qd le (4) est sur y : (1) - (1')

$$a : \theta = \frac{\pi}{7}$$

$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{7}$: 4 sont au

(s : section ici) refoulement

$$\Rightarrow Q_i = s \omega R \operatorname{tg} \alpha \left[\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{7} \right) + \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{7} \right) + \sin \left(\theta + \frac{6\pi}{7} \right) \right]$$

pour $\frac{\pi}{7} < \theta < \frac{2\pi}{7}$ 3 au refoulement

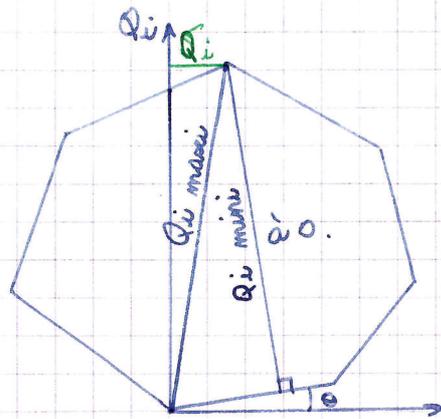
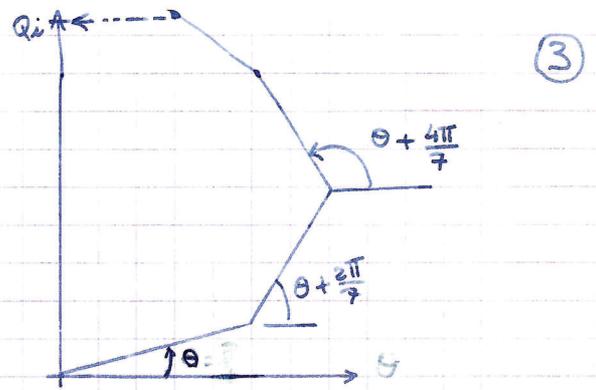
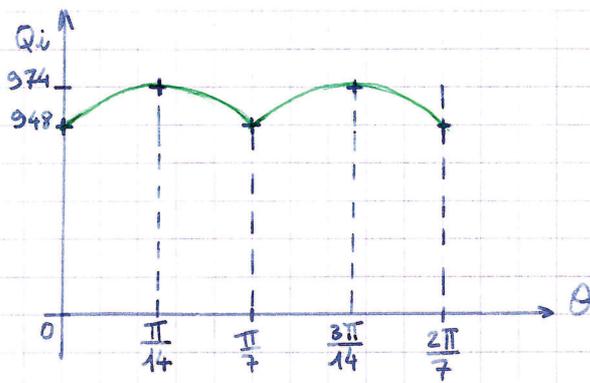
$$Q_i = s \omega R \operatorname{tg} \alpha \left[\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{7} \right) + \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{7} \right) \right]$$

Représentation de $Q_i = f(\theta)$ sur une période

$$s \omega R \operatorname{tg} \alpha = 433 \text{ cm}^3/\text{s}$$

à 0 coef 2,18 \rightarrow 948 cm^3/s

à $\frac{\pi}{7}$ coef 2,25 \rightarrow 974 cm^3/s



calcul du critère de régularité de débit

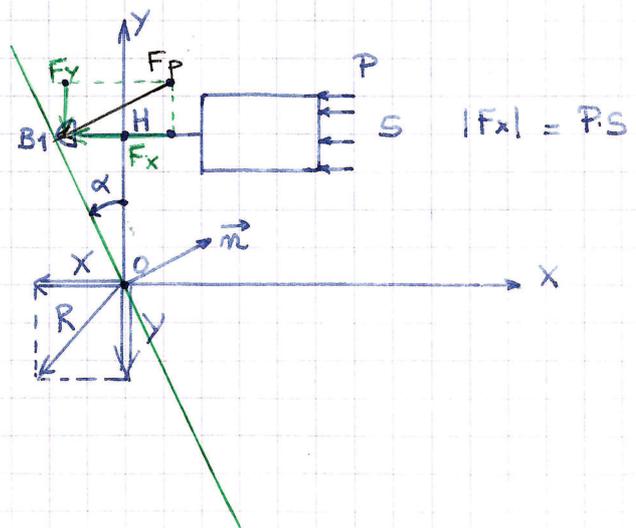
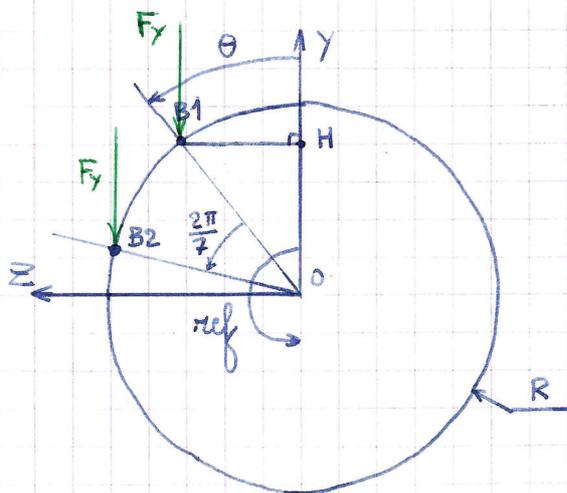
$$r = \frac{\Delta Q_i}{Q_{i \text{ max}}} = \frac{Q_{i \text{ max}} - Q_{i \text{ min}}}{Q_{i \text{ max}}} = 1 - \frac{Q_{i \text{ min}}}{Q_{i \text{ max}}} \uparrow \left(\cos \frac{\pi}{14} \right)$$

$$r = 2,6\%$$

Avec 14 pistons \hat{m} valeur de r .

on a la même régularité avec 7 pistons (impair) qu'avec 14 pistons (pair) \rightarrow on trouvera toujours un nbre impair de pistons.

$$M\% \vec{F}_A + M\% \text{ action des pistons} = 0$$



projection des axes des pistons dans OYZ

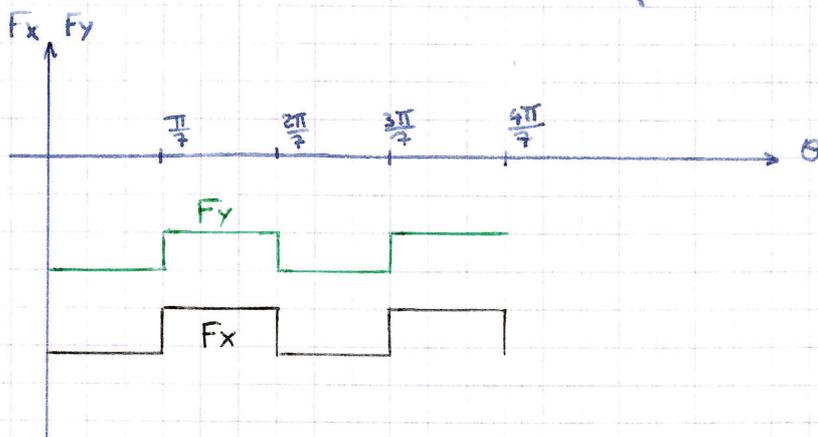
projection de \vec{F}_p (4)

$$\vec{R} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{m} \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix} \quad \vec{F}_p = \begin{cases} -PS = F_x \text{ (isoler le piston.)} \\ -PS \operatorname{tg} \alpha = F_y \end{cases}$$

$$\vec{R} = \begin{cases} X = -\sum PS \\ Y = -\sum PS \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad \text{soit pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{7}$$

$$\begin{cases} X = -4PS \\ Y = -4PS \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{4 "pistons"} \\ \text{au refoulement} \end{array}$$

$$\frac{\pi}{7} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{7} \quad \begin{cases} X = -3PS \\ Y = -3PS \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{3 au refoulement.} \end{array}$$

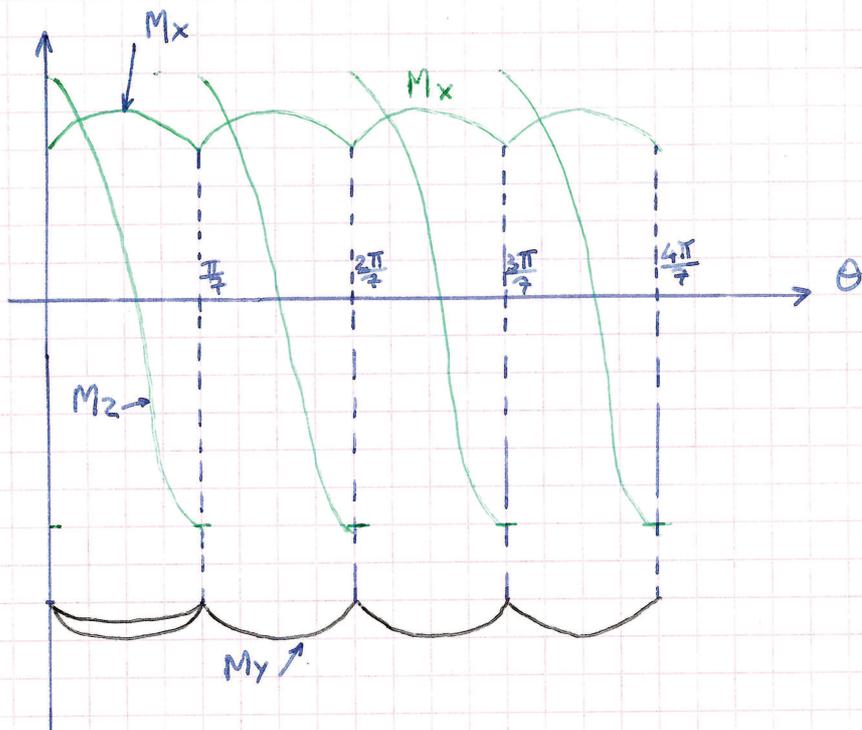


$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = \sum m \cdot r_x \text{ de chaque piston} = + \sum |F_y| R \sin \theta \\ M_x = + \sum PS \operatorname{tg} \alpha \cdot R \sin \theta. \\ m \cdot r_x / x = 0 \quad (F_x \parallel x) \quad (M_x > 0 \quad x \text{ vers } y) \\ M_y = - \sum PS R \sin \theta \\ M_z = \sum PS R \cos \theta + (PS \operatorname{tg} \alpha) R \cos \theta \operatorname{tg} \alpha \\ M_z = \sum PS R \cos \theta (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \sum \frac{PSR}{\cos^2 \alpha} \cos \theta. \end{array} \right.$$

Soit immédiatement : $\frac{\pi}{7} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{7}$

$$\begin{array}{l} M_x = PSR \operatorname{tg} \alpha \left(\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{7} \right) + \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{7} \right) + \sin \left(\theta + \frac{6\pi}{7} \right) \right) \\ M_y = -PSR \left(\sin \theta + \dots \dots + \sin \left(\theta + \frac{6\pi}{7} \right) \right) \\ M_z = \frac{PSR}{\cos^2 \alpha} \left(\cos \theta + \dots \dots + \cos \left(\theta + \frac{6\pi}{7} \right) \right) \end{array}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{7}$$

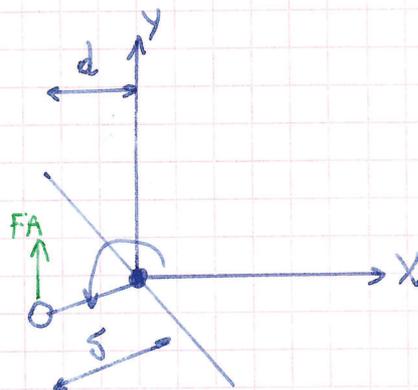
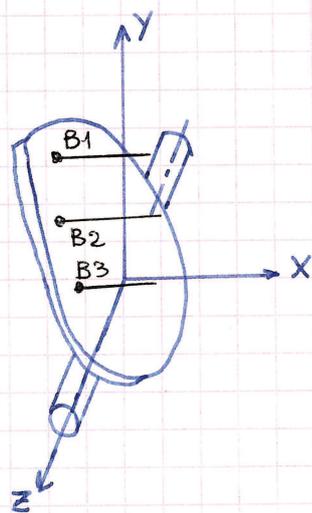


Rque : M_x est aussi le couple moteur théorique (on aurait pu le déduire de l'étude de la puissance théorique)

$$P_{th} = M_x \cdot \omega = Q_i \times P$$

↑
instantané

$$\rightarrow M_x = \frac{Q_i \cdot P}{\omega} = \frac{(SR\omega \sum \sin\theta) \cdot P}{\omega}$$



équilibre du plateau

$$F_A \delta \cos\alpha = M_z$$

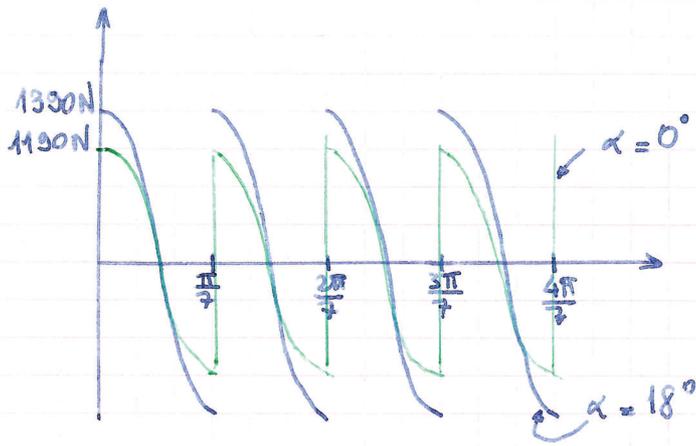
$$F_A = \frac{PSR}{\delta \cos^3\alpha} \sum_{k=1}^3 \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{7}\right)$$

31 - Expression de $F_A = f(\alpha)$

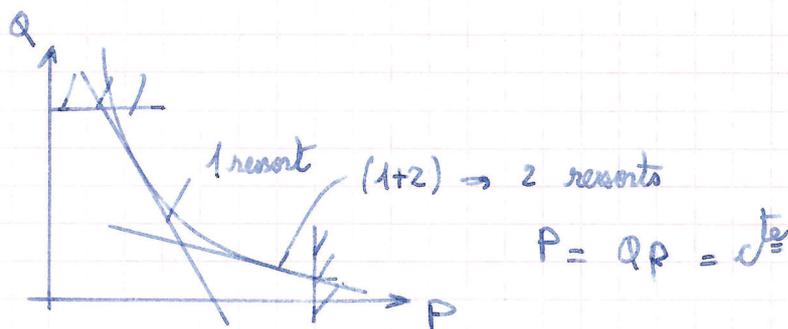
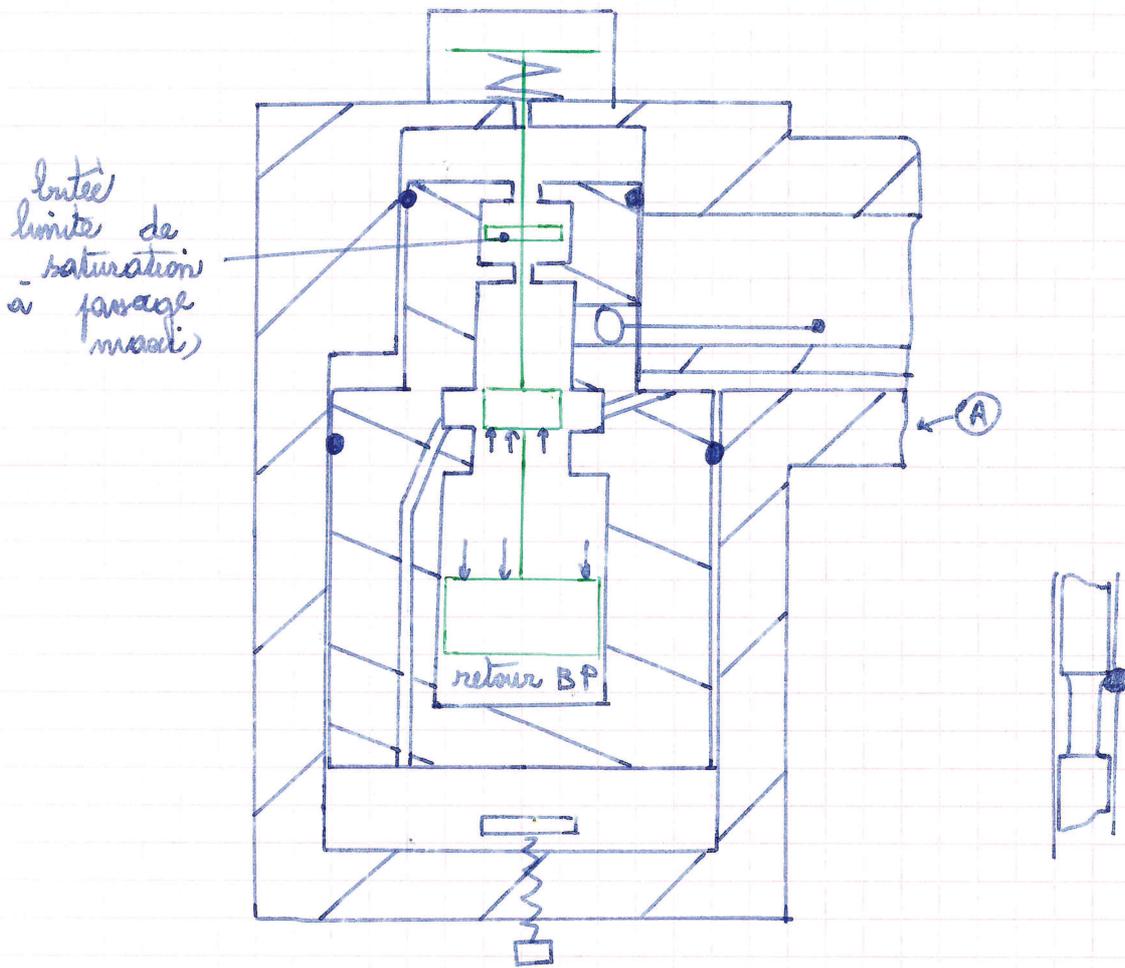
$$F_A = \frac{M_z}{\delta \cos\alpha} = \frac{PSR}{\delta} \frac{1}{\cos^3\alpha} \left[\cos\theta + \dots + \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{7}\right) \right]$$

représentation et application numérique

⑥



servo commande

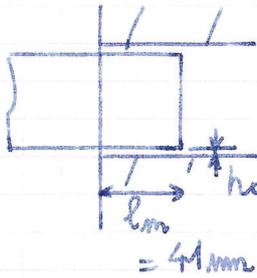


débit de fuite moyen pour 1 piston

(7)

5-2 - Piston centré

a)



$$q_{\text{centré}} = \frac{\pi}{12\mu} \frac{\Delta P}{l_{\text{m}}} D h_0^3$$

$$h_0 = \frac{J}{2} = 0,02$$
$$= 41 \text{ mm}$$

$$\gamma = 30 \text{ cst} = 30 \text{ mm}^2/\text{s}$$

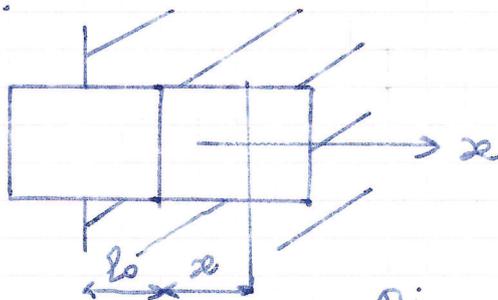
$$\mu = \gamma \rho = 0,025 \text{ P}$$

$$\Rightarrow Q_c = 8,58 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 0,86 \text{ cm}^3/\text{s}$$

b) débit de fuite moyen total

$$Q_{\text{total}} = \underbrace{\frac{Z}{2}}_{\text{nbre piston}} q_c = \frac{7}{2} \cdot 0,86 = 3 \text{ cm}^3/\text{s}$$

c) débit moyen en tenant compte de la variation de fuite.



$$l = l_0 + x$$

$$l = l_0 + R \text{tg} \alpha (1 - \cos \theta)$$

$$Q_i = \frac{\pi d}{12\mu} h_0^3 \Delta P \times \frac{1}{l_0 + R \text{tg} \alpha (1 - \cos \theta)}$$

moyenne de la fonction.

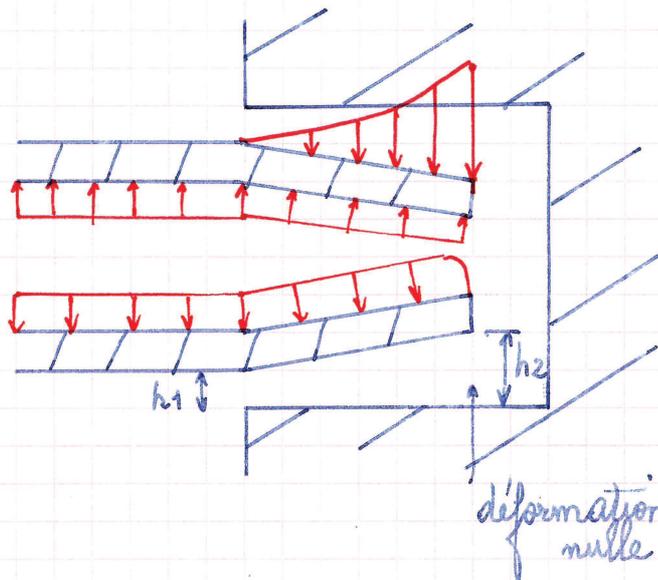
$$q_{\text{m}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{A}{l_0 + R \text{tg} \alpha (1 - \cos \theta)} d\theta$$

$$q_{\text{m}} = \frac{A}{\pi R \text{tg} \alpha} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(\frac{l_0}{R \text{tg} \alpha} + 1\right) - \cos \theta} = \frac{\pi R \text{tg} \alpha}{\sqrt{l_0^2 + 2R l_0 \text{tg} \alpha}}$$

piston tube déformable

piston tube mince déformable

8



$$h_2 = \frac{J}{2}$$

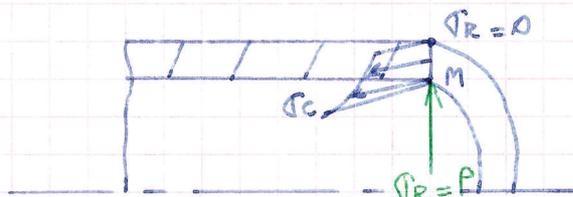
$$h_1 = \frac{J\epsilon - \Delta D}{2}$$

$$h_0 = \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1 + h_2}$$

a) débit de fuite pour 1 longueur l m, ϕ d.

$$q = \frac{\pi}{12\mu} d \frac{\Delta P}{l} h_0^3 = \frac{\pi}{12\mu} d \frac{\Delta P}{l} \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1 + h_2}$$

b) calcul du débit de fuite moyen



au pt M

$$\sigma_c = P \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \right)$$

$$\sigma_r = -P$$

point le plus chargé

$$d = 15 \text{ mm} \quad h_0 = 2 \text{ mm} \quad b = 7,48 \text{ mm} \quad a = 6,28 \text{ mm}$$

Appliquons la loi de Hooke

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E} [\sigma_c - \nu \sigma_r] \quad \text{avec } \nu = 0,3$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{P}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \nu \right) = 8,5 \cdot 10^{-4} \quad \text{et } D = 2b$$

$$\Delta D = 0,0127 \text{ mm} \quad h_1 = h_0 = 0,02 \text{ mm}$$

$$h_2 = \frac{J - \Delta D}{2} = 0,01365 \text{ mm}$$

$$q = \frac{\pi \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot 280 \cdot 10^5}{12 \cdot 0,02} \left[\frac{0,02^2 \cdot 0,01365^2}{0,02 + 0,01365} \right] \frac{10^{-12}}{10^{-3}} = 0,48 \text{ cm}^3/\text{s}$$

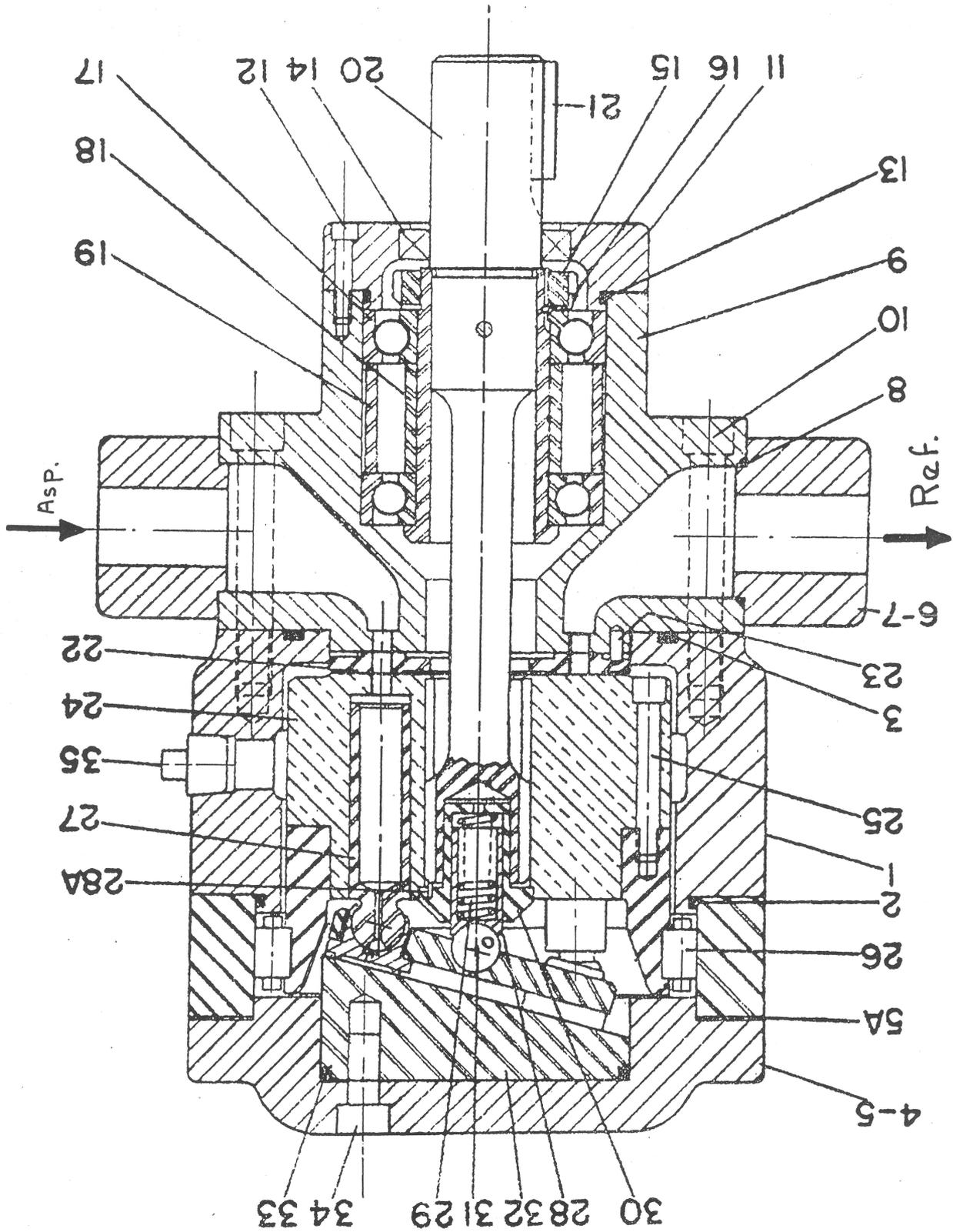


FIGURE 2-1