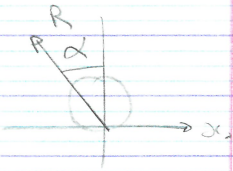


Déterminer le couple Γ nécessaire pour qu'un rouleau cylindrique (S) remonte une pente sans glisser.

- rayon R .
- moment d'inertie par rapport à (G, \vec{z}_0) noté C .
- m : masse du rouleau.
- α : angle de la pente.
- a : accélération du rouleau.



On applique le PFD au solide (S) dans son mouvement par rapport à R_0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{S \rightarrow S} \\ \vec{R}_{S \rightarrow S} \\ \vec{M}_{G, S \rightarrow S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{D}_{S/R_0} \\ m \vec{\delta}_{R_0}(G) \\ \vec{\delta}_G S/O \end{array} \right\}$$

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \begin{vmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{vmatrix}_{e_0} + \begin{vmatrix} -R \sin \alpha \\ R \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{e_0} + \begin{vmatrix} -f \cos \alpha \\ f \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{e_0} = m \begin{vmatrix} \ddot{x}(t) \cos \alpha \\ \ddot{x}(t) \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{e_0}$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \vec{GI} \wedge \vec{R} + \vec{GI} \wedge \vec{f} + \vec{\Gamma} = \vec{\delta}_G S/O$$

$$\begin{vmatrix} GI \sin \alpha \\ -GI \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R \sin \alpha \\ R \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} GI \sin \alpha \\ -GI \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -f \cos \alpha \\ f \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{vmatrix} = \vec{\delta}_G S/O$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ GI \sin \alpha R \cos \alpha - GI \cos \alpha R \sin \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \alpha (f \cos \alpha) + \cos \alpha (f \sin \alpha) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{vmatrix} = \vec{\delta}_G S/O$$

$$= (\cos \alpha (f \sin \alpha) - \sin \alpha (f \cos \alpha) + \Gamma) \vec{z}_0 = \vec{\delta}_G S/O$$

$$\vec{\delta}_G S/O = I_G \cdot \vec{\delta}_G S/O = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = C \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = C \ddot{\theta} + \sin \alpha (f \cos \alpha) - \cos \alpha (f \sin \alpha)}$$

On isole (S):

• pesanteur $\left\{ F_{pes \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -mg \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$

• action de la pente

$$\left\{ F_{pente \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N \vec{y} + T \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$$

• Action du moteur

$$\left\{ F_{mot \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ -\vec{r}_3 \end{matrix} \right\}_G$$

$$\left\{ F_{pente \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N \vec{y} + T \vec{x} \\ \vec{m}_I + \vec{q}_I (N \vec{y} + T \vec{x}) \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} N \vec{y} + T \vec{x} \\ RT \vec{z} \end{matrix} \right\}$$

$\circ R \vec{y} \wedge (N \vec{y} + T \vec{x})$
 $R \vec{y} \wedge T \vec{x}$
 $RT \vec{z}$

$$\left\{ \begin{matrix} R \vec{y} \wedge \vec{0} = -mg \vec{y}_0 + N \vec{y} + T \vec{x} \\ \vec{m}_G \vec{0} = RT \vec{z} - \vec{r}_3 \end{matrix} \right\}$$

$$\vec{\gamma}_{R_0}(G) = \frac{d_{R_0}}{dt} \vec{V}_{R_0}(G) \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{R_0}(G) = \frac{d_{R_0}}{dt} \vec{O}_G$$

$$\vec{O}_G = \alpha(t) \vec{x} + R \vec{y}$$

$$\frac{d_{R_0}}{dt} \vec{O}_G = \vec{x} \frac{d_{R_0}}{dt} \alpha(t) + \vec{0} = \dot{\alpha} \vec{x}$$

$$\vec{\gamma}_{R_0}(G) = \frac{d_{R_0}}{dt} \vec{V}_{R_0}(G) = \dot{\alpha} \vec{x}$$

$$\vec{\delta}_G s/o = \frac{d_{R_0}}{dt} \vec{V}_G s/o$$

$$\vec{V}_G s/o = I_G (s, \vec{\omega} s/o) = \left[I_G(s) \right] \left[\vec{\omega} s/o \right]$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{bmatrix} = -C \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$\left. \begin{aligned} m \vec{\gamma}_{R_0}(t) &= m \ddot{x} \vec{x} \\ S_C \vec{s}_0 &= -C \ddot{\theta} \vec{z} \end{aligned} \right\}$$

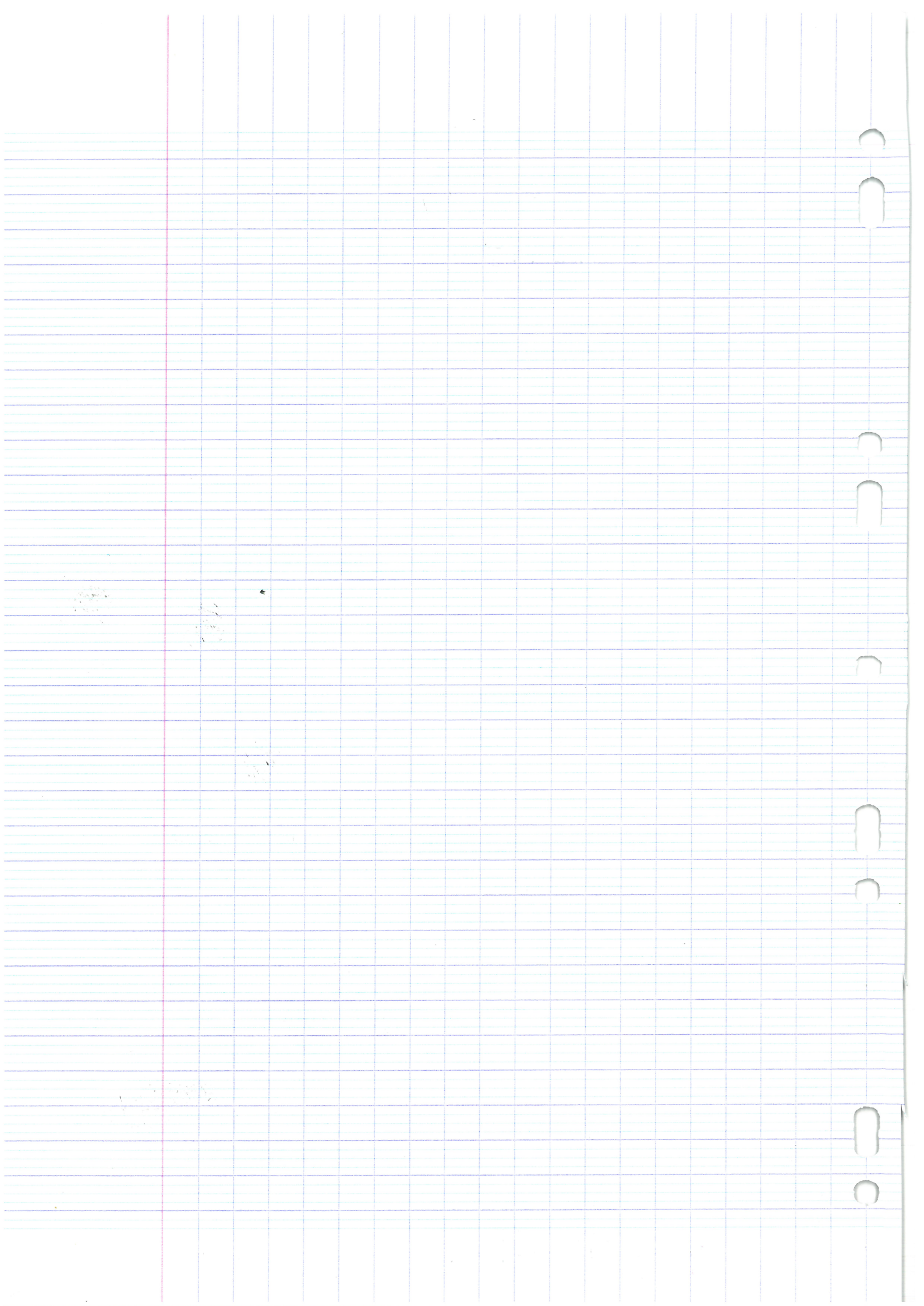
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} -mg \vec{y}_0 + N \vec{y} + T \vec{x} &= m \ddot{x} \vec{x} \\ RT \vec{z} - \Gamma \vec{z} &= -C \ddot{\theta} \vec{z} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{y}_0 = \cos \alpha \vec{y} + \sin \alpha \vec{x}$$

$$\left\{ \begin{aligned} -mg \sin \alpha + T &= m \ddot{x} & \Rightarrow T &= m \ddot{x} + mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha + N &= 0 \\ RT - \Gamma &= -C \ddot{\theta} & \Rightarrow \Gamma &= RT + C \ddot{\theta} = RT + C \frac{\ddot{x}}{R} \end{aligned} \right.$$

$$\Gamma = R(m \ddot{x} + mg \sin \alpha) + C \frac{\ddot{x}}{R}$$

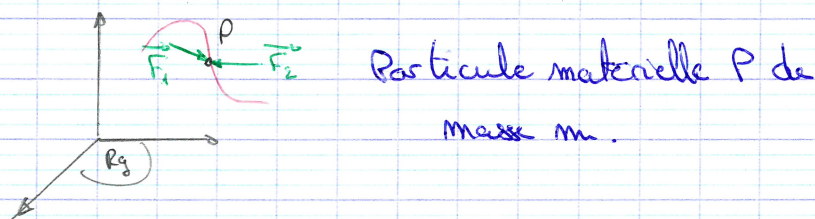
$$\Gamma = \left(\frac{C}{R} + mR \right) \ddot{x} + Rmg \sin \alpha$$



Introduction à la Mécanique
analytique.
MECANIQUE ENERGETIQUE.

"Formalisme d'Ambert-Lagrange"

1. Travail et puissance virtuels: Principe de d'Ambert



• Principe fondamental de Newton -

$$\exists R_g / \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{\gamma}_{R_g}(P)$$

• Principe de d'Ambert

idée d'un \vec{u} virtuel congru en dehors du temps.

$$\forall \vec{u}, \forall t \quad \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{\gamma}_{R_g}(P) \cdot \vec{u}$$

→ une première forme de ce principe est donnée à partir d'un \vec{u} virtuel équivalent à un déplacement virtuel $\delta \vec{P}$
(déplacement élémentaire - infinitésimal - $d\vec{OP}^*$)

$$\underbrace{\delta \vec{P} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{F}_i}_{\text{travail virtuel des forces appliquées}} = m \underbrace{\vec{\gamma}_{R_g}(P) \cdot \delta \vec{P}}_{\text{travail virtuel de la quantité d'accélération}}$$

travail virtuel des forces appliquées.

travail virtuel de la quantité d'accélération.

Pour 1 particule, le travail virtuel de la quantité galiléenne est par les déplacements virtuels = Σ travaux virtuels de toutes les forces appliquées

→ une seconde forme de ce principe est obtenue à partir d'une vitesse virtuelle $\vec{V}^*(P)$

$$\underbrace{V^*(P) \sum_{i=1}^n \vec{F}_i}_{\text{Puissance virtuelle des forces appliquées}} = M \underbrace{\gamma_{Rg}(P)}_{\text{Puissance virtuelle de la quantité d'accélération}} \vec{V}^*(P)$$

Puissance virtuelle des forces appliquées

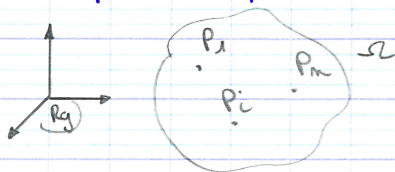
$$\mathcal{P}_e^*(\vec{P} \rightarrow \vec{P})$$

Puissance virtuelle de la quantité d'accélération

$$\mathcal{P}_a^*(P/Rg)$$

2. Généralisation à un système matériel Ω

Principe des puissances virtuelles.



Le principe de d'Alembert s'applique à chacune des particules.

$$\mathcal{P}_e^*(\vec{P}_i \rightarrow \vec{P}_i) = \mathcal{P}_a^*(P_i/Rg) \text{ avec } \vec{V}^* \text{ défini par } \vec{V}_i^*$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall \vec{V}_i^* \quad \underbrace{\vec{F}(\vec{P}_i \rightarrow \vec{P}_i)}_{\text{}} \cdot \vec{V}_i^* &= m_i \gamma_{Rg}(P_i) \cdot \vec{V}_i^* \\ &= \vec{F}(\Omega \rightarrow P_i) + \sum_{j=1}^n \vec{F}(P_j \rightarrow P_i) \end{aligned}$$

Sur le système \mathcal{S} , on a $\forall \vec{V}_i^*$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^n \vec{F}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow P_i) \cdot \vec{V}_i^*}_{\text{Puissance virtuelle des efforts extérieurs à } \mathcal{S}} + \underbrace{\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \vec{F}(P_j \rightarrow P_i) \vec{V}_i^*}_{\text{Puissances virtuelles des intefforts de } \mathcal{S}} = \underbrace{\sum_{i=0}^n m_i \vec{X}_{Rg}(P) \cdot \vec{V}_i^*}_{\text{Puissance virtuelle des quantités d'accélération } \mathcal{S}/R_g}$$

Puissance virtuelle des efforts extérieurs à \mathcal{S} Puissances virtuelles des intefforts de \mathcal{S} Puissance virtuelle des quantités d'accélération \mathcal{S}/R_g .

On a donc :

$$\forall V^* \text{ et } \forall \mathcal{S} \quad \mathcal{P}_e^*(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}) + \mathcal{P}_i^*(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_a^*(\mathcal{S}/R_g) \quad \text{PPV.}$$

3. Application aux solides indéformables S_k

Δ Cas d'un solide indéformable.

des champs de déplacements ou de vitesses virtuels doivent être rigidifiants.

$$\vec{V}^*(A) = \vec{V}^*(B) + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}^*$$

La résolution du problème revient à faire "une photo" (à l'instant t) avec les actions et les accélérations réelles, mais le champ des vitesses est virtuel et arbitraire.

$$\left\{ \mathcal{P}_{\bar{S}_k \rightarrow S_k}^* \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\bar{S}_k \rightarrow S_k) \\ \vec{\Pi}_A(\bar{S}_k \rightarrow S_k) \end{array} \right\}_A \quad \text{Torseur des efforts.}$$

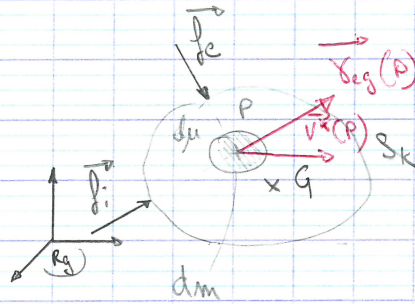
$$\left\{ \mathcal{V}_{S_k/R_g}^* \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}^* S_k/R_g \\ \vec{V}_R^*(A) \end{array} \right\} \quad \text{Torseur animatique}$$

$$\left\{ \mathcal{D}_{S_k/R_g} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\gamma}_{R_g}(G) \\ \vec{S}_A(S_k/R_g) \end{array} \right\} \quad \text{Tenseur dynamique.}$$

$$\vec{S}_A(S/R) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{v}_P(P) dm.$$

Pour obtenir le résultat probant, il convient de choisir un champ de vitesses qui fasse travailler les efforts auxquels on s'intéresse.

• Pour le solide S_k .



$$\int_e f_e dm + \int_i f_i dm = \vec{\gamma}_{R_g}(P) dm.$$

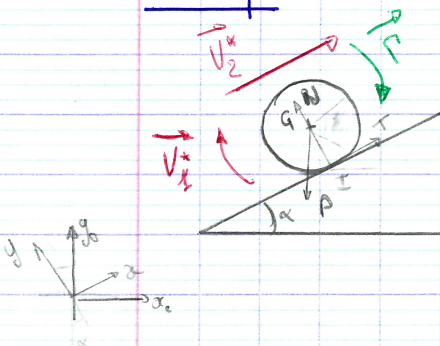
Soit le champ de vitesse virtuel $\vec{v}^*(P)$

$$\int_{S_k} \int_e f_e dm \vec{v}^*(P) + \int_{S_k} \int_i f_i dm \vec{v}^*(P) = \int_{S_k} \vec{\gamma}_{R_g}(P) \cdot \vec{v}^*(P) dm.$$

$$\mathcal{P}_e^* + \mathcal{P}_i^* = \mathcal{P}_a^*$$

= 0 pour le solide indéformable

Exemple:



$$\mathcal{P}_e^* = \int_0^{2\pi} \int_0^R (P_y \vec{e}_y - R \sin \alpha \vec{e}_x + R \cos \alpha \vec{e}_y + T \cos \alpha \vec{e}_x + T \sin \alpha \vec{e}_y) \cdot \vec{\omega}^* dz dx$$

$$\mathcal{P}_e^* = \left\{ \begin{array}{l} -mg \cos \alpha \vec{y} - mg \sin \alpha \vec{x} + N \vec{y} + T \vec{x} \\ \vec{R} \wedge \vec{R} + \vec{R} \wedge \vec{T} \end{array} \right\}_G$$

$$\vec{R} \wedge \vec{R} + \vec{R} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} R \sin \alpha & -R \sin \alpha & 0 \\ -R \cos \alpha & R \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R \sin \alpha & T \cos \alpha \\ -R \cos \alpha & T \sin \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T \cos^2 \alpha & T \sin^2 \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{P}_e^* = \left\{ \begin{array}{l} P_y \vec{e}_y - R \sin \alpha \vec{e}_x + R \cos \alpha \vec{e}_y + T \cos \alpha \vec{e}_x + T \sin \alpha \vec{e}_y \\ T \vec{e}_3 - T \vec{e}_3 \end{array} \right\}_G \left\{ \vec{\omega}^* \right\} = T \vec{e}_3$$

Meca Energ.
13/01/09.
suite.

$$\mathcal{B}_a^* = \left\{ D_{S/R} \right\} \left\{ v^* \right\}$$

$$\mathcal{B}_e^* = \left\{ \vec{F}_{S \rightarrow S} \right\} \left\{ v^* \right\}$$

avec $\left\{ v^* \right\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^* \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}_G$
mvt virtuel rigide.

$$\mathcal{B}_a^* = \int_S \vec{\gamma}_R(P) \cdot \vec{v}^*(P) \, dm \quad \text{avec} \quad \vec{v}^*(P) = \vec{v}^*(G) + \vec{PG} \wedge \vec{\Omega}^*$$

$$\mathcal{B}_a^* = \int_S \vec{\gamma}_R(P) \left[\vec{v}^*(G) + \vec{PG} \wedge \vec{\Omega}^* \right]$$

$$= \int_S \left[\vec{\gamma}_R(P) \vec{v}^*(G) + \vec{\gamma}_R(P) (\vec{PG} \wedge \vec{\Omega}^*) \right] dm$$

$$= \int_S \vec{\gamma}_R(P) \vec{v}^*(G) \, dm + \int_S \vec{\gamma}_R(P) (\vec{PG} \wedge \vec{\Omega}^*) \, dm$$

$$= m \vec{\gamma}_R(G) \vec{v}^*(G) + \int_S \vec{\Omega}^* \cdot (\vec{\gamma}_R(P) \wedge \vec{PG}) \, dm$$

$$= m \vec{\gamma}_R(G) \vec{v}^*(G) + \vec{\Omega}^* \cdot \underbrace{\int_S \vec{\gamma}_R(P) \wedge \vec{PG} \, dm}_{\vec{\delta}_G(S/R)}$$

$$= m \vec{\gamma}_R(G) \vec{v}^*(G) + \vec{\Omega}^* \cdot \vec{\delta}_G(S/R)$$

$$\mathcal{B}_a^* = \left\{ D_{S/R} \right\} \left\{ v^* \right\}$$

$$= \begin{Bmatrix} m \vec{\gamma}_R(G) \\ \vec{\delta}_G(S/R) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}^* = \dot{\theta}^* \vec{z} \\ \vec{v}_R^*(G) \end{Bmatrix} = m \vec{\gamma}_R(G) \vec{v}_R^*(G) + \vec{\Omega}^* \cdot \vec{\delta}_G(S/R)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_a^* = m \vec{\gamma}_R(G) \vec{v}^*(G) + \vec{\Omega}^* \cdot \vec{\delta}_G(S/R)$$

$$= m \ddot{x} \vec{x} \cdot \vec{0} + \dot{\theta}^* \vec{z} \cdot (-c \vec{0} \vec{z})$$

$$\mathcal{B}_a^* = -c \dot{\theta}^* \ddot{\theta}$$

$$\{D_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} m \ddot{\vec{x}} \\ -c \ddot{\vec{z}} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_a^* = \begin{Bmatrix} m \ddot{\vec{x}} \\ -c \ddot{\vec{z}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}}^* \\ \dot{\vec{z}}^* \end{Bmatrix}_G = -c \ddot{\vec{z}} \dot{\vec{z}}^*$$

$$\mathcal{B}_c^* = \{ \mathcal{F}_{S \rightarrow S}^* \} \{ V_1^* \}$$

$$\text{ou } \mathcal{B}_c^* = \int_S \vec{f}_e \cdot dV$$

$$\mathcal{B}_c^* = \begin{Bmatrix} -mg \vec{y}_0 + N \vec{y} + T \vec{x} \\ -\Gamma \vec{z} + RT \vec{z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}}^* \\ \dot{\vec{z}}^* \end{Bmatrix} = \dot{\vec{z}}^* (RT - \Gamma)$$

$$\text{PPV: } \mathcal{B}_c^* = \mathcal{B}_a^* \quad \forall V_1^*$$

$$\Rightarrow \cancel{\dot{\vec{z}}^*} (RT - \Gamma) = -c \cancel{\dot{\vec{z}}^*} \ddot{\vec{z}} \quad \Rightarrow \boxed{-c \ddot{\vec{z}} = RT - \Gamma}$$

$$\{V_2^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\vec{x}}^* \vec{x} \end{Bmatrix}_G \quad \text{mv}^+ \text{ virtuel rigide/ant.}$$

$$\mathcal{B}_a^* = \begin{Bmatrix} m \ddot{\vec{x}} \\ -c \ddot{\vec{z}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\vec{x}}^* \vec{x} \end{Bmatrix}_G = m \ddot{\vec{x}} \dot{\vec{x}}^*$$

$$\mathcal{B}_c^* = \{ \mathcal{F}_{S \rightarrow S}^* \} \{ V_2^* \} = \begin{Bmatrix} -mg \vec{y}_0 + N \vec{y} + T \vec{x} \\ -\Gamma \vec{z} + RT \vec{z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\vec{x}}^* \vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$= -mg \dot{\vec{x}}^* \underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{x}}_{\sin \alpha} + N \dot{\vec{x}}^* \underbrace{\vec{y} \cdot \vec{x}}_0 + T \dot{\vec{x}}^* \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{x}}_{=1}$$

$$= -mg \dot{\vec{x}}^* \sin \alpha + T \dot{\vec{x}}^*$$

$$\text{PPV: } \mathcal{B}_c^* = \mathcal{B}_a^* \quad \forall V_2^*$$

$$-mg \dot{\vec{x}}^* \sin \alpha + T \dot{\vec{x}}^* = m \dot{\vec{x}}^* \ddot{\vec{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{\vec{x}} = -mg \sin \alpha + T}$$

5. Cas d'un ensemble (Système) de solides indéformables S:

On choisit un champ de vitesses virtuel rigidifiant, pr ts les solides sous la forme d'un torseur $\{V^*\}$ quelconque.

Si les inter-efforts ds le système st nuls, (solides indéformables, liaisons entre solides parfaites - non dissipatives).

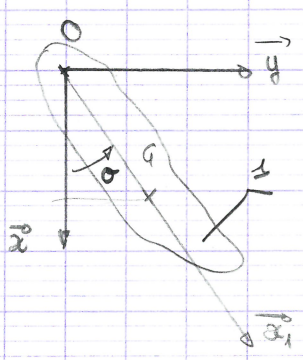
$$B_c^* = \left\{ \mathcal{F}_{\vec{\Sigma} \rightarrow \vec{\Sigma}} \right\} \{V^*\} \quad B_i^* = 0$$

$$B_a^* = \left\{ D_{\vec{\Sigma}/R_g} \right\} \{V^*\}$$

PPV $B_a^* = B_c^* \quad \forall \{V^*\}$

~~$$\left\{ D_{\vec{\Sigma}/R_g} \right\} \{V^*\} = \left\{ \mathcal{F}_{\vec{\Sigma} \rightarrow \vec{\Sigma}} \right\} \{V^*\}$$~~

$$\left\{ D_{\vec{\Sigma}/R_g} \right\} = \left\{ \mathcal{F}_{\vec{\Sigma} \rightarrow \vec{\Sigma}} \right\} \quad \underline{\text{PFD}}$$



- pendule articulé (liaison pivot)
- $(0, \vec{x}, \vec{y})$ plan de symétrie matérielle.
- masse m.
- Ⓠ réactions en 0
- Ⓠ l'équation de mouvement de 1.

$$B_a^* = \left\{ D_{1/R} \right\} \{V^*\} \quad \text{avec} \quad \{V^*\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{1/R} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_0 = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_0$$

$$B_a^* = \left\{ \begin{matrix} m \vec{v}_c(G) \\ c \ddot{\alpha} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{avec } \vec{O}G = \begin{pmatrix} L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_c(G) = \begin{pmatrix} -L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}(G) = \begin{pmatrix} L \dot{\alpha} \cos \alpha \\ -L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{O}G = L \vec{x}_1$$

$$\vec{O}G \wedge \vec{r}(G) = \begin{pmatrix} L \cos \alpha & -L \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - L \ddot{\alpha} \sin \alpha \\ L \sin \alpha & -L \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + L \ddot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_A = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = G$$

$$= \begin{vmatrix} L^2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 + L^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \alpha \\ 0 \\ L^2 \dot{\alpha}^2 \end{vmatrix}$$

$$m_A = m_B + \overline{BA} \wedge \overline{R}$$

$$m_g(P) = \overline{GQ} \wedge \overline{P} = \begin{vmatrix} L \cos \theta & 0 & 0 \\ L \sin \theta & -P & 0 \\ 0 & 0 & L P \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L P \cos \theta \end{pmatrix}$$

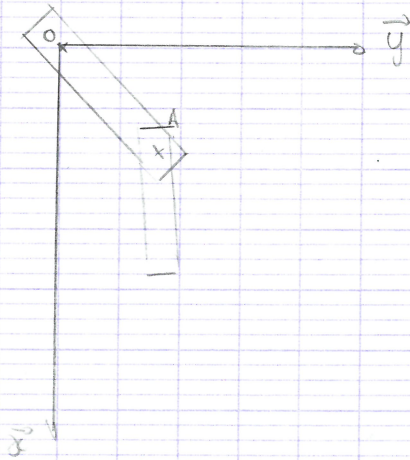
$$\mathcal{G}_e^x = \left\{ \overline{G} \right\}_{\vec{1} \rightarrow \vec{2}} \left\{ \overline{U}^x \right\} = \begin{pmatrix} -P \vec{y} + X \vec{x} + Y \vec{y} \\ + L P \sin \theta \vec{z} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = -L P \sin \theta \dot{\theta}^x$$

$$\begin{pmatrix} L \sin \theta \\ L \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

PPV: $\mathcal{G}_e^x = \mathcal{G}_a^x$

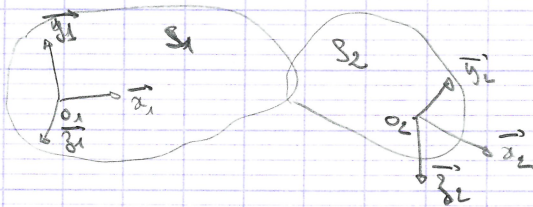
$$-L P \sin \theta \dot{\theta}^x = C \ddot{\theta} \dot{\theta}^x$$

$$\underline{L P \sin \theta \dot{\theta}^x = C \ddot{\theta}} \Rightarrow \underline{m g \cos \theta \dot{\theta}^x = C \ddot{\theta}(t)}$$



4. Formulation et application de la méthode des puissances virtuelles dans le cas d'un système mécanique paramétré.

$$\Sigma = \{S_1, S_2\}$$



$$\begin{aligned} \overline{o_1 o_2} &= \overset{q_1}{x(t)} \vec{x}_1 + \overset{q_2}{y(t)} \vec{y}_1 + \overset{q_3}{z(t)} \vec{z}_1 \\ \overline{\Omega_{z/1}} &= \overset{q_4}{\dot{\varphi}} \vec{z}_2 + \overset{q_5}{\dot{\omega}} + \overset{q_6}{\dot{\varphi}} \vec{z}_1 \end{aligned}$$

paramétrage primitif.

Paramétrage primitif

On associe à toute position du système Σ ds le repère R_g .

un ensemble de variables (nombres réels) appelés paramètres q .
la position d'un point $\Pi \in \Sigma$ est déterminé par q_1, q_2, \dots, q_n
et s'exprime par:

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}(q, t)$$

la vitesse d'un point Π :

$$\vec{v}_{R_3}(\Pi) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t}$$

$$d_{R_3} \vec{\pi}(q, t) = \frac{\partial \vec{\pi}(q, t)}{\partial q_i} d_{R_3} q_i + \frac{\partial \vec{\pi}(q, t)}{\partial t} dt$$

$$\vec{v}_{R_3}(\Pi) = \frac{d_{R_3} \vec{\pi}(q, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{\pi}(q, t)}{\partial q_i} \times \underbrace{\frac{d_{R_3} q_i}{dt}}_{\dot{q}_i} + \frac{\partial \vec{\pi}(q, t)}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

Equation de liaison -

→ holonomes (ou géométriques)

→ non-holonomes (ou cinématiques)

holonomes: h liaisons.

$$f_j(q, t) = 0$$
$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \text{ pour } j = 1 \text{ à } h. \quad (1)$$

non-holonomes: l liaisons.

$$f_j(q, \dot{q}, t) = 0$$
$$a_{j1} \dot{q}_1 + a_{j2} \dot{q}_2 + \dots + a_{ji} \dot{q}_i + \dots + a_{jn} \dot{q}_n + b_j = 0$$

ou encore $\sum_{i=1}^n a_{ji}(q, t) \dot{q}_i + b_j(q, t) = 0$

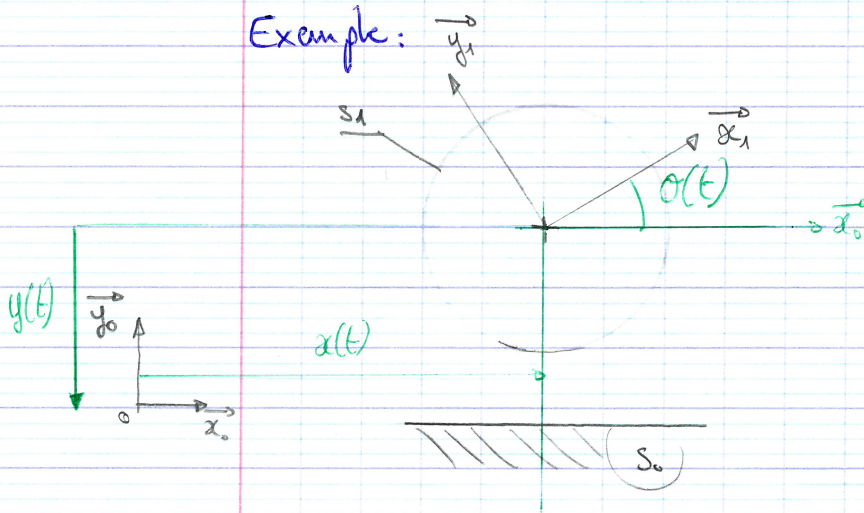
ou encore $a_{ji}(q, t) \dot{q}_i + b_j(q, t) = 0 \quad (2)$

Conditions de liaisons (holonomes ou non).

En dérivant (1) on a $\frac{d\beta_j}{dt} = \frac{\partial \beta_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \beta_j}{\partial t} = 0$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \dot{q}_i = \beta_j} \quad \text{pour } j=1 \text{ à } l+h \text{ et } i=1 \text{ à } n.$$

Exemple:



3 paramètres primitifs: x , y et θ .

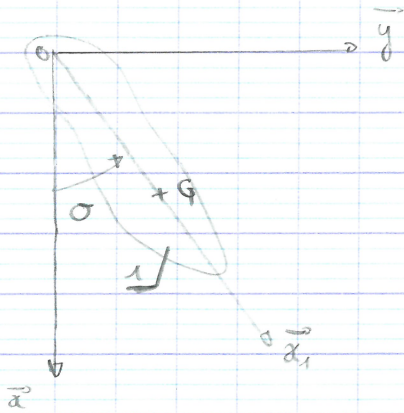
↳ contact entre S_1 et S_0 : $y(t) = R$.

↳ roulement sans glissement:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{R_0}(\vec{I} \in S_1) &= \vec{0} \\ \text{ou } \vec{V}_{R_0}(\vec{I} \in S_1) &= \vec{V}_{R_0}(\vec{I} \in S_0) = \vec{0} \\ \vec{V}_{R_0}(\vec{I} \in S_1) &= \vec{V}_{R_0}(O_1 \in S_1) + \vec{IO} \wedge \vec{\Omega}_{S_1/S_0} = \dot{x}\vec{x}_0 + R\dot{\theta}\vec{y}_0 + \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ &= (\dot{x} - R\dot{\theta})\vec{x}_0 = \vec{0} \end{aligned}$$

d'où $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$

$$\dot{x}(t) = R \dot{\theta}(t) \rightarrow \text{non holonome.}$$



PFD: code 1

▲ pivot

▲ pesanteur

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{\text{pivot} \rightarrow S} \\ \vec{J}_{\text{pivot} \rightarrow S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{\text{pes} \rightarrow S} \\ \vec{J}_{\text{pes} \rightarrow S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} P = m\vec{g} = mg \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{S \rightarrow S} \\ \vec{J}_{S \rightarrow S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} D_{1/0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0 + \left\{ \begin{array}{l} mg \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_R \\ \vec{D}_0(1/0) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} + mg \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0 + \left\{ \begin{array}{l} mg \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_R \\ \vec{D}_0(1/0) \end{array} \right\}$$

$$= -mga \sin \alpha \vec{z}$$

$$\forall X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} + mg \vec{x} = m \vec{V}_R(t)$$

$$-mga \sin \alpha \vec{z} = \vec{D}_0(1/0)$$

$$\text{avec } \vec{V}_R = \frac{dR}{dt} \vec{V}_R(t) =$$

$$\hookrightarrow \frac{dR}{dt} \vec{\alpha}_1 = \frac{dR}{dt} a \vec{x}_1 = a \frac{dR}{dt} \vec{x}_1$$

$$\vec{V}_R = \frac{dR}{dt} a \hat{e}(t) \vec{y}_1$$

$$\frac{dR}{dt} \vec{x}_1 + R \vec{\omega}_1 \vec{x}_1$$

$$\vec{V}_R = a (\ddot{\theta} \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{x}_1)$$

$$\vec{D}_0(1/0) = \frac{dR}{dt} \vec{D}_0(1/0) = \frac{dR}{dt} \vec{J}_0(1, \vec{x}_1/0) = \frac{dR}{dt} C \dot{\theta} \vec{z} = C \ddot{\theta} \vec{z}$$

$$\begin{pmatrix} A-F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} + mg \vec{x} = ma (\ddot{\theta} \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{x}_1) \\ -mga \sin \alpha \vec{z} = C \ddot{\theta} \vec{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{01} + mg = ma(-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ Y_{01} = ma(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ -mg a \sin \theta = C\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$X_{01} = -m[a(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + g]$$

5. Application des principes des puissances virtuelles - Equation de Lagrange.

Vitesse virtuelle.

$$\vec{V}^*(P) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \dot{q}_i^* + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

le temps est "figé"

$$\boxed{\vec{V}^*(P) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \dot{q}_i^*}$$

Choix du mouvement virtuel
 \Rightarrow champ des vitesses virtuelles.

1) Champ rigidifiant

$$\vec{V}^*(A) = \vec{V}^*(B) + \vec{AB} \wedge \vec{\omega}^*$$

$$\left\{ \vec{V}^*_{S_k/R_g} \right\} = \left\{ \vec{\omega}^*_{S_k/R_g} \wedge \vec{r}_{S_k/R_g} \right\}$$

2) Contribution du paramètre q_i dans le champ cinématique.

$$\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\vec{V}(P) + \vec{r}_{P/R} \wedge \vec{\omega} \right]$$

Recu. Energ.
17/02/09.

$$= \frac{\partial \vec{V}(r)}{\partial \dot{q}_i} + \cancel{\frac{\partial P\pi}{\partial \dot{q}_i}} \wedge \vec{r} + P\pi \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{V}(r)}{\partial \dot{q}_i} + P\pi \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_i}}$$

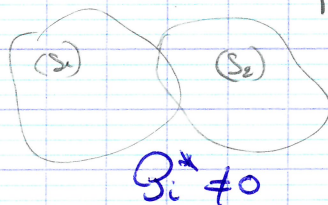
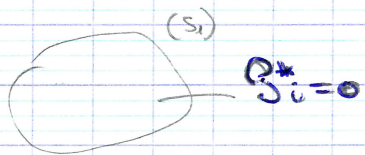
1^{ère} étape: mat virtuels

$$\left\{ v_{q_i}^* \right\} = \left\{ v_i^* \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_i} \\ \frac{\partial \vec{V}(r)}{\partial \dot{q}_i} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ v^* \right\} = \sum_{i=0}^p \dot{q}_i^* \left\{ v_i^* \right\}$$

2^{ème} étape: intereffort.

discuson non parfaite.



Pour nous, en général $B_i^* = 0$

3^{ème} étape:

$$B_e^* = B_a^*$$

Calcul de B_a^* :

$$B_a^* = \int_{S_k} \vec{r}_{Rg}(P) \cdot \vec{V}_{Rg}^*(P) \rho(P) dV(P) = \left\{ D_{S_k/Rg} \right\} \otimes \left\{ v^* \right\}$$

\downarrow $\frac{dP}{dq_i}$ \downarrow $\frac{dm}{dq_i} \dot{q}_i^*$

\downarrow comoment

$$\mathcal{P}_a^* = \dot{q}_i^* \int_{S_k} \vec{\delta}_{Rg}(P) \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} dm(P)$$

$$\vec{\delta}_{Rg}(P) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (\vec{V}_{Rg}(P)) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [\vec{V}_{Rg}(P) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}] = \frac{d}{dt} \vec{V}_{Rg}(P) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} + \vec{V}_{Rg}(P) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right)$$

$$\vec{\delta}_{Rg}(P) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} [\vec{V}_{Rg}(P) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}] - \vec{V}_{Rg}(P) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial \vec{V}_{Rg}(P)}{\partial \dot{q}_i^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^*} \left(\frac{V_{Rg}(P)^2}{2} \right)$$

$$\downarrow$$

conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d}{dt} \vec{OP} \right)$$

$$\vec{V}_{Rg}(P) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^*} \left(\frac{V_{Rg}(P)^2}{2} \right) \right] - \vec{V}_{Rg}(P) \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{V_{Rg}(P)^2}{2} \right)$$

$$\mathcal{P}_a^* = \dot{q}_i^* \int_{S_k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^*} \left(\frac{V_{Rg}(P)^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{V_{Rg}(P)^2}{2} \right) \right] dm(P)$$

$$= \dot{q}_i^* \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^*} \int_{S_k} \frac{V_{Rg}(P)^2}{2} dm(P) - \frac{\partial}{\partial q_i} \int_{S_k} \frac{V_{Rg}(P)^2}{2} dm(P) \right)$$

$T_{S_k/Rg}$
Energie cinétique.

$T_{S_k/Rg}$

$$= \dot{q}_i^* \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{S_k/Rg}}{\partial \dot{q}_i^*} - \frac{\partial}{\partial q_i} T_{S_k/Rg} \right\}$$

$$\mathcal{P}_e^* = \left\{ \sum_{S_k \rightarrow S_k} \mathcal{F}_{S_k}^* \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{S_k}^* \right\} \text{ avec } \left\{ \mathcal{V}_{S_k}^* \right\} = \sum_{i=0}^p \dot{q}_i^* \left\{ \mathcal{V}_i^* \right\}$$

$$\mathcal{P}_e^* = \sum_{i=0}^p \dot{q}_i^* \left\{ \mathcal{V}_i^* \right\} \otimes \left\{ \sum_{S_k \rightarrow S_k} \mathcal{F}_{S_k}^* \right\}$$

$Q_i(S_k \rightarrow S_k/Rg)$ coef. énergétique

Puissance = Force x vitesse.

$$\mathcal{B}_a^* = \mathcal{B}_e^*$$

$$\sum_{i=0}^p \dot{q}_i^* \left(\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{Sk/R_g}}{\partial \dot{q}_i^*}}_P - \frac{\partial T_{Sk/R_g}}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=0}^p \dot{q}_i^* Q_i(\vec{s}_k \rightarrow \vec{s}_k/R_g)$$

$$\sum_{i=0}^p \dot{q}_i^* (P_i - Q_i) = 0 \Rightarrow \vec{\dot{q}}^* \cdot \vec{PQ} = 0$$

On doit vérifier que $\vec{\dot{q}}^* \perp \vec{PQ} \forall \dot{q}_i^*$
 $\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{0}$ si les \dot{q}_i^* sont indépendants.

$$Y_{q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{Sk/R_g}}{\partial \dot{q}_i^*} - \frac{\partial T_{Sk/R_g}}{\partial q_i} = Q_i(\vec{s}_k \rightarrow \vec{s}_k/R_g)$$

Exemple du cylindre roulant sur une pente.

$$q_i = \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} \quad T = \frac{1}{2} m \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$(M = -mg \sin \alpha)$$

$$\alpha = \theta R \Rightarrow \dot{\alpha} = \dot{\theta} R$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -R^1 \end{pmatrix} \begin{matrix} T \\ N \end{matrix}$$

$$d'où T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

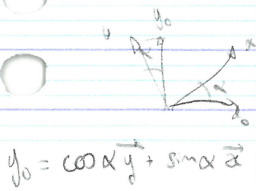
$$Q_{\alpha} = \left\langle \vec{v}^* \right\rangle \otimes \left\langle \vec{F}_{ext \rightarrow S} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} \right\rangle \otimes \left\langle \begin{matrix} -P\vec{y}_0 + T\vec{x} + N\vec{y} \\ (+RT - \Gamma)\vec{z} \end{matrix} \right\rangle_G$$

$$\left\langle \vec{F}_{ext \rightarrow S} \right\rangle = \begin{pmatrix} -P\vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_G + \begin{pmatrix} T\vec{x} + N\vec{y} \\ 0 \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} 0 \\ -\Gamma\vec{z} \end{pmatrix}_G = \begin{pmatrix} -P\vec{y}_0 + T\vec{x} + N\vec{y} \\ (+RT - \Gamma)\vec{z} \end{pmatrix}_G$$

$$Q_{\theta} = \left\langle \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} \right\rangle \otimes \left\langle \begin{matrix} -P\vec{y}_0 + T\vec{x} + N\vec{y} \\ (RT + \Gamma)\vec{z} \end{matrix} \right\rangle_G = \frac{RT - \Gamma - RP(\cos \alpha \vec{y} + \sin \alpha \vec{x})}{RT + \Gamma - RP \sin \alpha + RT} \vec{z} + RT \vec{z}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (mR^2 \dot{\theta} + I \dot{\theta}) = \ddot{\theta} (mR + I)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \ddot{\theta} (mR + I) + Rmg \sin \alpha$$

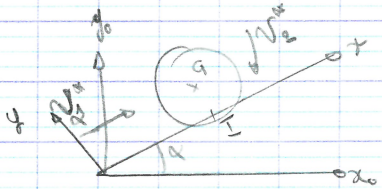


$$\begin{aligned} 2T_{S/R} &= \left\{ C_{S/R} \right\} \left\{ V_{S/R} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \vec{V}_G(G) \\ \vec{\Omega}_G(S/R) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_R(G) \end{matrix} \right\} \\ &= m \vec{V}_{RG}(G) \cdot \vec{V}_{RG}(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\Omega}_G(S/R) \end{aligned}$$

$$2T_{S/R} = m \vec{V}_{RG}^2(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\Omega}_G(S/R) = m \dot{x}^2 + (-\dot{\theta} \vec{e}_3) \cdot (-C\dot{\theta} \vec{e}_3) = m \dot{x}^2 + C\dot{\theta}^2$$

$$\text{d'où } T_{S/R} = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 + C \dot{\theta}^2)$$

Solution 1: On ne voit pas que θ et x sont dépendant.
 $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$.



$$\left\{ V^* \right\} = \left\{ V_1^* \right\} \dot{q}_1^* + \left\{ V_2^* \right\} \dot{q}_2^*$$

$$\left\{ V_1^* \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \vec{0}}{\partial \dot{x}^*} \\ \frac{\partial \vec{0}}{\partial \dot{x}^*} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{e}_1 \end{matrix} \right\}_G$$

$$\left\{ V_2^* \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \vec{0}}{\partial \dot{\theta}^*} \\ \frac{\partial \vec{0}}{\partial \dot{\theta}^*} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -\vec{e}_3 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$$

$$\mathcal{L}_x : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{S/R}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T_{S/R}}{\partial x} = Q_x(\vec{s} \rightarrow S/R)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } Q_x(\vec{s} \rightarrow S/R) &= Q_x(p_0 \rightarrow S/R) + Q_x(sd \rightarrow S/R) + Q_x(mcd \rightarrow S/R) \\ &= \left\{ \mathcal{N}_{\vec{s} \rightarrow s} \right\} \cdot \left\{ V_1^* \right\} = \left\{ \begin{matrix} -mgy_0 + N\vec{y} + T\vec{x} \\ RT\vec{e}_3 - P\vec{e}_3 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{e}_1 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$$= -mgy_0 \cdot \vec{x} + T = -mgy \sin \alpha + T$$

(Coord $\vec{y} = \sin \alpha \vec{x}$)

$$\mathcal{L}_x \Rightarrow m\ddot{x} = -mgy \sin \alpha + T$$

$$Q_\theta(\vec{s} \rightarrow S/R) = \left\{ \mathcal{N}_{\vec{s} \rightarrow s} \right\} \cdot \left\{ V_2^* \right\} = \left\{ \begin{matrix} -mgy_0 + N\vec{y} + T\vec{x} \\ RT\vec{e}_3 - P\vec{e}_3 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} -\vec{e}_3 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = RT - P$$

$$\mathcal{L}_\theta : C\ddot{\theta} = RT - P$$

Solution 2: On voit que θ et α sont dépendant.

$$\dot{\alpha} - R\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \alpha - R\theta = 0.$$

(relation pseudo-holonomie).

1 paramètre. $\theta = q_1$

$$T_{S/R} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} (mR^2 + C)$$

$$\left\{ V^* \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} + (-\dot{\theta}^k \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^k}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (R\dot{\theta}^k \vec{x}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\vec{3} \\ R\vec{x} \end{array} \right\}_G$$

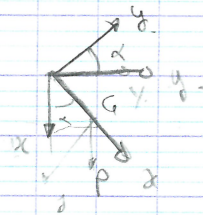
$$Q_i(\vec{s} \rightarrow s) = \left\{ \vec{F}_{\vec{s} \rightarrow s} \right\} \cdot \left\{ V_i^* \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -mg\vec{y}_0 + N\vec{y} + T\vec{x} \\ RT\vec{3} - P\vec{3} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} -\vec{3} \\ R\vec{x} \end{array} \right\}$$

$$= -mgR\sin\alpha + RT - RT + P = P - mgR\sin\alpha.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{S/R}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \ddot{\theta} (mR^2 + C)$$

$$\text{d'où } P - mgR\sin\alpha = \ddot{\theta} (mR^2 + C)$$

Cas du pendule simple.



$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$\text{avec } q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = I\ddot{\theta}$$

$$Q_i(\vec{s} \rightarrow s) = \left\{ \vec{F}_{\vec{s} \rightarrow s}^* \right\} \cdot \left\{ V_i^* \right\}$$

$$\Sigma F_{\text{ext}} = \left\{ \begin{array}{l} X_0\vec{x} + Y_0\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{l} -P\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} X_0\vec{x} + Y_0\vec{y} - P\vec{x} \\ L\cos\theta \\ L\sin\theta \end{array} \right\}_O$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} X_0\vec{x} + Y_0\vec{y} - P\vec{x} \\ LP\sin\theta \vec{3}^0 \end{array} \right\}_O$$

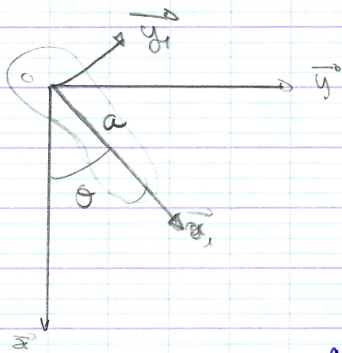
$$\{V^*\} = \{V_1^*\} + \{V_2^*\} + \{V_3^*\} = \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} + \dot{y} \end{Bmatrix}$$

$$Q = \begin{Bmatrix} (X_0 - P)\dot{x} + Y_0\dot{y} \\ -LP \sin \theta \dot{\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} + \dot{y} \end{Bmatrix} = (X_0 - P)\dot{x}(\dot{x} + \dot{y}) + Y_0\dot{y}(\dot{x} + \dot{y}) - LP \sin \theta \dot{\theta}$$

$$Q_x^p: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{S/R}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T_{S/R}}{\partial x} = Q_x(\vec{s} \rightarrow S) \quad \text{avec } \{V_x^*\} = \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = X_0 - P \\ m\ddot{y} = Y_0 \\ I\ddot{\theta} = -LP \sin \theta \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{T_{S/R}} = \{0\} \{V\}_G = \begin{Bmatrix} m\dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_2} \end{Bmatrix}_G$$



1^{er} paramètre - $\theta(t)$

$$Q_\theta: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{S/R}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T_{S/R}}{\partial \theta} = Q_\theta(\vec{s} \rightarrow S/R)$$

$$\mathcal{L}_{T_{S/R}} = \{C_{S/R}\} \{V_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} m\vec{V}_R(G) \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{s}_{S/R} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}_R(G) = \vec{V}_R(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OS}_{S/R} = -a\dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\theta}\vec{z} = +a\dot{\theta}\vec{y}$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = \vec{\sigma}_G(S) \cdot \vec{s}_{S/R} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = C\dot{\theta}\vec{z} = (C - ma^2)\dot{\theta}\vec{z}$$

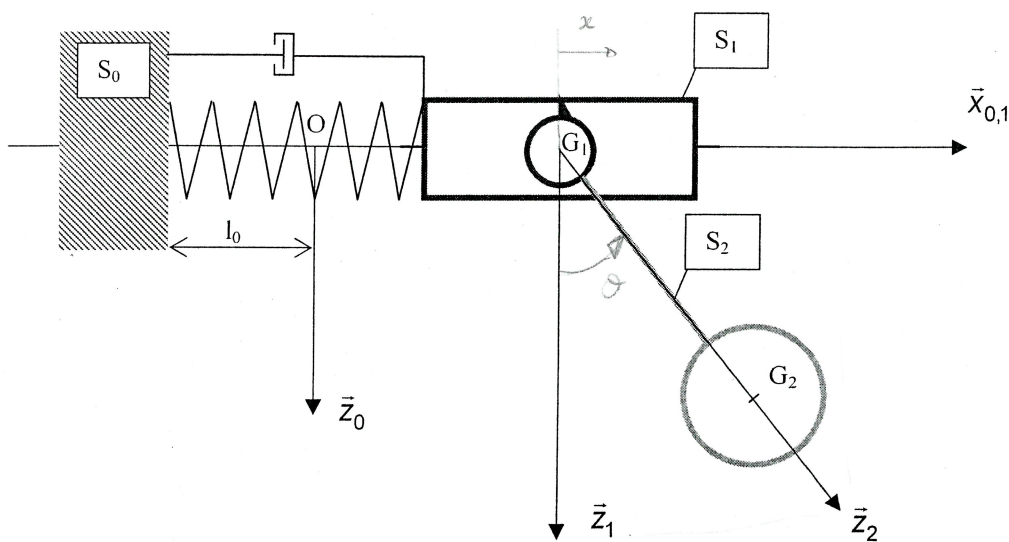
$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_G(S/R) &= \vec{\sigma}_O(S/R) + \vec{\omega} \wedge m\vec{V}_R(G) \\ &= \dot{\theta} (C - ma^2)\vec{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{T_{S/R}} &= ma^2\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\vec{z} (C - ma^2)\dot{\theta}\vec{z} = \dot{\theta}^2 (C - ma^2 + ma^2) \\ &= \dot{\theta}^2 C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\theta(\vec{s} \rightarrow S/R) &= \left\{ \vec{F}_{\vec{s} \rightarrow S} \right\} \{V_x^*\}_G = \begin{Bmatrix} X_{a1}\dot{x} + Y_{a1}\dot{y} + mg\dot{x} \\ -mg a \sin \theta \dot{\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\ &= -mg a \sin \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

TD n°4 : Système pendulaire

Considérons deux solides S_1 et S_2 (pendule) formant un système pendulaire. Le solide S_1 de masse M , de centre de gravité G_1 est lié au bâti S_0 par une liaison glissière d'axe (O, \vec{x}_0) . Le solide S_2 , de masse m (concentrée en G_2) est lié à S_1 par une liaison pivot (G_1, \vec{y}_0) . Le solide S_1 est lié au bâti S_0 par un ressort de raideur k , de longueur libre l_0 et par un amortisseur linéaire de translation de coefficient b . Le schéma cinématique du système est décrit ci-après :



$$\overline{G_1 G_2} = l_2 \vec{z}_2$$

*

- 1) Effectuer le paramétrage du mécanisme et déterminer le nombre de degrés de liberté indépendants (paramètres)
- 2) Déterminer les équations de mouvement du mécanisme dans le référentiel R_0

TD n°4 : système pendulaire.

$$\begin{array}{c|c} A & 0-E \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline -E & 0 & C \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

FAUX.

$$\vec{T}_{S/R} = \frac{1}{l} \left\{ G_{S/R} \right\} \otimes \left\{ V_{S/R} \right\} = \frac{1}{l} \left\{ m_1 \vec{V}_{G_1} \right\} \otimes \left\{ \vec{\Omega}_{S/R_1} \right\}$$

$$2 \vec{T}_{S/R_1} = m_1 \vec{V}_{G_1}^2 + I_{G_2} \vec{\Omega}_{S_2/R_1}^2 = m_1 \dot{\alpha}^2 + m_2 \dot{\alpha}^2 + B \dot{\theta}^2$$

$$\begin{array}{l} \bullet \sum F_{ext} = \vec{F}_R + \vec{F}_g + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \begin{array}{c} -kx \\ 0 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} T \\ 0 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{array} + \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{array} \\ \bullet \sum m \vec{G}_i = \vec{G}_1 \wedge \vec{G}_2 \wedge \vec{P}_2 = \begin{array}{c} l \sin \theta \\ 0 \\ l \cos \theta \end{array} \wedge \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ m_2 g l \sin \theta \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$\left\{ V_1^* \right\} = \left\{ \frac{\partial \vec{0}}{\partial \dot{\alpha}^k} \right\} \dot{\alpha}^k \vec{\alpha} = \left\{ \vec{0} \right\}_{G_1}; \quad \left\{ V_2^* \right\} = \left\{ \frac{\partial \vec{0}}{\partial \dot{\theta}^k} \right\} \dot{\theta}^k \vec{y} = \left\{ \vec{y} \right\}_{G_2}$$

$$* \mathcal{L}_\alpha: \frac{d r_{00}}{dt} \left(\frac{\partial T_{S/R_0}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T_{S/R_0}}{\partial \alpha} = Q_\alpha (\vec{s} \rightarrow S/R_1)$$

$$\rightarrow Q_\alpha (\vec{s} \rightarrow S/R_1) = \left\{ \vec{F}_{\vec{s} \rightarrow S}^* \right\} \cdot \left\{ V_1^* \right\} = \begin{bmatrix} -kx - T \\ 0 \\ (m_2 g l \sin \theta) \vec{z}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$$

$$* \begin{array}{l} Q_\alpha (\vec{s} \rightarrow S/R_1) = -kx - T = -kx - m \dot{\alpha} \quad \vec{T} = m v \vec{\alpha} = m \dot{\alpha} \vec{x}' \\ \text{d'où } (m_1 + m_2) \ddot{\alpha} = -kx - T = -kx - m \dot{\alpha} \end{array}$$

$$* \mathcal{L}_\theta: \frac{d r_{00}}{dt} \left(\frac{\partial T_{S/R_0}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T_{S/R_0}}{\partial \theta} = Q_\theta (\vec{s} \rightarrow S/R_0)$$

$$\rightarrow Q_\theta (\vec{s} \rightarrow S/R_0) = \left\{ \vec{F}_{\vec{s} \rightarrow S}^* \right\} \cdot \left\{ V_2^* \right\} = \begin{bmatrix} (-kx - T) \vec{x}' - g(m_1 + m_2) \vec{z}' \\ (m_2 g l \sin \theta) \vec{y}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{y}' \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où $B \ddot{\theta} = -m_2 g l \sin \theta$.

$$2 T_{E/R_0} = 2(T_{S_1/R_0}) + 2(T_{S_2/R_0}) = 2 \left[\left\{ \frac{m_1 \vec{V}_{G_1}}{G_{G_1}} \right\} \otimes \left\{ \frac{\vec{0}}{V_{G_1}} \right\} + \left\{ \frac{m_2 \vec{V}_{G_2}}{G_{G_2}} \right\} \otimes \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{S_2/R_0}}{V_{G_2}} \right\} \right]$$

$$\vec{V}_{G_1} = \dot{\alpha} \vec{x}$$

$$\vec{V}_{G_2} = \vec{V}_{G_1} + \vec{\Omega}_{S_2/R_0} \wedge \vec{G}_1 \wedge \vec{G}_2 = \dot{\alpha} \vec{x} + \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \wedge \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ l \cos \theta \end{array} = \begin{array}{c} \dot{\alpha} + \dot{\theta} l \cos \theta \\ 0 \\ \dot{\theta} l \sin \theta \end{array}$$

$$\vec{G}_2 (S_2/R_0) = \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \\ \hline 0 & 0 & A \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ A \dot{\theta} \\ 0 \end{array} = A \dot{\theta} \vec{y}$$

$$\vec{\Omega}_{S_2/R_0} = \vec{\Omega}_{S_1/R_0} + \vec{\Omega}_{S_2/R_1}$$

$$L_{T_{s_1/R_0}} = m_1 \dot{x}^2$$

$$L_{T_{s_2/R_0}} = m_2 \left((\dot{x} + \dot{\theta} l \cos \theta)^2 + \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2 \theta \right) + A \dot{\theta}^2$$

$$= m_2 \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l \cos \theta + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2 \theta \right) + A \dot{\theta}^2$$

$$= m_2 \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l \cos \theta + \dot{\theta}^2 l^2 \right) + A \dot{\theta}^2$$

$$\dot{x} + \dot{\theta} l \cos \theta$$

$$\ddot{x} + \ddot{\theta} l \cos \theta - \dot{\theta}^2 l \sin \theta$$

$$Q_x: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{s/R_0}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T_{s/R_0}}{\partial x} = Q_x(\bar{s} \rightarrow s/R_0) + \underbrace{Q_x(\underline{L} \rightarrow \underline{s})}_{=0}$$

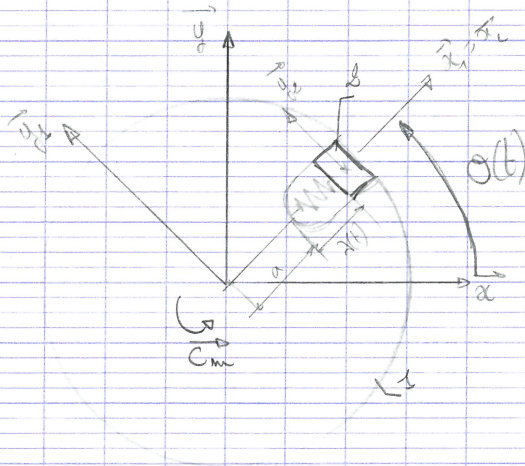
$$\Rightarrow m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} + \ddot{\theta} l \cos \theta - \dot{\theta}^2 l \sin \theta) = -kx - m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} l \cos \theta + \dot{\theta} l^2 + A \ddot{\theta} \quad Q_\theta: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{s/R_0}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T_{s/R_0}}{\partial \theta} = Q_\theta(\bar{s} \rightarrow s/R_0) + \underbrace{Q_\theta(\underline{L} \rightarrow \underline{s})}_{=0}$$

$$m_2 (\ddot{x} l \cos \theta - \dot{\theta} l \sin \theta + \ddot{\theta} l^2) + A \ddot{\theta} + m_2 \dot{x} \dot{\theta} l \sin \theta = -m_2 g l \sin \theta$$

$$\Rightarrow m_2 (\ddot{x} l \cos \theta + \ddot{\theta} l^2) + A \ddot{\theta} = -m_2 g l \sin \theta$$

Correction exam du 2/04/2009.

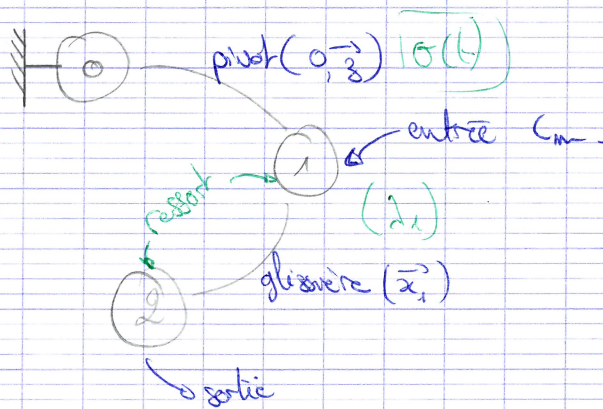


$$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

$$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

$$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

- Graphe des liaisons.



2 paramètres indépendants: $\theta(t)$ peut varier avec $\lambda(t)$ fixe et vice versa.

$$\vec{V}_R(AE2) = \frac{dR}{dt} \vec{OA} = \frac{dR}{dt} (a+d) \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \frac{dR}{dt} (a+d) + (a+d) \frac{dR}{dt} \vec{x}_1$$

$$= \dot{\lambda} \vec{x}_1 + (a+d) \dot{\theta} \vec{y}_1$$

$\hookrightarrow \frac{dR}{dt} \vec{x}_1 + \vec{x}_1 \frac{dR}{dt}$

$$\vec{V}_R(AE2) = \frac{dR}{dt} \vec{V}_R(AE2) = \ddot{\lambda} \vec{x}_1 + \dot{\lambda} \frac{dR}{dt} \vec{x}_1 + (a+d) \frac{dR}{dt} \dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\theta} \vec{y}_1 \frac{dR}{dt} (a+d)$$

$$= \ddot{\lambda} \vec{x}_1 + \dot{\lambda} \dot{\theta} \vec{y}_1 + (a+d) (-\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + \ddot{\theta} \vec{y}_1) + \dot{\theta} \dot{\lambda} \vec{y}_1$$

$$= (\ddot{\lambda} - \dot{\theta}^2 (a+d)) \vec{x}_1 + (\dot{\lambda} \dot{\theta} + \ddot{\theta} (a+d)) \vec{y}_1$$

$\dot{\theta} \frac{dR}{dt} \vec{y}_1 + \vec{y}_1 \frac{dR}{dt} = \dot{\theta} \vec{x}_1$

$$\rightarrow \left\{ \mathcal{V}_0^* \right\} = \left\{ \frac{\vec{r}_{1/0}^x}{V_R(A)^x} \right\}_A = \left\{ \dot{\vec{r}}_1^* + (a+d)\dot{\theta}^* \vec{y}_1 \right\}_A$$

$$q_1 = \theta \quad \left\{ \mathcal{V}_0^* \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^*} (\dot{\theta}^* \vec{z}) = \vec{z} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^*} (\dot{\theta}^* \vec{r}_1^x + (a+d)\dot{\theta}^* \vec{y}_1) = (a+d)\vec{y}_1 \right\}_A$$

$$q_2 = \lambda \quad \left\{ \mathcal{V}_0^* \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}^*} (\dot{\lambda}^* \vec{z}) = \vec{z} \right. \\ \left. \vec{x}_1 \right\}_A$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_0 \frac{dR}{dt} \left(\frac{\partial T_{E/R}}{\partial \dot{\sigma}} \right) - \frac{\partial T_{E/R}}{\partial \sigma} = Q_0 (\vec{\Sigma} - E/R) + Q_0 (1 \rightarrow L)$$

$$\rightarrow T_{E/R} = T_{1/R} + T_{2/R}$$

$$\mathcal{L} T_{1/R} = \left\{ \mathcal{V}_{1/R} \right\} \left\{ C_{1/R} \right\} = \left\{ \frac{\vec{r}_{1/R} = \dot{\theta}^* \vec{z}}{V_R(0)} \right\} \cdot \left\{ \frac{m V_R(0)}{V_0(1/R) = -E \dot{\theta}^* \vec{x}_1 + C \dot{\theta}^* \vec{z}} \right\}$$

$$= \dot{\theta}^* \vec{z} \cdot (-E \dot{\theta}^* \vec{x}_1 + C \dot{\theta}^* \vec{z}) = C \dot{\theta}^2 \vec{z}$$

$$\left\{ T_{1/R} = \frac{C \dot{\theta}^2}{2} \right\}$$

$$\vec{\Sigma}_0(1, R_{1/R}) = \begin{vmatrix} A_0 - E & 0 \\ 0 & B_0 \\ -E & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta}^* \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{L} T_{2/R} = \left\{ \mathcal{V}_{2/R} \right\} \left\{ C_{2/R} \right\} = \left\{ \frac{\vec{r}_{2/R} = \dot{\theta}^* \vec{z}}{V_R(A)} \right\} \left\{ \frac{m V_R(A)}{V_A(2/R) = B_2 \dot{\theta}^* \vec{z}} \right\}$$

$$\text{avec } \vec{\Sigma}_A(2/R) = \vec{\Sigma}_A(2, R_{2/R}) = \begin{vmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta}^* \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{L} T_{2/R} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} B_2 + m \frac{V_R(A)^2}{2} = \frac{B_2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{\lambda}^2 + (a+d)^2 \dot{\theta}^2)$$

$$\rightarrow \left\{ T_{2/R} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} (B_2 + m(a+d)^2) + \frac{m}{2} \dot{\lambda}^2 \right\}$$

$$\vec{\Sigma} \rightarrow \vec{\Sigma} \quad \Delta C_m$$

$$\Delta \text{pivot } 0 \rightarrow 1. \quad Q_0(\vec{\Sigma} \rightarrow E/R) = \left\{ \vec{\Sigma}_{\vec{E} \rightarrow E/R} \right\} \left\{ \mathcal{V}_0^* \right\}$$

$$Q_0(\vec{\Sigma} \rightarrow E/R)$$

$$\rightarrow Q_0(0 \rightarrow 1) + Q_0(\text{pivot}) = \left\{ \vec{\Sigma}_{(0 \rightarrow 1)} \right\} \left\{ \mathcal{V}_0^* \right\} = \left\{ \vec{\Sigma}_{C_m \vec{z}} \right\} \left\{ \frac{\vec{z}}{V_R(0)^x} \right\} = C_m$$

$$Q_0(1 \rightarrow 2) = \left\{ \vec{\Sigma}_{\text{pivot} \rightarrow 2} \right\} \left\{ \mathcal{V}_0^* \right\} = \left\{ -h(b-a)\vec{x}_1 \right\} \left\{ \frac{\vec{z}}{(a+d)\vec{y}_1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow Q_0 = C_m + 0$$

Reca -
Energ.
8/04/03.
sub.

$$Q_2 (1 \rightarrow 2) = \left\{ \vec{F}_{\text{resort} \rightarrow 2} \right\} \left\{ \vec{V}_A^* \right\} = \begin{pmatrix} -k(l_0 - \lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = -k(l_0 - \lambda)$$

$$Q_2 (\vec{E} \rightarrow \vec{E}/k) = \left\{ \vec{0} \right\} \left\{ \vec{x}_1 \right\} = 0.$$

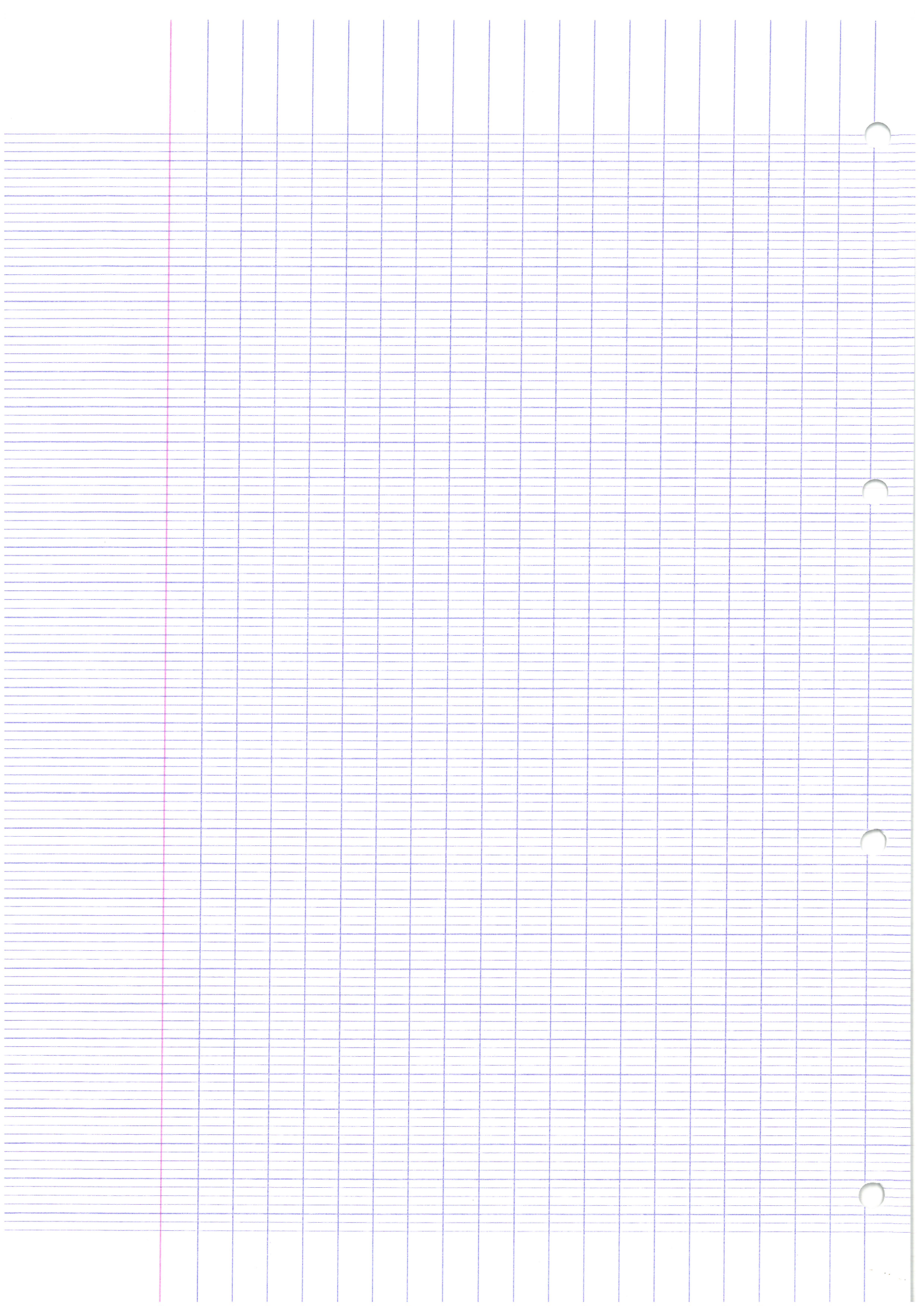
$$Q_2 = -k(l_0 - \lambda).$$

?

$$\mathcal{L}_2 = \left(\frac{1}{2} + C_2 \right) \ddot{\theta} + m(a + d) \dot{\lambda} = C_m.$$

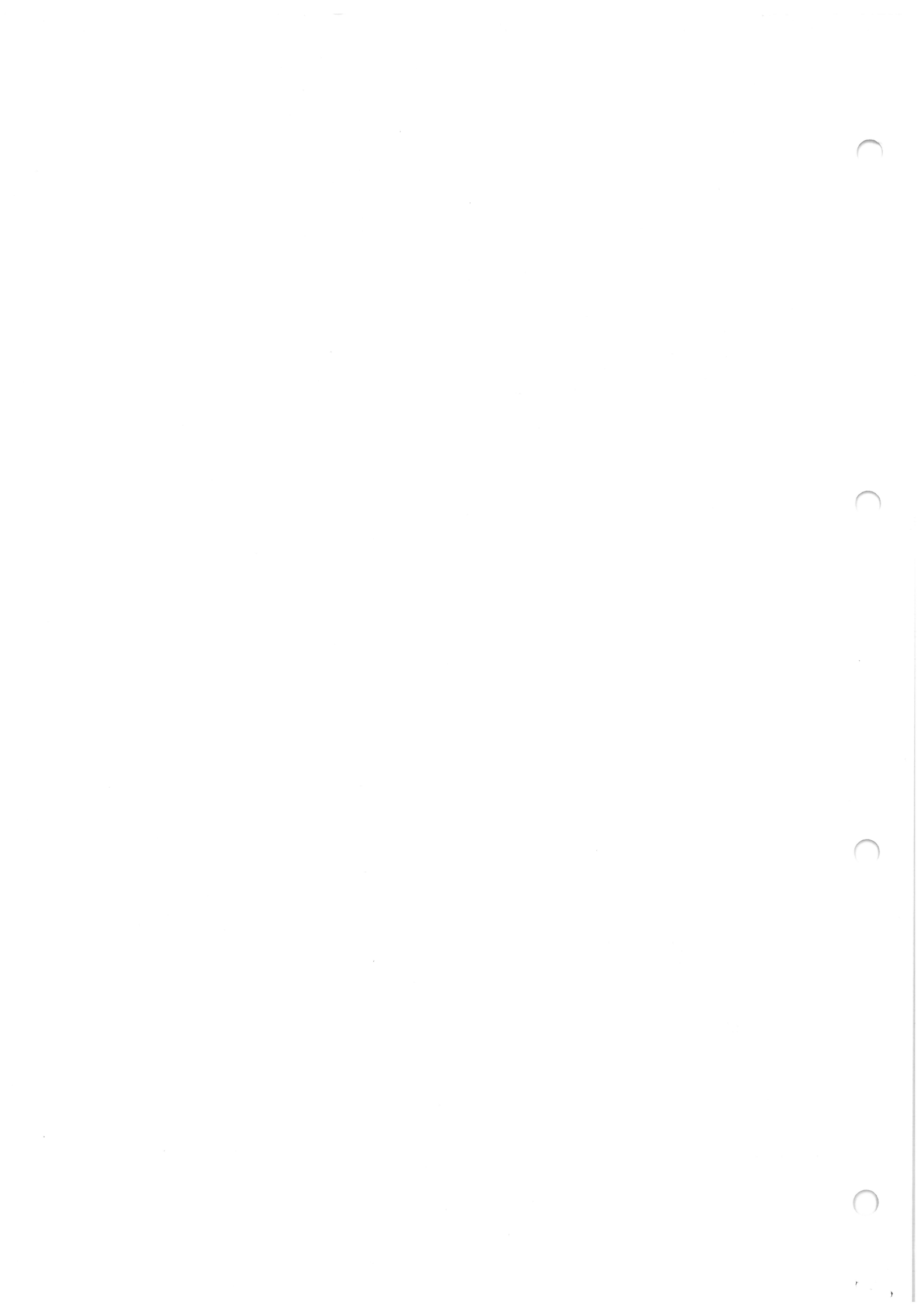
$$\mathcal{L}_2: \frac{dR}{dt} (m \dot{\lambda}) - \frac{\partial T_{E/R}}{\partial \dot{\lambda}} = -k(l_0 - \lambda)$$

$$m \ddot{\lambda} - m \dot{\theta}^2 (a + d) + k(l_0 - \lambda) = 0$$



| | |
|--|---|
| <p>Paramétrage de S/S₁</p> <ul style="list-style-type: none"> - vecteur position $\overline{O_1O}$ - orientation de la base $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ avec les angles d'Euler <p>$\psi = (\vec{x}_1, \vec{u})$ selon \vec{z}_1, $\theta = (\vec{z}_1, \vec{z})$ selon \vec{u} et $\varphi = (\vec{u}, \vec{x})$ selon \vec{z}.</p> <p>bases intermédiaires</p> <p>$\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \mapsto \text{rot}(\psi, \vec{z}_1) \mapsto \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1 \mapsto \text{rot}(\theta, \vec{u}) \mapsto \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$</p> <p>$\mapsto \text{rot}(\varphi, \vec{z}) \mapsto \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$</p> <p>Expression du vecteur rotation</p> <p>$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}$</p> | <p>Paramétrage de S/S₁</p> <p>$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à S ; $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ associé à S₁</p> |
| <p>Vitesse et accélération</p> <p>Si A et B sont deux points matériels distincts d'un même solide S supposé indéformable</p> <p>$\vec{V}_R(B) = \vec{V}_R(A) + \overline{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$</p> <p>$\vec{\gamma}_R(B) = \vec{\gamma}_R(A) + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{S/R}) \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AB})$</p> <p>formule de dérivation dans une base mobile (formule de BOUR)</p> <p>$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) + \vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \vec{u}(t)$</p> | <p>Torseur cinématique</p> <p>$\{V_{S/R}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_R(A \in S) \end{array} \right\}$</p> |

| | |
|--|---|
| <p>Torseur cinétique</p> <p>$\{C_{S/R}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_R(G) \\ \vec{\sigma}_A(S/R) \end{array} \right\}$</p> <p>moment cinétique d'un solide</p> <p>$(\vec{\sigma}_A(S/R) = m \overline{AG} \wedge \vec{V}_R(A \in S) + \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R}))$</p> <p>Torseur dynamique</p> <p>$\{D_{S/R}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\gamma}_R(G) \\ \vec{\delta}_A(S/R) \end{array} \right\}$</p> <p>relation entre moment dynamique et cinétique</p> <p>$\vec{\delta}_A(S/R) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) + m \vec{V}_R(A) \wedge \vec{V}_R(G)$</p> <p>Matrice d'inertie et transport</p> <p>$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$</p> <p>$A = \int_{p \in S} (y^2 + z^2) dm$; $B = \int_{p \in S} (x^2 + z^2) dm$;</p> <p>$C = \int_{p \in S} (x^2 + y^2) dm$; $D = \int_{p \in S} (yz) dm$; $E = \int_{p \in S} (xz) dm$;</p> <p>$F = \int_{p \in S} (yx) dm$</p> <p>moment d'inertie par rapport à l'axe Δ passant par O (direction \vec{i})</p> <p>$I(S/\Delta) = \vec{i} \cdot \vec{J}_O(S, \vec{i})$</p> <p>transport en O des moments et produits d'inertie (Huygens)</p> | <p>Formule de dérivation dans une base mobile (formule de BOUR)</p> <p>$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) + \vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \vec{u}(t)$</p> |
|--|---|



Formulaire mécanique énergétique du solide indéformable

$$\vec{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

$$A_0 = A_G + m(b^2 + c^2); B_0 = B_G + m(a^2 + c^2);$$

$$C_0 = C_G + m(b^2 + a^2); D_0 = D_G + mbc; E_0 = E_G + mac;$$

$$F_0 = F_G + mba$$

Energie cinétique d'un solide

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \{ C_{S/R} \} \{ V_{S/R} \}$$

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

$$\{ D_{S/R} \} = \{ F_{\vec{s} \rightarrow S} \}$$

Expression de la Puissance

$$P_R = \int_V \vec{F}_v \cdot \vec{V}_R(M) dv(M) + \int_S \vec{F}_s \cdot \vec{V}_R(M) d\sigma(M)$$

pour un solide indéformable

$$P_R = \{ V_{S/R} \} \cdot \{ F_{\vec{s} \rightarrow S} \}$$

cas où l'effort dérive d'une fonction de forces U

$$P_R = \frac{d_R U}{dt}$$

Théorème de l'énergie-puissance

$$\frac{d_R}{dt} T_{S/R} = P_R = P_R(\vec{S} \rightarrow S) + P_R \text{ int}$$

$$\sigma(a+\lambda(t)/e)$$

$$\sigma(\lambda(t)/e)$$

$$N_M(\lambda + \sigma^c(a+\lambda))$$

Equations de Lagrange

Soit un système matériel $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, les équations de Lagrange s'écrivent dans le cas général

$$\frac{d_R}{dt} \left(\frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial q_i} = Q_{q_i}(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R) + Q_{q_i}(S_j \leftrightarrow S_k) + \lambda a_i$$

avec q_i les paramètres (coordonnées généralisées)

$T_{\Sigma/R}$ l'énergie cinétique du système

$Q_{q_i}(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R)$ les coefficients énergétiques des efforts

extérieurs à Σ dans son mouvement par rapport à R

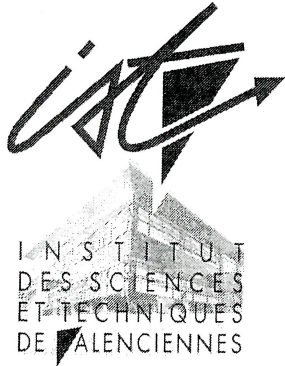
$Q_{q_i}(S_j \leftrightarrow S_k)$ les coefficients énergétiques des inter-efforts (forces généralisées) entre les solides S composant le système Σ dans son mouvement par rapport à R

λ multiplicateur de Lagrange

Coefficients énergétiques et mouvement virtuel

$$Q_{q_i} = \{ F_{\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma} \}_M \cdot \{ V_{q_i}^* \}_M$$

$$\text{avec } \{ V_{q_i}^* \}_M = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{\Omega}_{\Sigma/R}^*}{\partial \dot{q}_i} \\ \frac{\partial \vec{V}_R(M)^*}{\partial \dot{q}_i} \end{array} \right\}_M$$

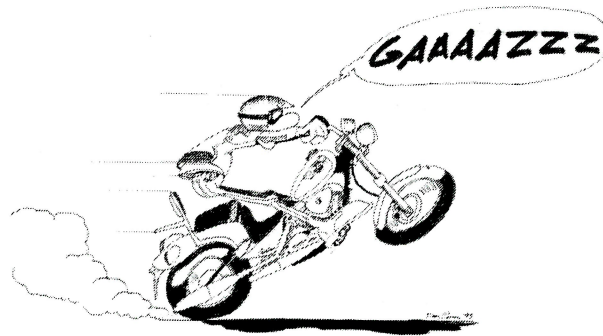


Examen de Mécanique énergétique

J.D. Guérin

Licence 3
Ingénierie Mécanique
Année Universitaire 2008-09

Première Session
Durée 2 heures
Documents non autorisés
-Formulaire joint-
Calculatrices autorisées
-Barème donné à titre indicatif-



Problème I (10 points)

On s'intéresse ici aux conditions nécessaires pour faire rouler une motocyclette uniquement sur la roue arrière « Wheeling » (non autorisé sur la voie publique). Le mécanisme étudié Σ est donc composé

- d'un solide S_1 de centre de gravité G_1 , de masse M , modélisant le cadre, le moteur et le pilote dont le mouvement est défini par :
 - o la position de A , $\vec{OA} = X\vec{x} + Y\vec{y}$
 - o son orientation par $\psi = (\vec{x}, \vec{x}_1)$
- de la roue arrière S_2 , de centre de gravité A , de rayon R et de masse m_2 , dont le mouvement est défini par :
 - o $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\Phi}_2 \vec{z}$
- de la roue avant S_3 , de centre de gravité B , de rayon R et de masse m_3 , dont le mouvement est défini par :
 - o $\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\Phi}_3 \vec{z}$

Les roues S_2 et S_3 sont en liaison pivot parfaite avec le cadre S_1 . La roue S_2 est en liaison ponctuelle sans glissement en I avec la route S_0 .

Tous les solides composant le mécanisme Σ sont pesants.

Le torseur des efforts de la route S_0 sur la roue arrière S_2 est donné par :

$$\left\{ F_{S_0 \rightarrow S_2} \right\} = \begin{Bmatrix} T & - \\ N & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_R \quad \text{avec } T < Nf \quad (\text{coefficient de frottement})$$

Le torseur des efforts de la chaîne sur la roue arrière S_2 est donné par :

$$\left\{ F_{ch \rightarrow S_2} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & C_m \end{Bmatrix}_R$$



Le modèle retenu est plan et le repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ lié à la route S_0 est galiléen.

Les matrices d'inertie des solides s'expriment sous la forme générale

$$I_{G_1}(S_1) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_R ; I_A(S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_R ; I_B(S_3) = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_R$$

I.1 Simplifier les termes des matrices d'inertie $I_{G_1}(S_1)$, $I_A(S_2)$ et $I_B(S_3)$ (sans les calculer)

I.2 Faire le bilan des efforts appliqués sur chaque solide et déterminer le torseur des efforts extérieurs appliqués ou transmis au mécanisme au point A dans le repère R

$$\{F_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \begin{Bmatrix} \overline{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \\ \overline{M_{A \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \end{Bmatrix}_R$$

I.3 Traduire les conditions de contact et de non-glissement en I .

En déduire le nombre de paramètres indépendants du mécanisme.

I.4 Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la roue S_3 . Montrer que $\dot{\Phi}_3$ est constant et trouver les expressions de $X_{13} = f(\ddot{X}, \ddot{\psi}, \dot{\psi}, \psi)$ et $Y_{13} = g(\ddot{\psi}, \dot{\psi}, \psi)$

I.5 Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la roue S_2 . Trouver l'expression T/N .

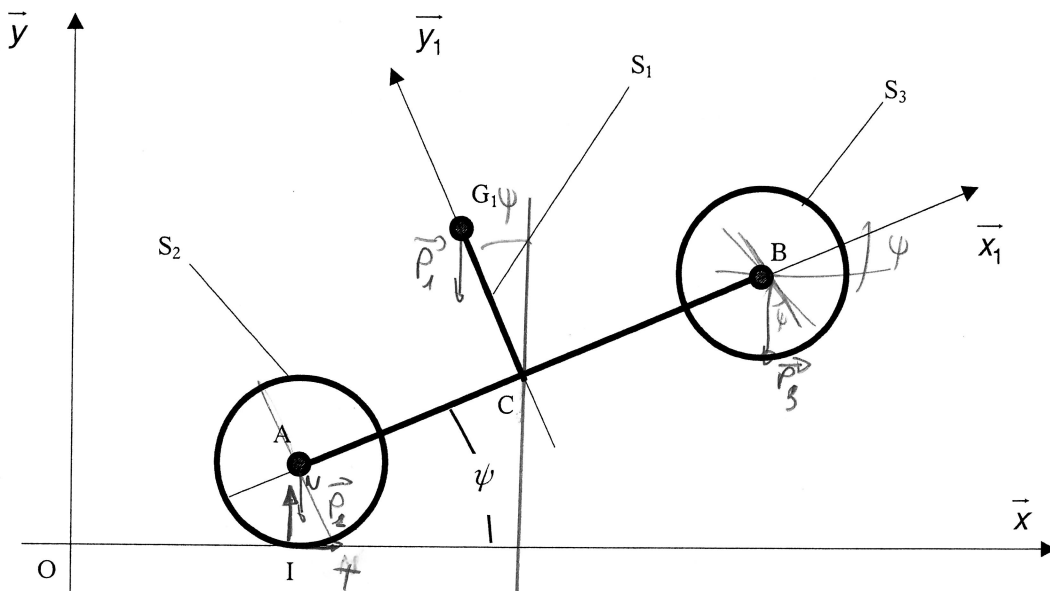


Figure 1

$$\overline{AC} = a \bar{x}_1, \quad \overline{CB} = b \bar{x}_1, \quad \overline{CG_1} = c \bar{y}_1$$



Le torseur des efforts appliqués du solide S_i sur le solide S_j au point M exprimé dans le repère R est noté (mécanisme plan) :

$$\{F_{S_i \rightarrow S_j}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R_{S_i \rightarrow S_j}} \\ \overline{M_{A S_i \rightarrow S_j}} \end{array} \right\}_R = \left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ - \\ N_{ij} \end{array} \right\}_R$$

Problème II (10 points)

Soit l'étude du mouvement d'un mécanisme (étouffeur de vibration articulé) décrit en figure 2. La partie du mécanisme étudiée est composée :

- d'un pendule pesant de révolution 1 articulé en O (liaison pivot), de masse m_1 ,
- d'une masselotte 2 de révolution, de masse m_2 , en liaison glissière (1 ddl en translation),
- d'un ressort linéaire 3 dont la masse est négligeable.

Le mécanisme est plan et les liaisons sont supposées parfaites (sans frottement, ni désalignement).

II.1 Déterminer les équations de mouvement du système

On considère maintenant le mouvement du système en charge (figure 3). La charge est ici modélisée par une force constante F d'axe y (verticale vers la bas) appliquée au point A.

II.2. Que deviennent les équations de mouvement dans ce cas ?

Questions générales

II.3 Quels changements sont occasionnés dans l'écriture des équations de mouvement si le solide 1 n'est pas de révolution ?

II.4 Quels changements sont occasionnés dans l'écriture des équations de mouvement si le solide 2 est en liaison pivot glissant avec le solide 1 ?

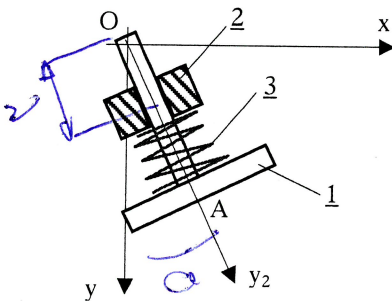


Figure 2

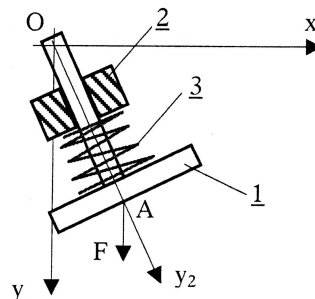
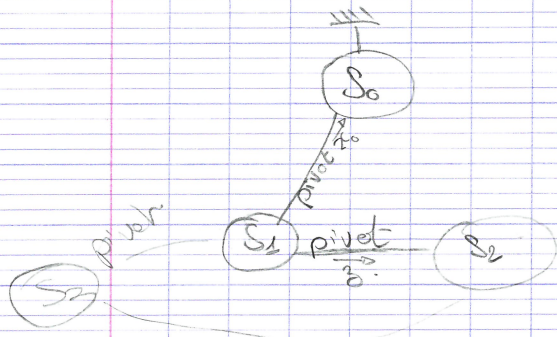


Figure 3





$$\vec{u} = -y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha$$

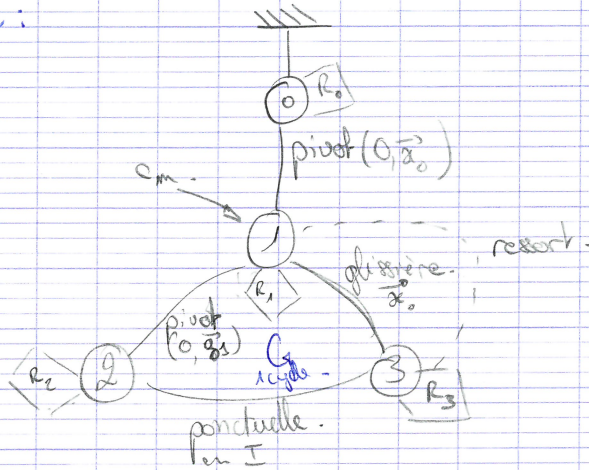
$$\vec{OO}_1 + \vec{O}_1 \vec{I} + \vec{I} \vec{A} + \vec{A} \vec{O} = \vec{0}$$

$$a \vec{y}_1 + c \vec{u} - y_1 \vec{y}_1 - x_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$$

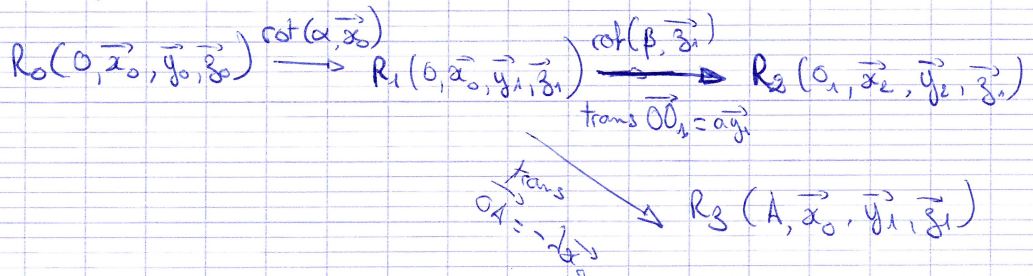
$$\begin{vmatrix} 0 & -c \sin \alpha \\ a & -c \cos \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -x_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c \sin \alpha \\ y_1 = a - c \cos \alpha \end{cases}$$

Graphie:



Paramétrage:



3 paramètres : $\alpha(t), \beta(t), \lambda(t)$

3) Inconnues : * cinématiques $\alpha(t), \beta(t), \lambda(t)$ $m=3$ \rightarrow
 * dynamiques : 2 pivots $2 \times 5 = 10$ \rightarrow
 1 glissière $1 \times 5 = 5$ \rightarrow
 1 ponctuelle $1 \times 3 = 3$ \rightarrow
 $\underline{21}$.

Equations : th. généraux 3 solides 3D $3 \times 6 = 18$.
 - loi de contact - ressort 1
 - frottement 1
 - la liaison geo \rightarrow contact 1
 $\underline{21}$.

(Degré de mobilité
 $d = m - l = 3 - 1 = 2$)

Equation de liaison :

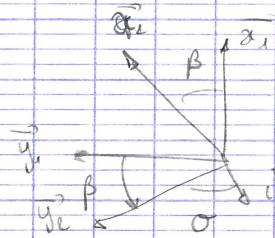
$$\vec{AI} = \vec{AO} + c\vec{O}_1 + \vec{O}_2 \vec{I}$$

$$= \lambda \vec{x}_0 + a \vec{y}_1 + c \vec{I}$$

$$\vec{AI} = [\lambda + c(-\cos\theta \sin\beta - \sin\theta \cos\beta)] \vec{x}_1 + [a + c(\cos\theta \cos\beta - \sin\theta \sin\beta)] \vec{y}_1$$

$$\vec{I} = \cos\theta \vec{y}_2 - \sin\theta \vec{x}_2 \quad \vec{x}_2 = \cos\beta \vec{x}_1 + \sin\beta \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_2 = \cos\beta \vec{y}_1 - \sin\beta \vec{x}_1$$



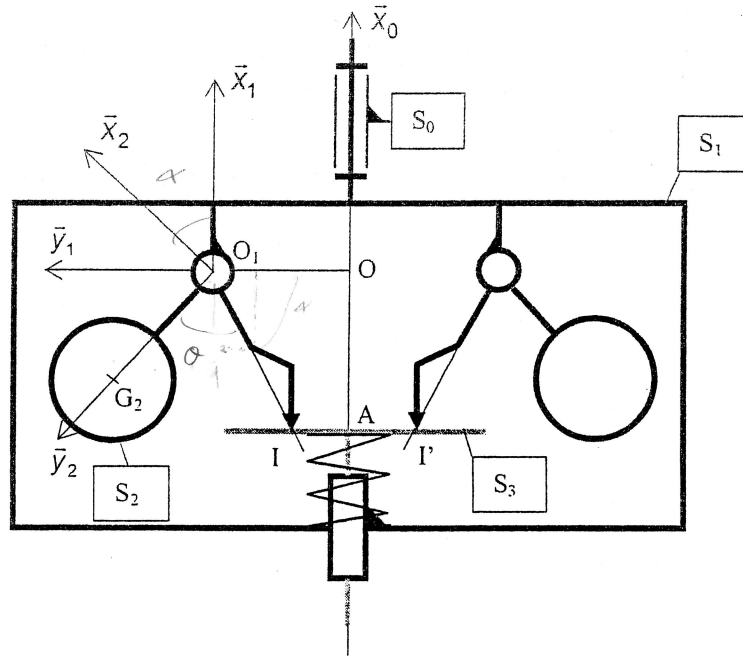
Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{AI} = (\lambda - c \cos\beta) \vec{x}_1 + (a - c \sin\beta) \vec{y}_1$

liaison type contact : $\vec{AI} \cdot \vec{x}_1 = 0 \Rightarrow \lambda - c \cos\beta = 0$

$\Rightarrow \lambda = c \cos\beta$ equation de liaison. (holonome).

On a donc 2 paramètres indépendants : $\alpha(t)$ et $\beta(t)$

TD n°2 : Régulateur de vitesse



Considérons un mécanisme de régulation de vitesse d'un moteur thermique. Son fonctionnement est basé sur un déplacement de masselottes (S_2), induit par le mouvement de rotation de S_1 , qui actionne un poussoir (S_3) afin de piloter l'alimentation du moteur. Le solide S_1 est lié au bâti S_0 par une liaison pivot (O, \bar{x}_0). Les masselottes S_2 sont liées au solide S_1 par une liaison pivot (O_1, \bar{z}_1). Le solide S_3 (poussoir) est lié au solide S_1 par une liaison glissière d'axe (O, \bar{x}_0). Soit $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ lié à S_0 , $R_1(O, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ lié à S_1 , $R_2(O_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_1)$ lié à S_2 et $R_3(A, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ lié à S_3

On a $\overline{OO_1} = a\bar{y}_1$, $\overline{O_1G_2} = b\bar{y}_2$, $(\widehat{O_1G_2, O_1I}) = (\widehat{\bar{y}_2, \bar{i}}) = \theta$, $\overline{O_1I} = c\bar{i}$

Le solide S_1 est de masse m_1 , son centre de gravité est situé sur l'axe (O, \bar{x}_0) et sa

matrice d'inertie s'exprime par
$$[I_{O_1}(S_1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R_1}$$
.

Le solide S_2 (on ne considère ici qu'une des 2 ou 4 masselottes) est considéré comme une sphère pesante (masse ponctuelle) de masse M , de centre de gravité G_2 et sa

matrice d'inertie s'exprime par
$$[I_{G_2}(S_2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}_{R_2}$$
.

Le solide S_3 est de masse m_3 , de centre de gravité G_3 situé sur l'axe (O, \bar{x}_0) et sa

matrice d'inertie s'exprime par
$$[I_{G_3}(S_3)] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}_{R_3}$$
.

Le solide S_1 est entraîné par le moteur qui délivre un couple $\bar{C} = C_m \bar{x}_0$.

Un ressort de compression de raideur k est monté entre S_1 et S_3 .

Toutes les liaisons sont considérées comme parfaites, sauf la liaison S_3 - S_2 où on admet une adhérence et un frottement de Coulomb f .

*

- 1) Construire le graphe des liaisons.
- 2) Faire le paramétrage du système.
- 3) Faire le bilan des inconnues du système et des équations disponibles. En déduire le degré de mobilité du système.
- 4) Écrire les équations nécessaires à l'étude du mouvement

