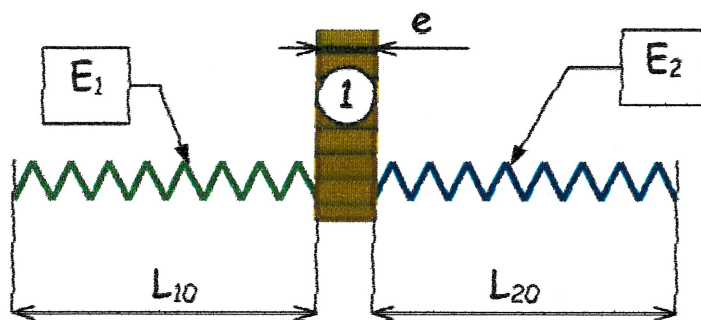


# Liaisons préchargées

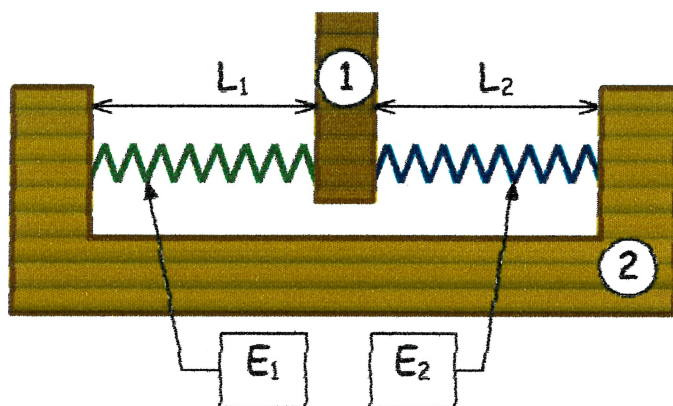
Dans toute liaison par adhérence réalisée à l'aide d'organes filetés, l'établissement d'une pression de contact minimale pour l'obtention de cette adhérence nécessite la mise en précharge des éléments filetés.

## Principe de la précharge:

Un ensemble préchargé est constitué de deux sous-ensembles élastiques en opposition ( $E_1$  et  $E_2$ ).



Ensemble libre



Ensemble préchargé

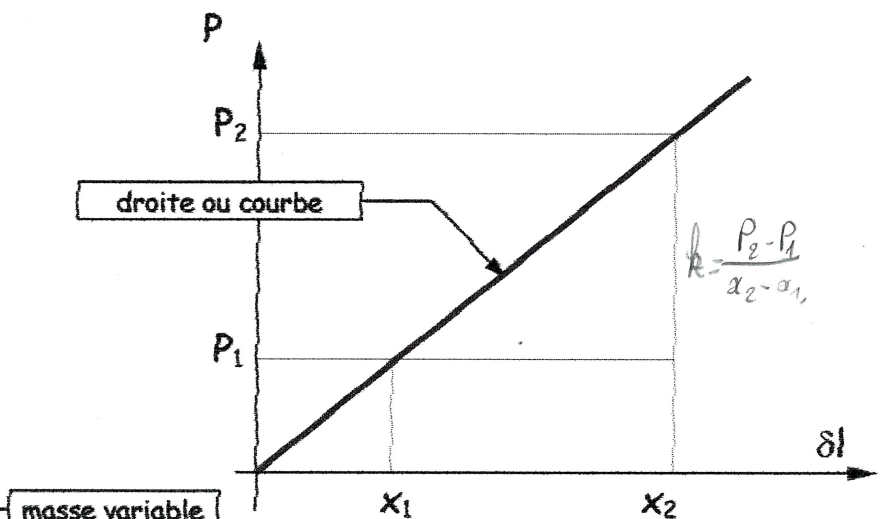
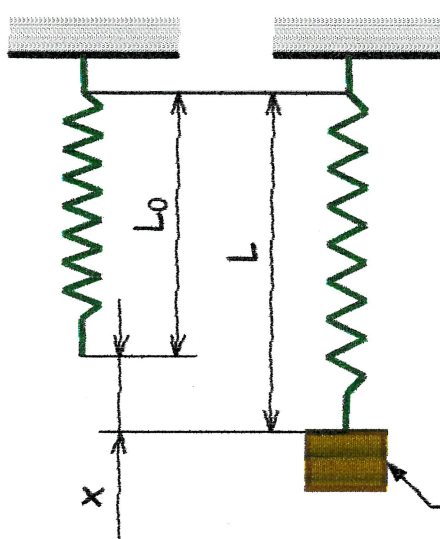
$$L_1 + e + L_2 < L_{10} + e + L_{20}$$

Et

$$j = (L_{10} + e + L_{20}) - (L_1 + e + L_2)$$

## Éléments élastiques:

➤ Raideur ou rigidité






La raideur ou rigidité se définit par:  $k = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1}$  pente de la droite (ou tangente à la courbe).

L'unité de raideur est le  $N/m$  ou  $N.m^{-1}$

Par conséquent ici  $P = k \cdot x$  pour les ressorts courants, dans une certaine limite de déformation nous considérerons que  $k = cte$  dans d'autres cas (roulements préchargés par exemple)  $k = f(x)$

➤ Association d'éléments élastiques

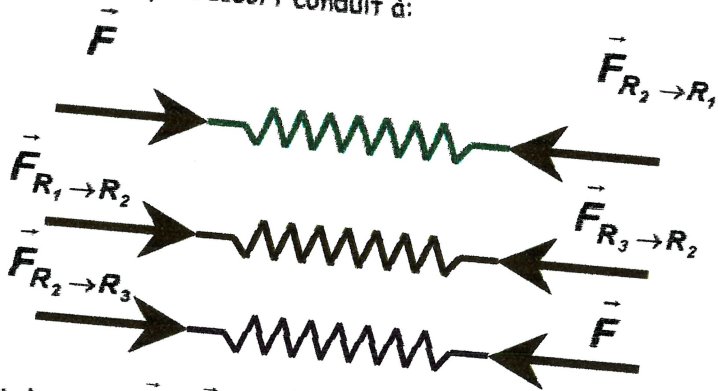
Considérons trois ressorts

- ressort  $R_1$   de rigidité  $k_1$
- ressort  $R_2$   de rigidité  $k_2$
- ressort  $R_3$   de rigidité  $k_3$

❖ groupement en série



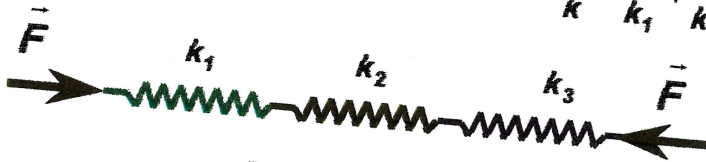
l'isolement de chaque ressort conduit à:



Il apparaît donc que  $\vec{F} = \vec{F}_{R_1 \rightarrow R_2} = \vec{F}_{R_2 \rightarrow R_3} = \dots$

∴  $x_1, x_2, x_3$  sont les déplacements des ressorts alors  $x = x_1 + x_2 + x_3$  et donc

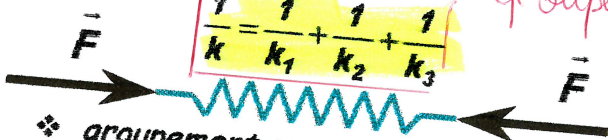
$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$  la rigidité équivalente du montage est donc  $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$



Est équivalent à

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

Groupement en série



❖ groupement en parallèle

Une étude analogue conduit à une rigidité équivalente  $k = k_1 + k_2 + k_3$

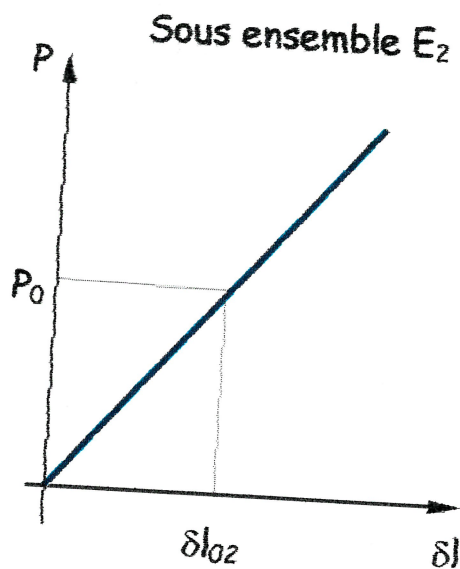
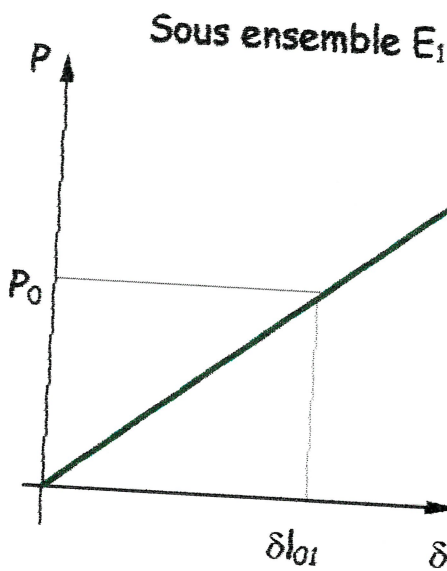
Grouperment en parallèle.

❖ BILAN

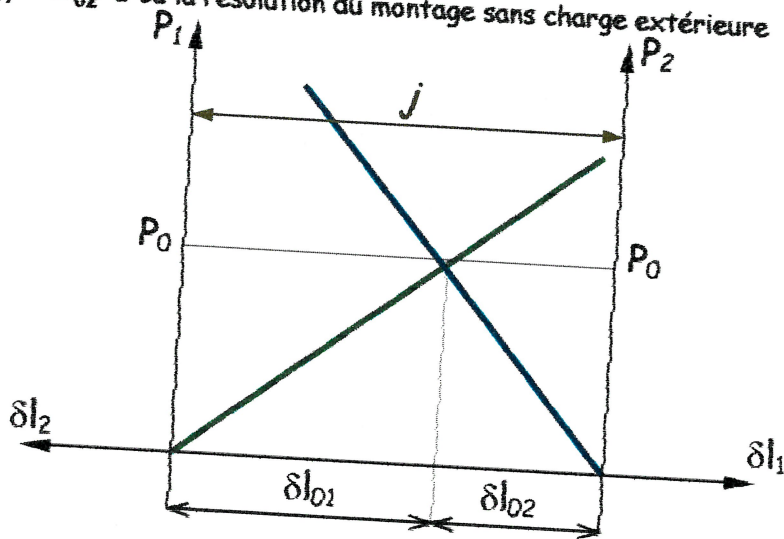
série	parallèle
$\frac{1}{k_{eq}} = \sum \frac{1}{k_i}$	$k_{eq} = \sum k_i$
Les charges sont les mêmes	Les charges sont différentes et s'ajoutent
Les déformations sont différentes et s'ajoutent	Les déformations sont les mêmes

Comportement d'une liaison préchargée:

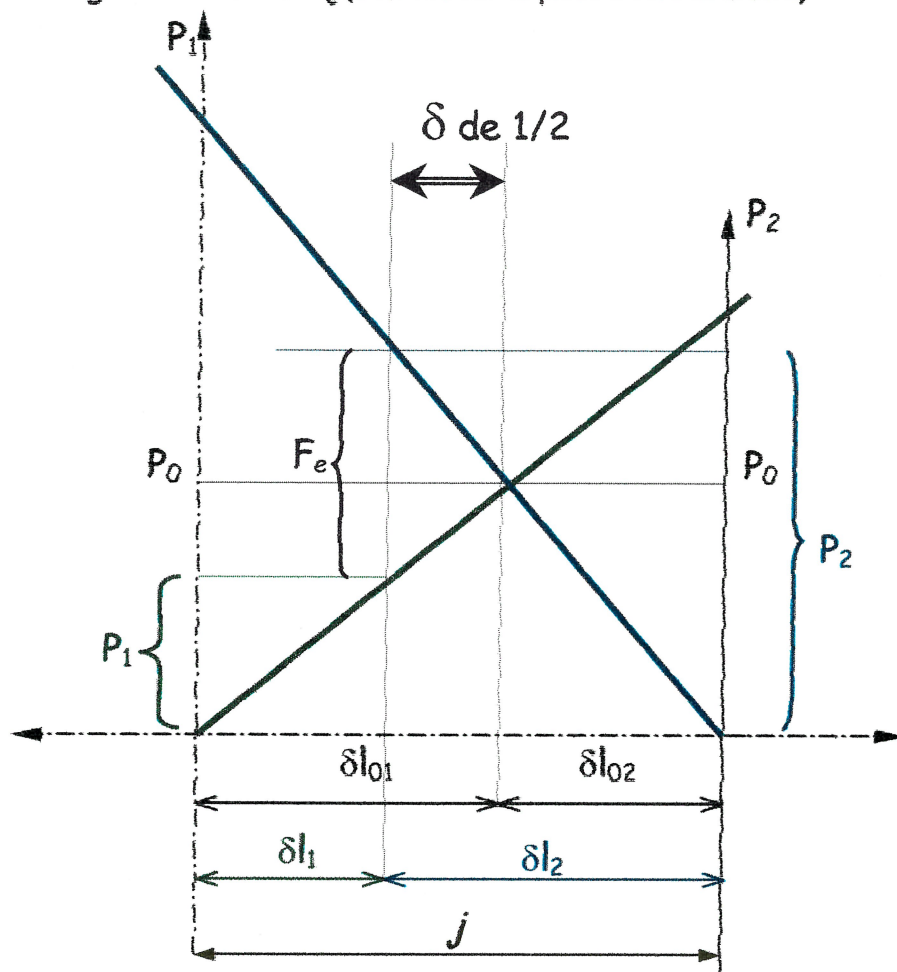
❖ Sans charge extérieure



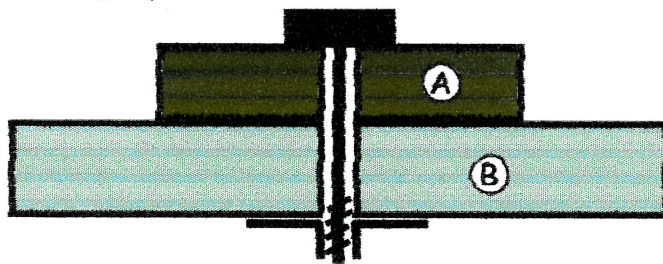
Avec  $j = \delta l_{01} + \delta l_{02}$  d'où la résolution du montage sans charge extérieure



❖ Avec charge extérieure  $\vec{F}_e$  (exercée sur la pièce 1 vers la droite)



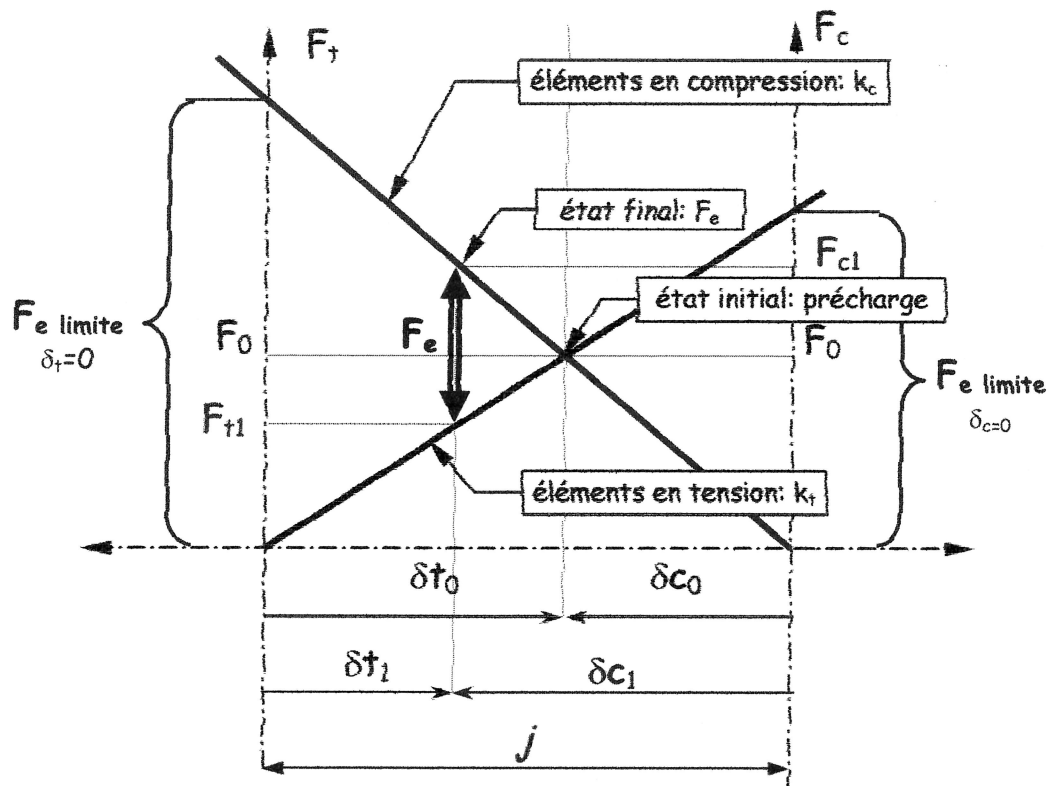
Cas d'un assemblage par éléments filetés



On distingue:

- l'élément en tension (organe fileté) de rigidité  $k_t$
- les éléments en compression (pièce A et B) de rigidité  $k_c$

Nous obtenons le diagramme suivant:

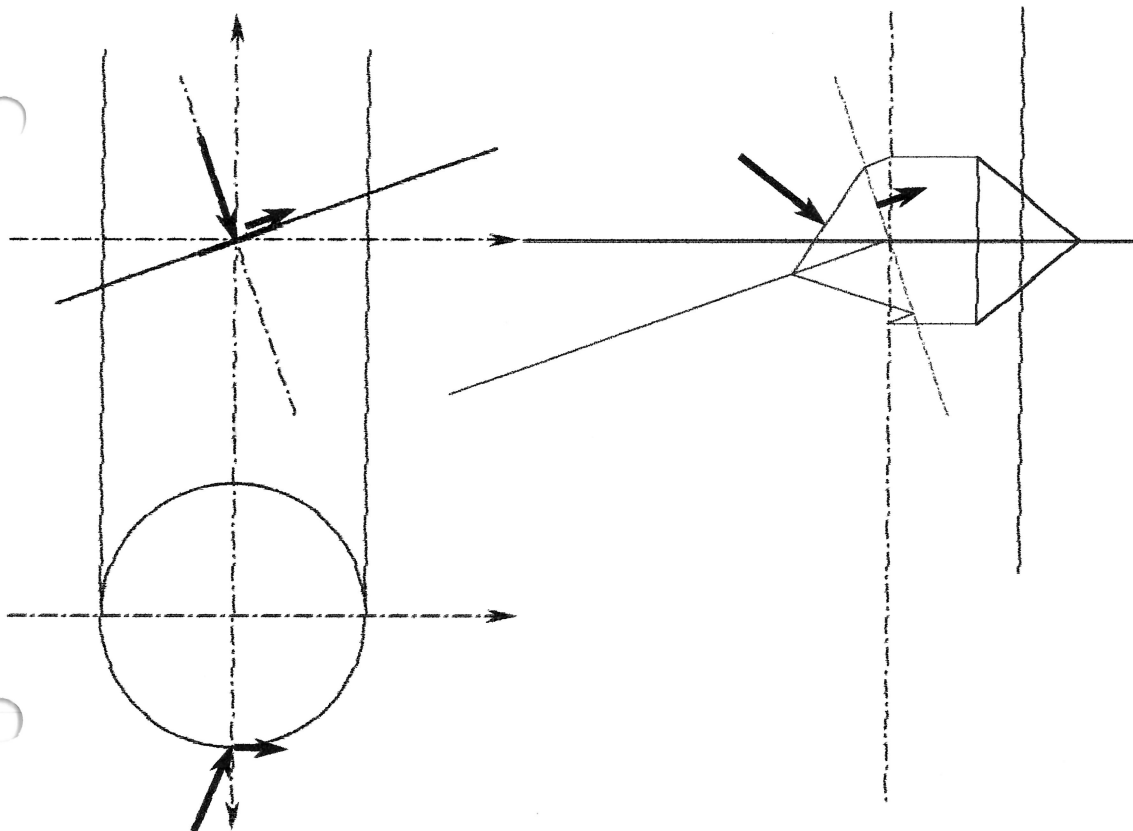


L'installation de la précharge peut se faire de plusieurs façon:

- contrôle du couple de serrage
- tendeur de boulon

### Relation entre le couple de serrage et l'effort axial

❖ *Contact entre filets*: calcul du couple de frottement au niveau des filets. Analyse des efforts sur un filet triangulaire quelconque.

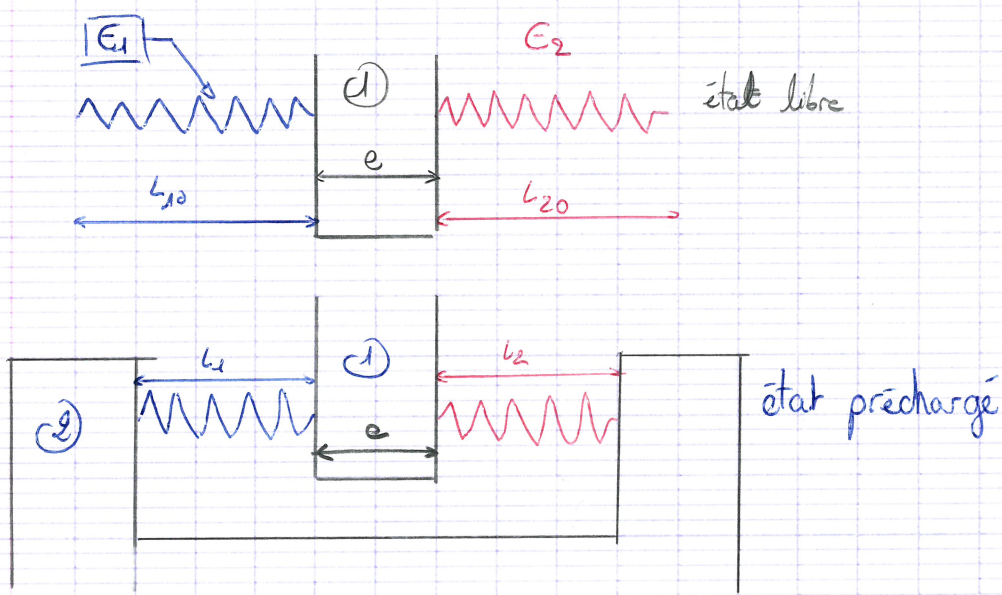


## diapos préchargées.

Guidages par roulement et assemblages filetés.

### Principe

2 sous ensembles  $E_1, E_2$  "élastiques" en opposition.

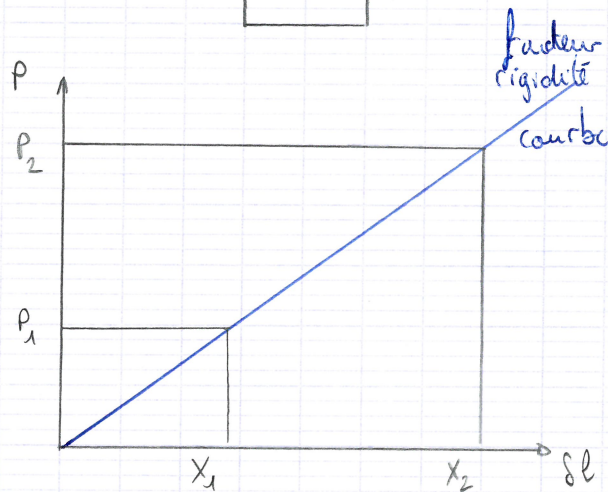
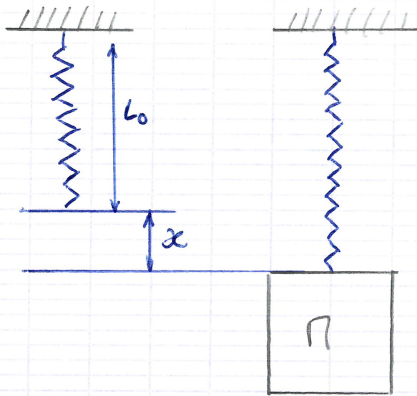


$$L_{10} + e + L_{20} > L_1 + e + L_2$$

On pose 
$$\delta = (L_{10} + e + L_{20}) - [L_1 + e + L_2]$$
$$= (L_{10} + L_{20}) - (L_1 + L_2)$$

### Elements élastiques

\* Raideur ou rigidité.



$$k = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1}$$

en  $N \cdot m^{-1}$

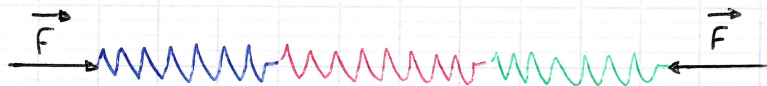
→ cste.

→ variable (tangente à la courbe)

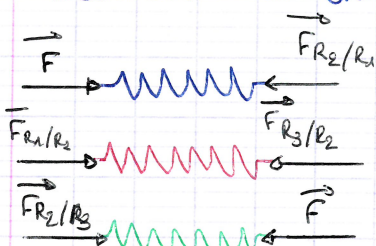
### Association d'éléments élastiques.

3 ressorts:  $R_1$ : rigidité  $k_1$   
 $R_2$ :  $k_2$   
 $R_3$ :  $k_3$

en série:



Isolément de chaque ressort.



$$\|\vec{F}\| = \|\vec{F}_{R1/R2}\| = \|\vec{F}_{R2/R3}\|$$

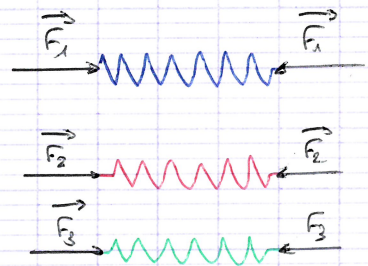
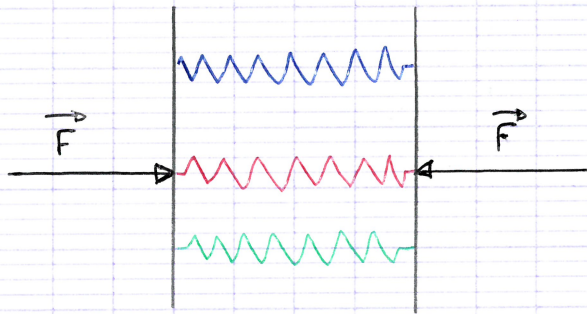
Niveau  
Mec.  
16/09/08.  
suite.

Déplacement total:

$$\frac{F}{k_{eq}} = x = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \equiv \begin{array}{c} \vec{F} \quad k_e \quad \vec{F} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{rigidité } k_e \end{array}$$

en parallèle.



Déplacements  $x = x_1 = x_2 = x_3$ .

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

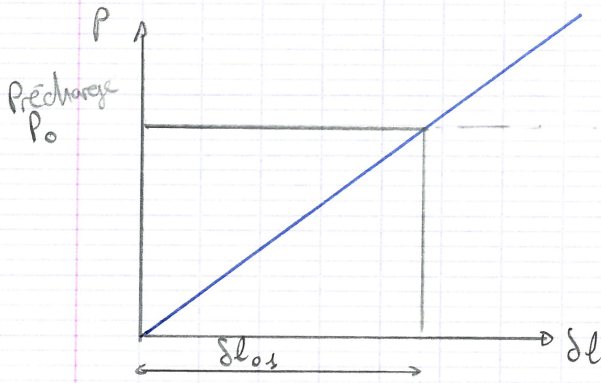
$$k_e x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$$

$$\boxed{k_e = k_1 + k_2 + k_3}$$

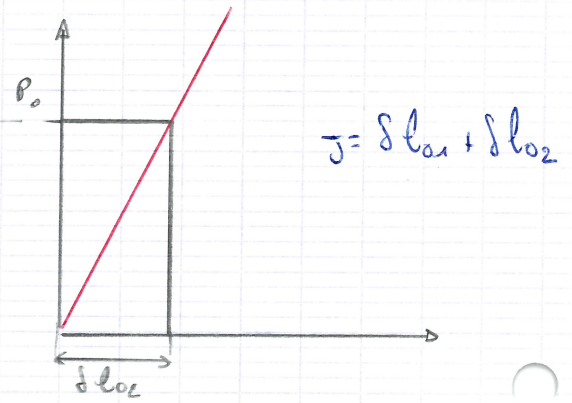


# Comportement d'une liaison préchargée -

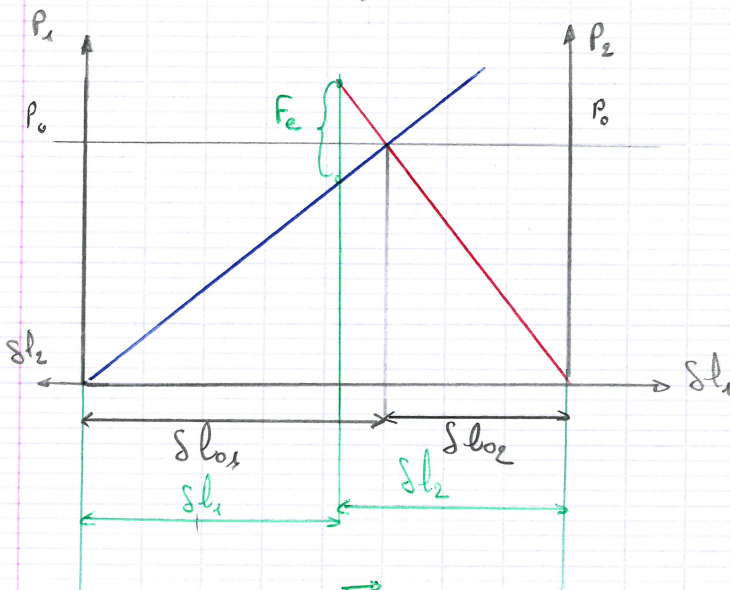
Sous ensemble  $E_1$ .



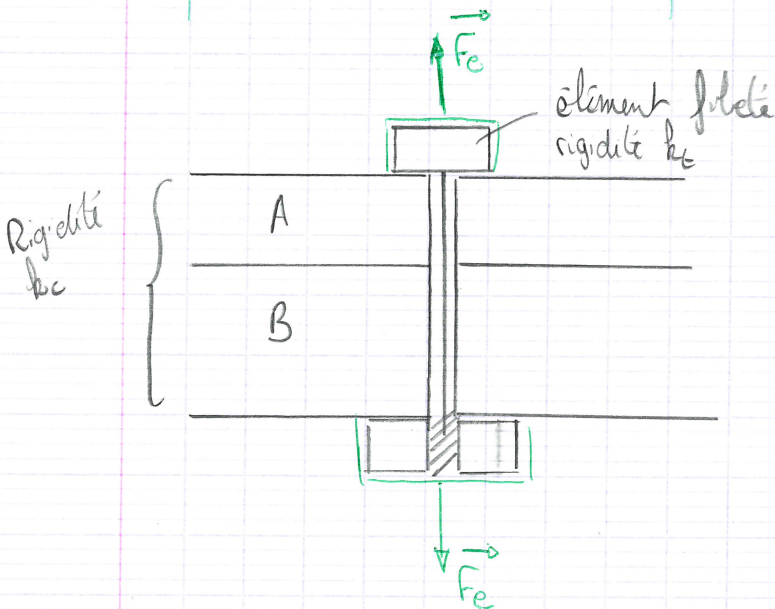
Sous ensemble  $E_2$ .



$$j = \delta l_{01} + \delta l_{02}$$



$$P_1 + F_e = P_2$$







R<sub>lim</sub> en série : on double le déplacement  
 R<sub>lim</sub> en parallèle : on double la charge

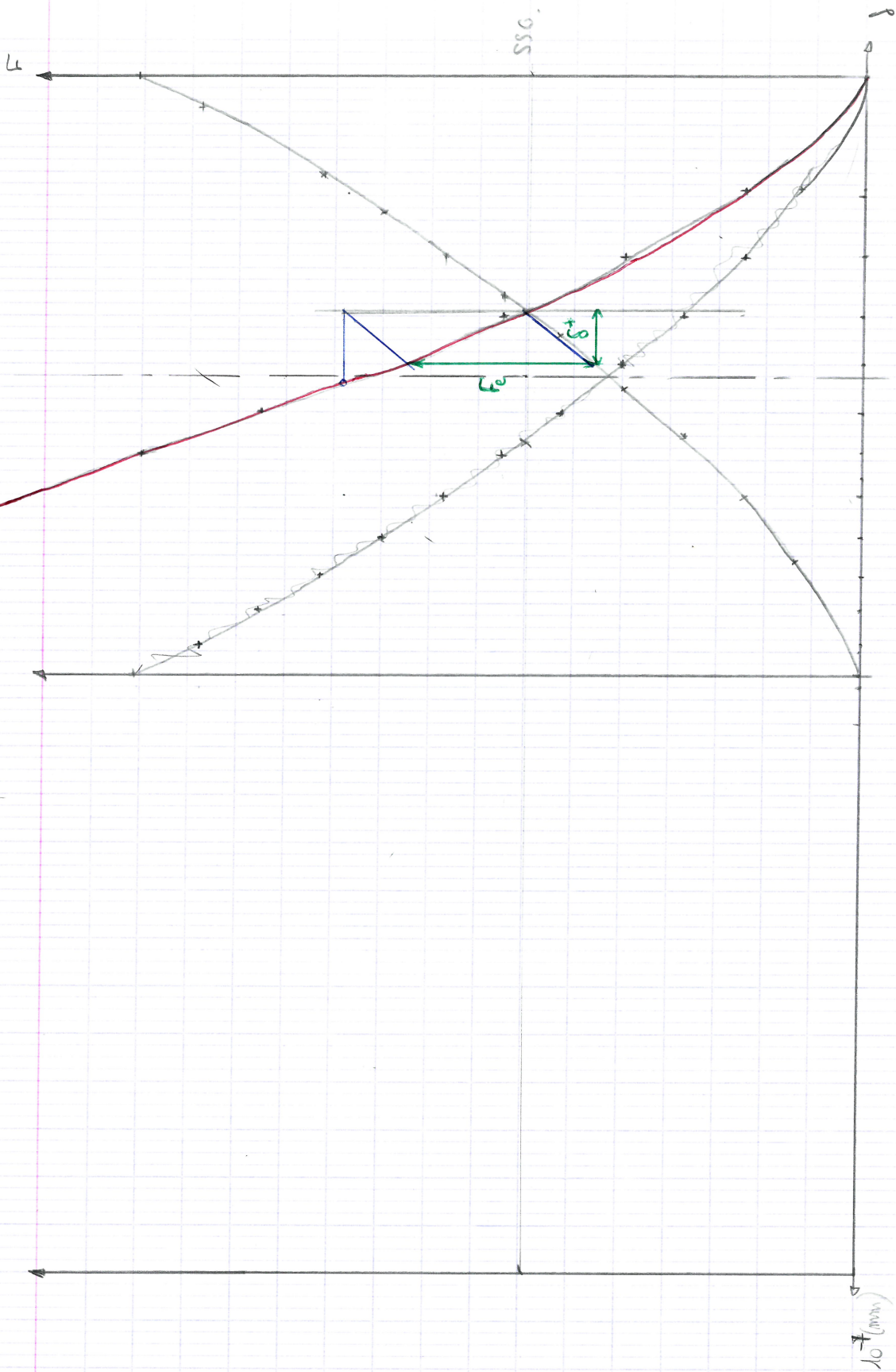
$$L_{cm} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

$$A_{cm} = 100 \text{ daN}$$

$$L_{cm} = 1 \cdot 10^{-9}$$

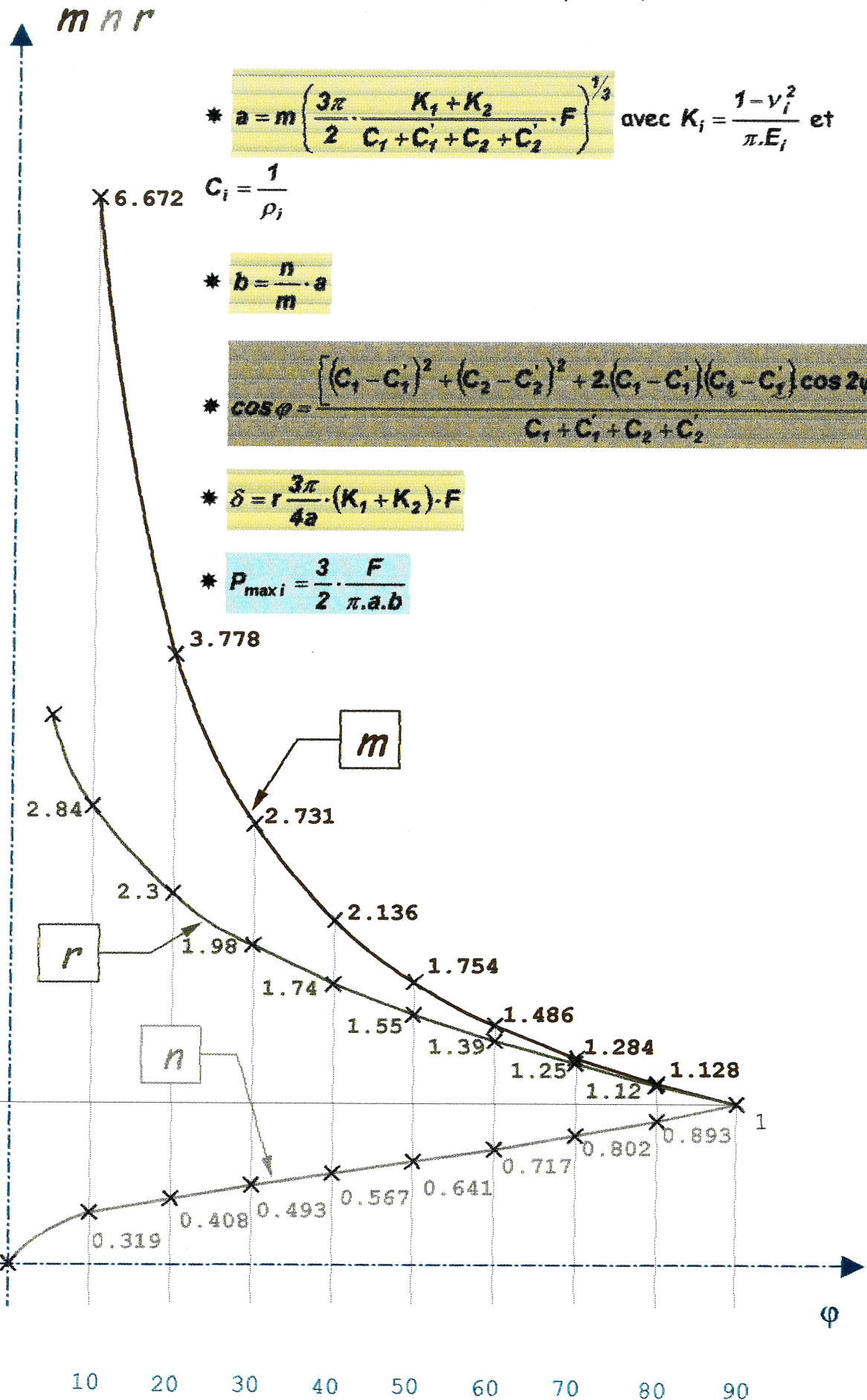
1200	→	5,6
1100	→	9,5
1000	→	8,9
900	→	7,3
800	→	7,8
700	→	1
600	→	6,3

500	→	5,6
400	→	4,8
300	→	4
200	→	3
100	→	1,9



$R_{lim}$

# Relations de Hertz (contact ponctuel)



## Pression de contact

Dans tous les mécanismes se pose un problème de dimensionnement.

Ceci nécessite des études :

- des contraintes volumiques et des déformations globales → RDM ou élasticité
- des contraintes surfaciques et des déformations surfaciques → élasticité dans les liaisons, relations de Hertz.

L'étude du chargement d'une liaison nous conduit à définir la répartition des charges sur les différentes surfaces :

- Notion de pression de contact
- Notions de déformation au contact

Pour la détermination des pressions de contact la théorie de Hertz ne s'intéresse qu'aux contacts ponctuels et linéaires.

### 1. Théorie de Hertz

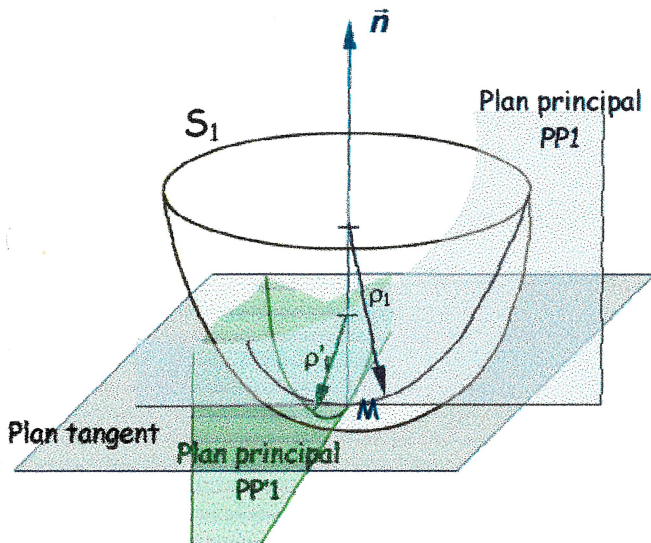
Hypothèses :

- Il y a contact direct entre les deux solides
- Les matériaux constitutifs sont homogènes et isotropes
- Le chargement sera normal aux surfaces
- Les déformations sont purement élastiques
- Les surfaces obtenues après déformations sont petites devant la géométrie globale des surfaces : petites déformations

Contact ponctuel :

Il nous faut caractériser :

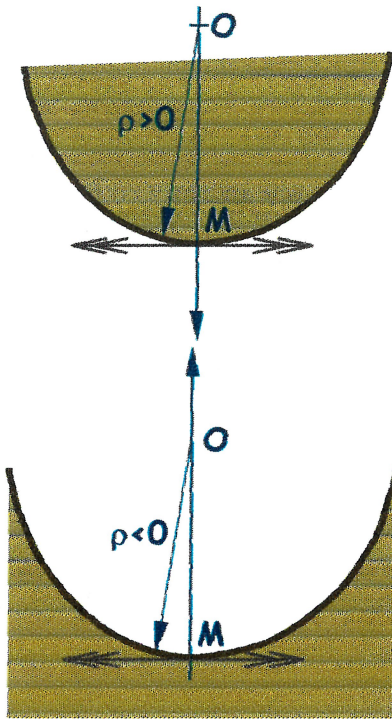
#### a. La géométrie



En  $M$ , sur le solide  $S_1$  on peut définir :

- la normale  $\vec{n}$  et le plan tangent
- les rayons de courbure qui passent par un maxi et un mini, ce qui définit 2 plans principaux de courbure,  $PP_1$  et  $PP'_1$ , de rayons de courbure respectifs  $\rho_1$  (maxi) et  $\rho'_1$  (mini)

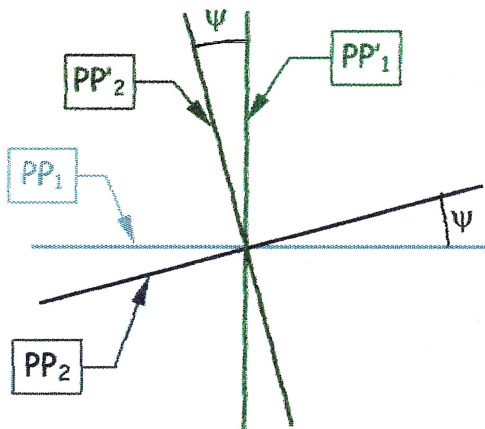
De même sur le solide  $S_2$ ,  $PP_2$  [rayon de courbure  $\rho_2$  (maxi)] et  $PP'_2$  [rayon de courbure  $\rho'_2$  (mini)]



De plus, il faut définir la position de la matière par rapport à la surface. On oriente la normale vers l'extérieur de la matière.

Quand le centre de courbure appartient à la matière alors le rayon de courbure est positif  $\rho > 0$  (surface convexe)

Quand le centre de courbure n'appartient pas à la matière alors le rayon de courbure est négatif  $\rho < 0$  (surface concave)



Il faut aussi repérer le solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_2$ .

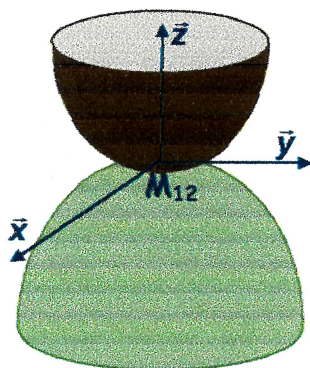
En  $M$  les plans tangents sont confondus (même normale aux surfaces).

On repère donc la position relative des deux solides par l'angle «  $\psi$  » entre les plans principaux de même nature :  $PP_1$  et  $PP_2$  ou bien  $PP'_1$  et  $PP'_2$

### b. Les matériaux

- Pour le solide  $S_1$ 
  - Module d'élasticité longitudinale  $E_1$
  - Coefficient de Poisson  $\nu_1$
- Pour le solide  $S_2$ 
  - Module d'élasticité longitudinale  $E_2$
  - Coefficient de Poisson  $\nu_2$

### c. Le chargement



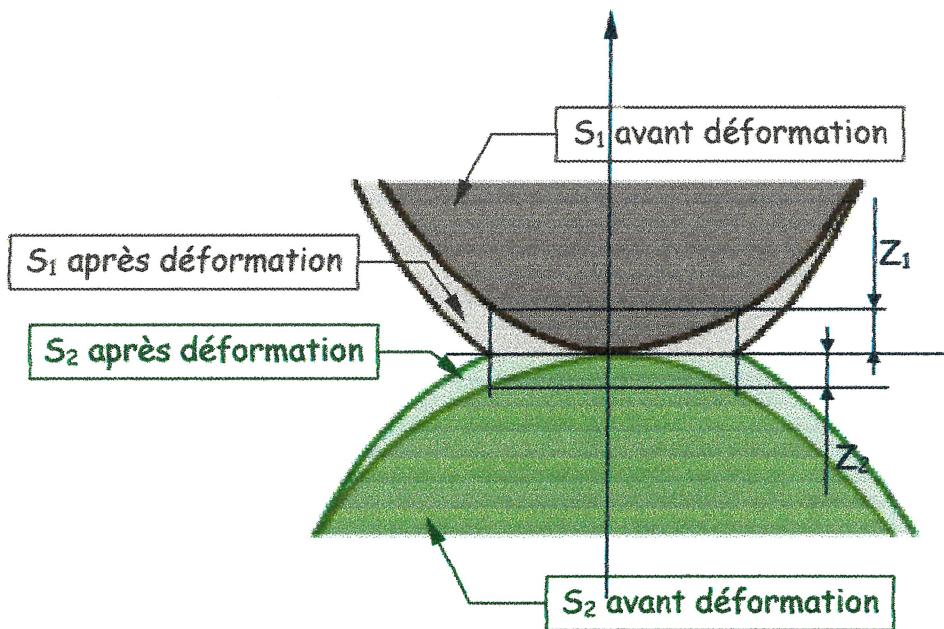
$\vec{F}$  est normale au contact en  $M_{12}$ .

Equation de la surface au voisinage de  $M_{12}$

Pour  $[S_1] \rightarrow z = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 xy + \dots$

Pour  $[S_2] \rightarrow z = A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_2 xy + \dots$

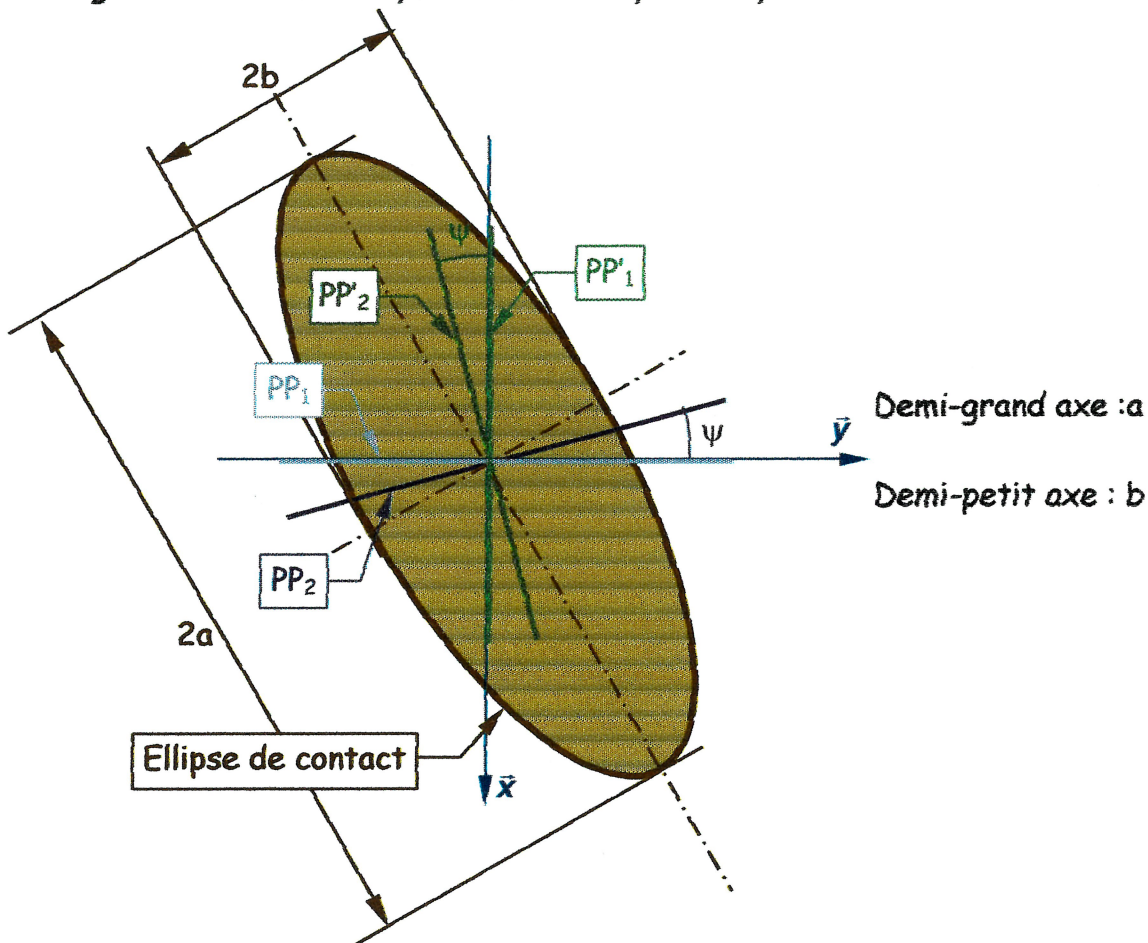
Le chargement provoque des déformations. Au contact existe une petite surface admise comme plane (petites déformations) parallèle au plan tangent commun.



**Déformation** : mise en coïncidence d'un ensemble de points qui étaient à une altitude  $z_1$  sur  $[S_1]$  et une altitude  $z_2$  sur  $[S_2]$ .

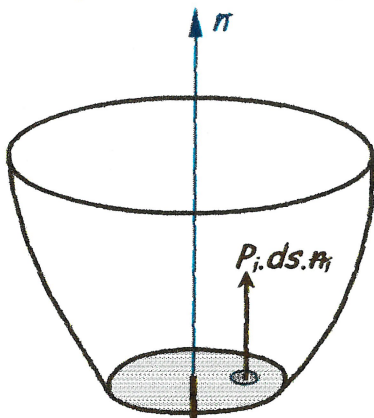
$$\underbrace{z_1 + z_2}_{cte} = Ax^2 + By^2 + Cxy + \dots$$

Par changement de repère (rotation autour de  $\vec{z}$ ) et en négligeant l'ordre supérieur à 2 l'équation devient  $z_1 + z_2 = A'x'^2 + B'y'^2$ .  $A'$  et  $B'$  sont de même signe ceci est donc l'équation d'une ellipse : ellipse des contacts.



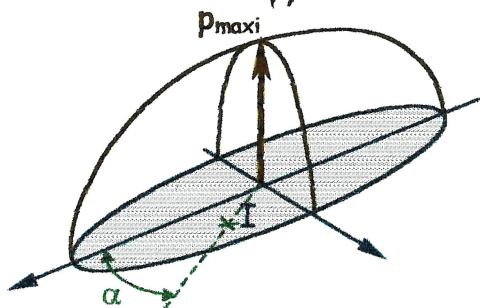


d. Equilibre du solide [S<sub>1</sub>]



$$\vec{F} = \iint p_i dS$$

La relation entre pression et Déformation provient de l'élasticité et est due à Boussinecq.



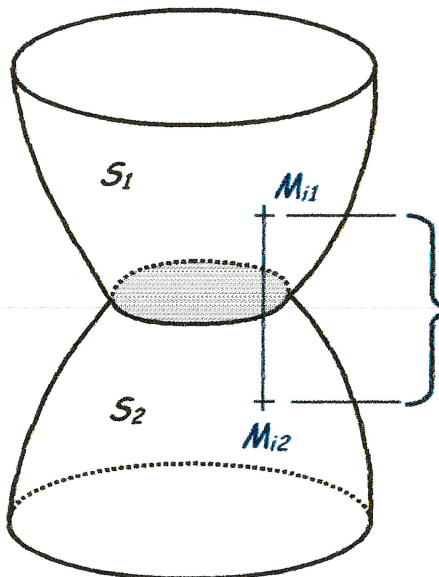
La répartition de pression est elliptique selon Hertz. Ceci conduit sur la surface déformée à un demi-ellipsoïde ayant pour base l'ellipse de contact.

On peut calculer en I la pression p<sub>i</sub> en fonction de p<sub>maxi</sub> et de alpha.

En intégrant sur toute la surface on obtient  $p_M = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a b}$  où  $\frac{3}{2}$  est un majorant car la pression n'est pas uniforme et  $\pi a b$  est la surface de l'ellipse.

Calcul pression maxi

e. Rapprochement de deux points des solides [S<sub>1</sub>] et [S<sub>2</sub>] éloignés du contact



Rapprochement :  $\delta = r \cdot \frac{3\pi}{4a} (K_1 + K_2) F$  où encore

$\delta = k \cdot F^{2/3}$  avec k dépendant des matériaux et de la géométrie.

## Pression de contact :

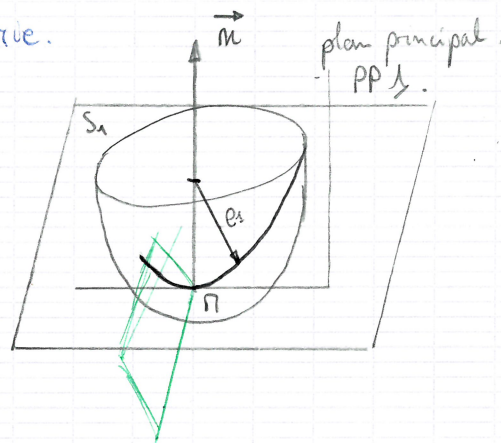
### 1. Théorie de Hertz -

hypothèses :

- il y a contact direct entre les 2 solides.
- les matériaux constitutifs sont homogènes et isotropes
- le chargement sera normal au surface.
- les déformations sont purement élastiques
- les surfaces obtenues après déformation sont petites devant la géométrie globale des surfaces = petites déformations.

Contact ponctuel :

Il nous faut caractériser :  
a) la géométrie.

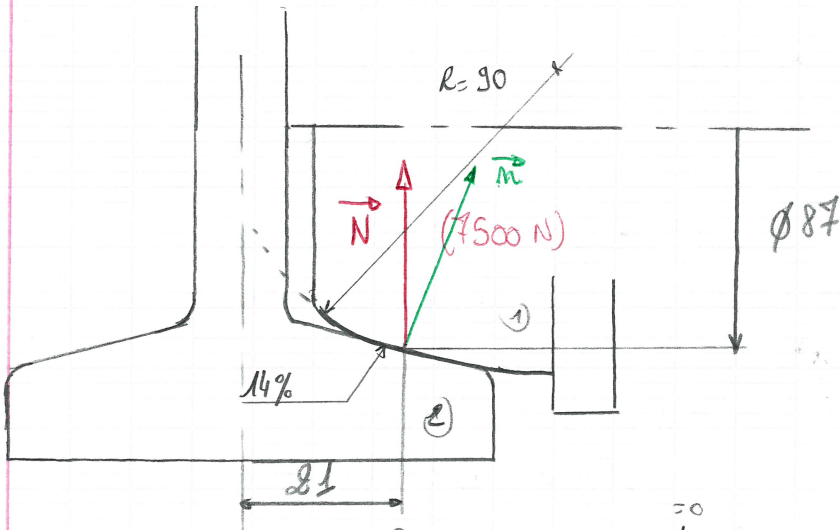


$$\text{courbure} = (\text{rayon de courbure})^{-1}$$

# Chariot porte palan.



$$\tan \psi = \frac{14}{100}$$



$$\cos \varphi = \frac{[(c_1 - c_1')^2 + (c_2 - c_2')^2 + 2(c_1 - c_1')(c_2 - c_2') \cos 2\psi]^{1/2}}{c_1 + c_1' + c_2 + c_2'}$$

$$a = m \left( \frac{3\pi}{2} \frac{k_1 + k_2}{c_1 + c_1' + c_2 + c_2'} \times F \right)^{1/3} / k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi G_i} \quad \begin{matrix} \text{acier} \\ \text{acier} \end{matrix} \rightarrow \nu = 0,3$$

$$b = \frac{m}{m} a \quad \delta = r \frac{3\pi}{4a} (k_1 + k_2) F$$

$$P_{\pi} = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi ab}$$

$$\cos \varphi \approx \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 70^\circ$$

$$m = 1,284 \quad m = 0,802 \quad r = 1,25$$

BE.  
18/11/08.

1 bar = 1 · 10<sup>5</sup> Pa.      1 MPa = 1 · 10<sup>6</sup> Pa.      7860 kg/m<sup>3</sup>.

$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = P \times S = 420 \cdot 10^1 \times \pi \times \frac{36^2}{4} =$

$S = \pi \times R^2 = \pi \times \left(\frac{36}{2}\right)^2 = 1018.$

1 bar = 1 daN · cm<sup>-2</sup>.  
 $F = 420 \times \pi \times \frac{(0,36)^2}{4} = 42,75 \text{ daN} = 42750 \text{ N}.$

$E = 210 \cdot 10^3 \text{ MPa} = 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}.$

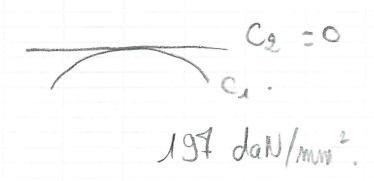
$a = m \times \left( \frac{3\pi}{2} \times \frac{k_1 + k_2}{C_1 + C_1' + C_2 + C_2'} \times F \right)$  avec  $k = \frac{1 - \nu^2}{\pi \cdot E} = \frac{1 - 0,3^2}{\pi \times 210 \cdot 10^9} = 1,38 \cdot 10^{-12}$

$a = 1 \times \left( \frac{3\pi}{2} \times \frac{2 \times 1,38 \cdot 10^{-12}}{2 \times 8,33} \times 42750 \right)^{1/3}$

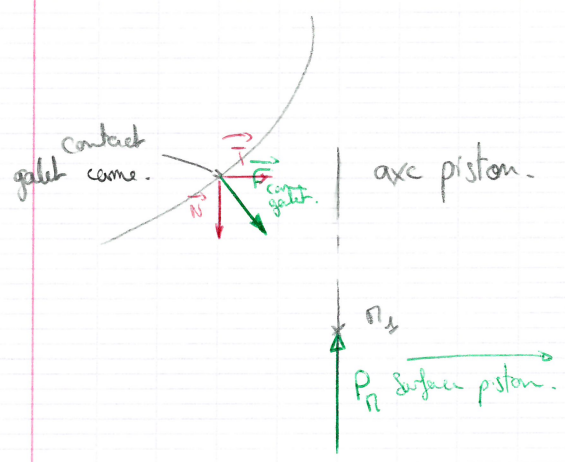
$K = 1,38 \cdot 10^{-12}$   
 $C_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{180 \cdot 10^{-3}} = 8,33 \text{ m}$   
rayon de courbure.

$a = 3,22 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,00322 \text{ m}.$   
 Ici  $b = a.$

$P_{\text{max}} = \frac{2}{3} \frac{F}{\pi \cdot a^2} = 875 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$



Pression de contact entre galet came.



$\parallel \vec{F} \parallel$  charge sur le contact.

Galet ①  $\Rightarrow \phi 72 \text{ mm } R = 500 \text{ mm}.$

came ②  $\Rightarrow R = 230 \text{ cylindre}.$

Galet  $E_1 = 21 \cdot 10^3 \text{ daN/mm}^2$  }  $\Rightarrow K_1 = \frac{1 - 0,3^2}{\pi \times 210 \cdot 10^3}$   
 $\nu_1 = 0,3$

$$e_{\text{max}} = 500 \quad e'_{\text{min}} = \frac{42}{2} \text{ mm.}$$

Cam  $E_2 = \nu_2 = 0,3 \Rightarrow K_2 =$


$$e_2 = \infty \quad e'_2 = 230 \text{ mm.}$$

Plan  $P_1 P'_1$  et  $P_2 P'_2 \Rightarrow \varphi = 0$ . (plans //)

$$\cos \varphi =$$

$$\varphi = \Rightarrow m \text{ et } m \text{ donc } a \text{ et } b.$$

en  $\pi_2$  perpendiculaire surf. que  $e'_2 = -230$  d'où  $P_{11} = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a x b}$

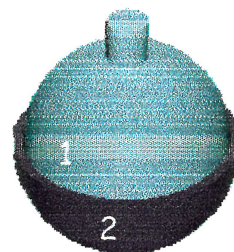


## CONTACTS SURFACIQUES

### I-Rotule

Considérons une liaison rotule de centre  $O$ . Le torseur statique

transmissible par cette liaison est  $\{T_{21}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{O} \end{Bmatrix}$ .



#### ❖ Modèle simplifié de répartition de pression

La répartition de pression est uniforme sur la demie sphère de contact. La liaison étant parfaite ( $f=0$ ) le chargement est donc normal aux surfaces de contact.

Pour tout point de contact  $I$  on peut écrire:

$$d\vec{f}_i = p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i$$

La résultante des forces de pression vaut donc:

$$\vec{R} = \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i$$

Les actions extérieures sur cette liaison s'expriment

$$\text{en } O \text{ par } \{T_{E1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{E1} \\ \vec{M}_{E1} \end{Bmatrix}$$

Le principe fondamental de la statique appliqué à la pièce 1 conduit à:  $\{T_{E1}\} + \{T_{21}\} = \{0\}$

Choisissons une base orthonormée telle que  $\vec{x}$  soit colinéaire à  $\vec{F}_{E1}$

La relation de résultante selon  $\vec{x}$  s'écrit:  $\vec{x} \cdot \iint_{(S)} d\vec{f}_i = \vec{x} \cdot \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i = \vec{x} \cdot \vec{F}_{E1} = F$

Prenons les points  $I$  sur un cercle situé dans un plan perpendiculaire à  $O\vec{x}$  ( $\theta = cte$ ). L'élément de surface  $dS$  est alors une couronne de largeur angulaire  $d\theta$  telle que  $dS = 2\pi \cdot R \cdot \sin\theta \cdot R \cdot d\theta$ .

La relation précédente devient:

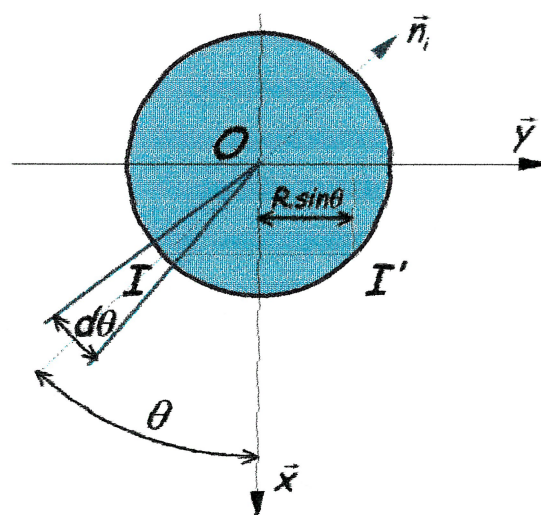
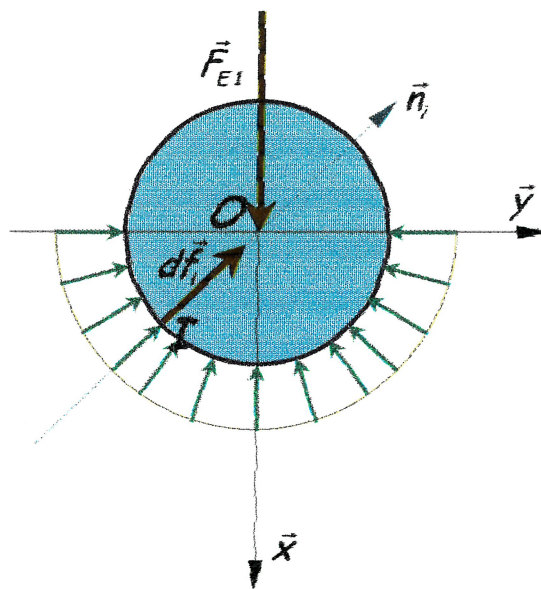
$$F = \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \cos\theta = \int_0^{\pi/2} p_i \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

soit en intégrant avec  $p_i = p_0$

$$F = 2\pi R^2 p_0 \left[ -\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi R^2 p_0$$

La pression de contact vaut dans ce cas  $p_0 = \frac{F}{\pi \cdot R^2}$

Cette détermination ne tient pas compte des jeux et des déformations. La pression  $p_0$  est éloignée de la réalité mais permet de donner un ordre de grandeur rapide à obtenir.



### ❖ Modèle de répartition des pressions en fonction des déformations

En tout point la pression est proportionnelle à la déformation:  $p_i = -k \cdot \bar{\delta}_i \cdot \bar{n}_i$  où  $\bar{\delta}_i$  est le déplacement en I. Le déplacement global  $\bar{\delta}$  de 1 par rapport à 2 est colinéaire à  $\bar{F}_{E1}$  (par raison de symétrie) donc en M  $\bar{\delta}$  est maximal et égal à  $\bar{\delta}_M$ . Soit:

$$\begin{aligned} - \text{en M} &\Rightarrow \bar{\delta}_M = \bar{\delta}_M \cdot \bar{x} \\ - \text{en I} &\Rightarrow \bar{\delta}_i = \bar{\delta}_M \cdot \bar{n}_i \text{ avec } \bar{\delta}_i = -\delta_i \cdot \bar{n}_i \end{aligned}$$

$$D'où \delta_i = \delta_M \cos \theta$$

La liaison étant parfaite ( $f=0$ ) le chargement est donc normal aux surfaces de contact.

Les actions extérieures sur cette liaison

$$\text{s'expriment en O par } \{T_{E1}\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{E1} \\ \bar{M}_{E1} \end{Bmatrix}$$

Pour tout point de contact I on peut écrire:  $d\bar{f}_i = p_i \cdot dS \cdot \bar{n}_i$  donc:  $\bar{R} = \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \bar{n}_i$

Le principe fondamental de la statique appliqué à la pièce 1 conduit à:  $\{T_{E1}\} + \{T_{Z1}\} = \{0\}$

Choisissons une base orthonormée telle que  $\bar{x}$  soit colinéaire à  $\bar{F}_{E1}$

La relation de résultante selon  $\bar{x}$  s'écrit:  $\bar{x} \cdot \iint_{(S)} d\bar{f}_i = \bar{x} \cdot \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \bar{n}_i = \bar{x} \cdot \bar{F}_{E1} = F$

Choisissons les points I et l'élément de surface  $dS$  comme dans l'étude précédente alors  $dS = 2\pi \cdot R \cdot \sin \theta \cdot R \cdot d\theta$  alors

$$F = \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \cos \theta = \int_0^{\pi/2} p_i \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$\text{soit avec } p_i = k \cdot \delta_i = k \cdot \delta_M \cos \theta = p_M \cos \theta$$

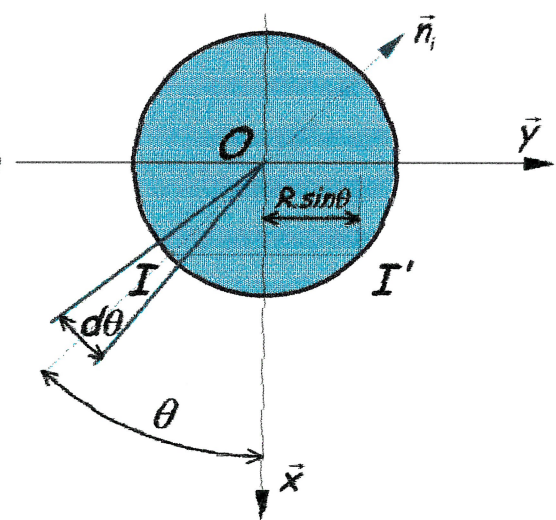
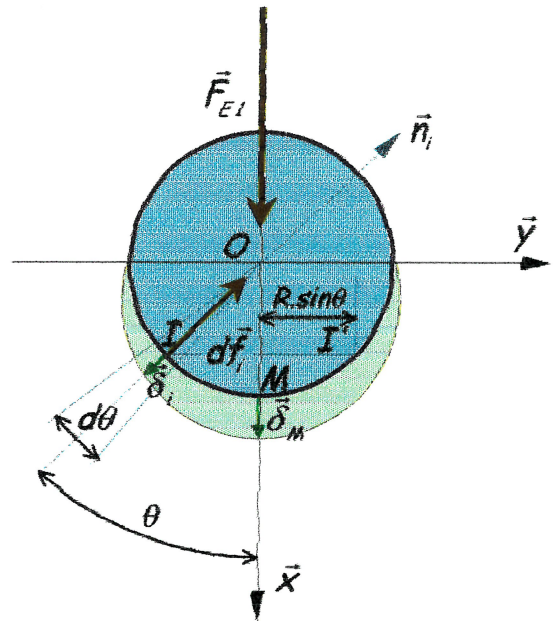
et en intégrant

$$F = 2\pi R^2 p_M \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \pi \cdot R^2 p_M$$

La pression de contact vaut dans ce cas

$$p_M = \frac{3}{2} \frac{F}{\underbrace{\pi \cdot R^2}_{\text{pression diamétrale } p_D}}$$

donc  $p_M$  est une fois et demie celle du modèle précédent.



### ❖ Modèle de répartition tenant compte du jeu.

En tout point la pression est proportionnelle à la déformation:

$$p_i = -k \cdot \delta_i \cdot \vec{n}_i$$

Il existe un jeu entre les sphères constituant la liaison:  $j=R_2-R_1$  (jeu au rayon)

Soit  $\delta_M$  le déplacement relatif des deux surfaces (colinéaire à  $\vec{F}_{E1}$ )

L'excentration vaut alors  $e=j+\delta_M$

On peut écrire:

$$\vec{O}_2\vec{O}_1 + \vec{O}_1\vec{I}_1 + \vec{I}_1\vec{I}_2 + \vec{I}_2\vec{O}_2 = \vec{0}$$

$$e \cdot \vec{x} + R_1 \cdot \vec{w} - \delta_i \cdot \vec{u} - R_2 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{avec } \vec{x} = \cos \theta \cdot \vec{u} - \sin \theta \cdot \vec{v}$$

$$\vec{w} = \cos \varphi \cdot \vec{u} + \sin \varphi \cdot \vec{v}$$

il vient donc

$$(j + \delta_M) (\cos \theta \cdot \vec{u} - \sin \theta \cdot \vec{v}) + R_1 (\cos \varphi \cdot \vec{u} + \sin \varphi \cdot \vec{v}) - \left( \delta_i + \underbrace{R_1 + R_2}_{R_2} \right) \vec{u}$$

$$\text{soit en distribuant: } \rightarrow (j + \delta_M) \cos \theta + R_1 \cos \varphi - (\delta_i + R_1 + j) = 0$$

$$\rightarrow (j + \delta_M) \sin \theta + R_1 \sin \varphi = 0$$

comme  $\varphi$  est petit  $\sin \varphi \approx \varphi$  et  $\cos \varphi = 1$  les relations deviennent:

$$\rightarrow (j + \delta_M) \cos \theta - \delta_i - j = 0 \quad (\text{relation 1})$$

$$\rightarrow (j + \delta_M) \sin \theta + R_1 \varphi = 0 \quad (\text{relation 2})$$

Aux limites pour  $\theta = \theta_0$  les déplacements  $\delta_i$  sont nuls.

La relation 1 devient  $(j + \delta_M) \cos \theta_0 - \frac{\delta_{\theta_0}}{0} - j = 0$  d'où  $\cos \theta_0 = \frac{j}{j + \delta_M}$

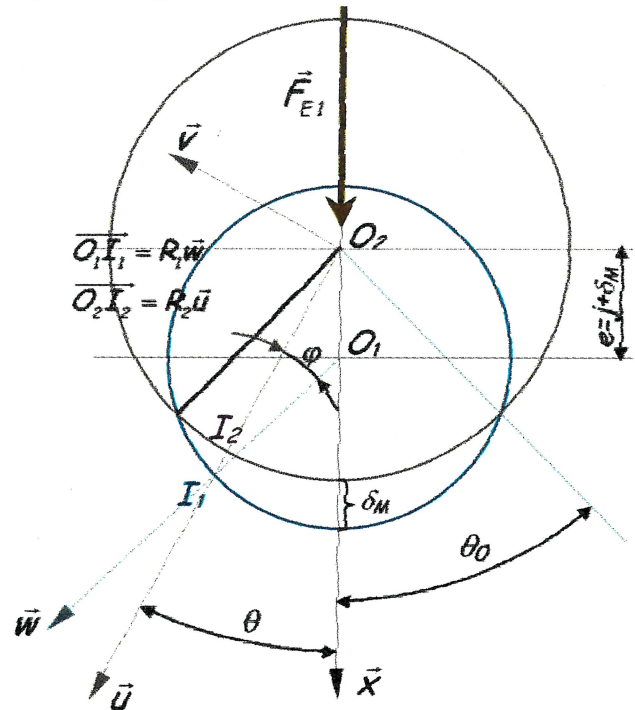
et  $\delta_M = \frac{j(1 - \cos \theta_0)}{\cos \theta_0}$  On peut alors calculer  $\delta_i$  (relation 1)

$$\delta_i = (j + \delta_M) \cos \theta - j \text{ devient } \delta_i = \left( j + \frac{j(1 - \cos \theta_0)}{\cos \theta_0} \right) \cos \theta - j \text{ soit encore}$$

$$\delta_i = j \cdot \left( \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)$$

Comme dans le cas précédent  $p_i = k \cdot \delta_i$  et  $p_M = k \cdot \delta_M$  relations qui deviennent

$p_i = k \cdot j \cdot \left( \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)$  et  $p_M = k \cdot j \cdot \left( \frac{1 - \cos \theta_0}{\cos \theta_0} \right)$  alors la pression de contact en tout





point I vaut  $p_i = p_M \left( \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \right)$  Puis choisissons les points I et l'élément de surface  $dS$  comme dans l'étude précédente alors  $dS = 2\pi.R.\sin\theta.R.d\theta$  ( $R = R_1 \approx R_2$ ) alors

$$F = \iint_{(S)} p_i . dS . \cos \theta = \iint_{(S)} p_M \left( \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \right) . 2\pi . R^2 . \sin \theta . \cos \theta . d\theta \text{ qui donne en}$$

$$\text{intégrant } F = \frac{2\pi.R^2}{1 - \cos \theta_0} \cdot p_M \left\{ \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\theta_0} + \cos \theta_0 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^{\theta_0} \right\} \text{ La valeur de la}$$

pression maximale est déduite de la relation:

$$F = \frac{2\pi.R^2}{1 - \cos \theta_0} \cdot p_M \left\{ \frac{1}{3} + \frac{\cos^3 \theta_0}{6} - \frac{\cos \theta_0}{2} \right\}$$

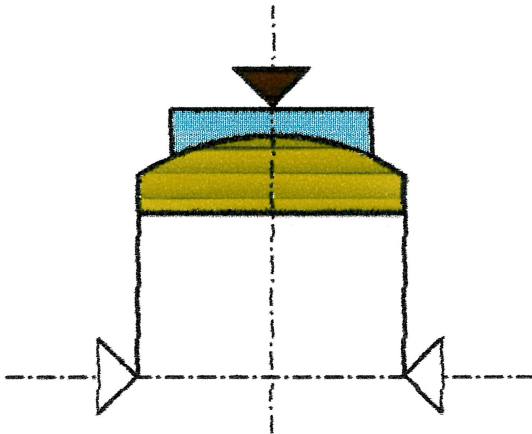
$$\text{avec } p_M = k . j \left( \frac{1 - \cos \theta_0}{\cos \theta_0} \right)$$

remarque si  $j=0$  alors  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $F = \frac{2\pi.R^2}{3} p_M$

### ❖ *Calculs pratiques*

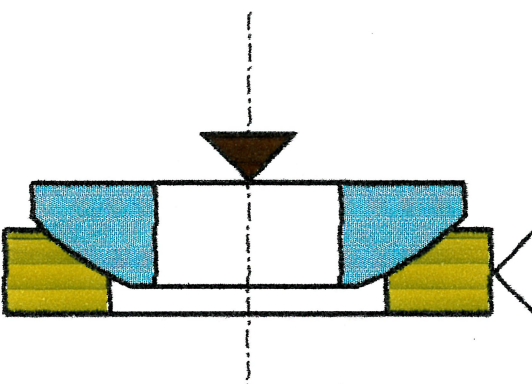
Il existe trois types de rotules lisses

- *Rotules radiales*



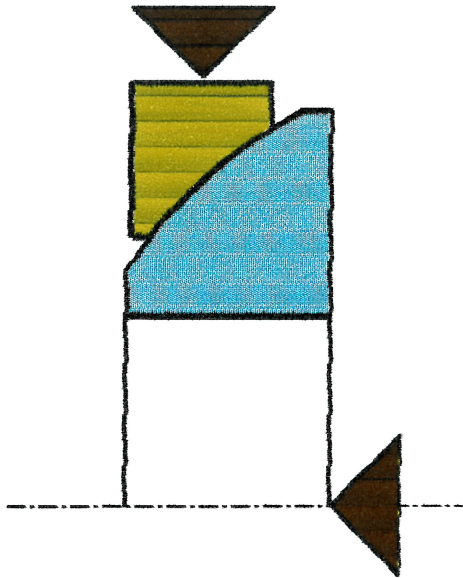
Ce composant est capable de supporter des charges radiales élevées et des charges axiales faibles.

- *Rotules axiales*



Ce composant est capable de supporter des charges radiales faibles et des charges axiales élevées.

- *Rotules obliques*



Ce composant est capable de supporter des charges radiales élevées et des charges axiales élevées.

Les matériaux sont:

- acier / acier
- acier / bronze
- acier / bronze fritté
- acier / PTFE (téflon)

Les constructeurs de ces composants définissent une charge de base "C" (axiale ou radiale) pour une durée de vie donnée dans certaines conditions d'utilisation. En fonction de l'utilisation on détermine une charge équivalente "P" (mêmes conditions que la charge de base)

Vient ensuite le calcul d'une pression spécifique  $p = K \frac{P}{C}$  avec

- $K=100\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$  acier / acier
- $K=50\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$  acier / bronze
- $K=100\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$  acier / bronze fritté
- $K=150\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$  acier / PTFE (téflon)

On détermine alors la vitesse de glissement moyenne par la relation  $\frac{pV}{\text{limite}} \leq Cte$

On détermine ensuite la durée par  $\frac{D}{\text{durée}} = \text{Coef} \cdot \frac{\text{fréquence cycles}}{pV}$

$p = K \frac{P}{C}$

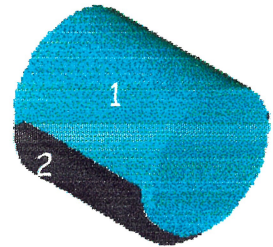
## II- Pivot glissant

Considérons une liaison pivot glissant d'axe  $O\vec{z}$ . Le torseur statique transmissible par cette liaison est  $\{T_{21}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}$ . La

pièce 1 est soumise à une sollicitation extérieure définie par

$$\{T_{E1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{E1} \\ \vec{M}_{E1} \end{Bmatrix}.$$

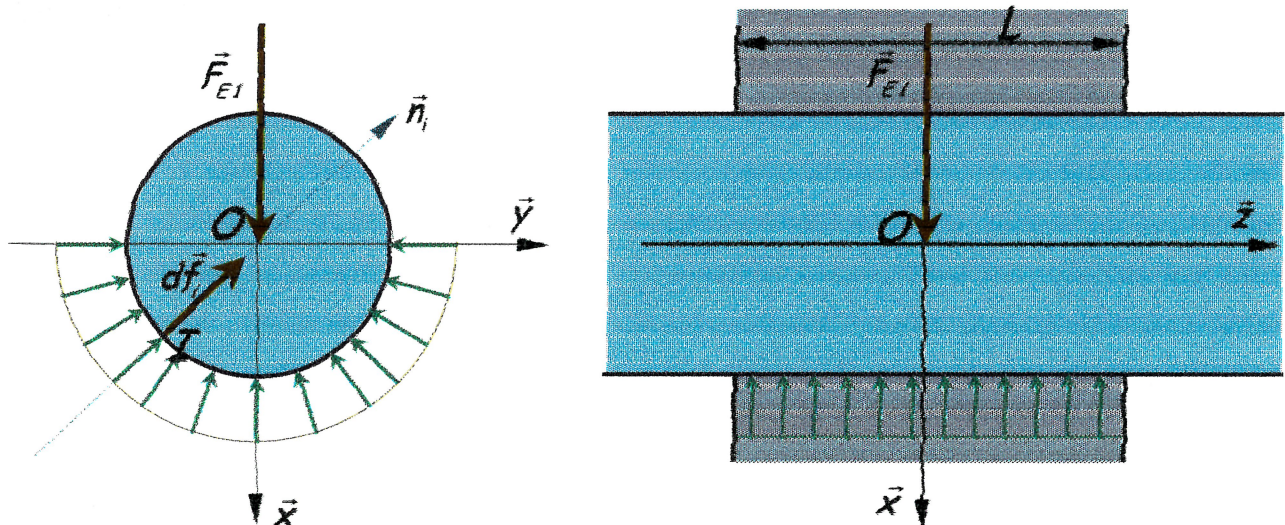
Nous allons superposer deux cas :  
 - le pivot glissant est soumis à  $\vec{F}_{E1}$   
 - le pivot glissant est soumis à  $\vec{M}_{E1}$



### ◆ Premier cas pivot glissant soumis à une résultante

#### ❖ Modèle simplifié de répartition de pression

La répartition de pression est uniforme sur le demi cylindre de contact. La liaison étant parfaite ( $f=0$ ) le chargement est donc normal aux surfaces de contact.



Pour tout point de contact I on peut écrire:  $df_i = p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i$

La résultante des forces de pression vaut donc:

$$\vec{R} = \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i$$

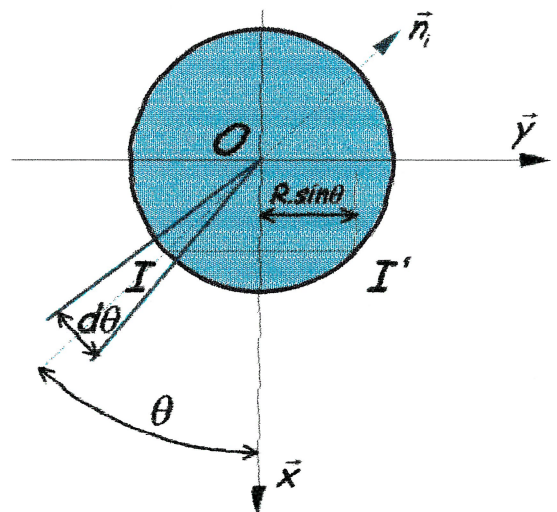
Choisissons une base orthonormée telle que  $\vec{x}$  soit colinéaire à  $\vec{F}_{E1}$

La relation de résultante selon  $\vec{x}$  s'écrit:

$$\vec{x} \cdot \iint_{(S)} df_i = \vec{x} \cdot \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i = \vec{x} \cdot \vec{F}_{E1} = F$$

Prenons les points I sur une même génératrice.

L'élément de surface  $dS$  est alors constitué de deux rectangles symétriques par rapport l'axe  $O\vec{x}$  de



largeur angulaire  $d\theta$  et de longueur  $L$  telle que  $dS = 2R.d\theta.L$ .

La relation précédente devient:

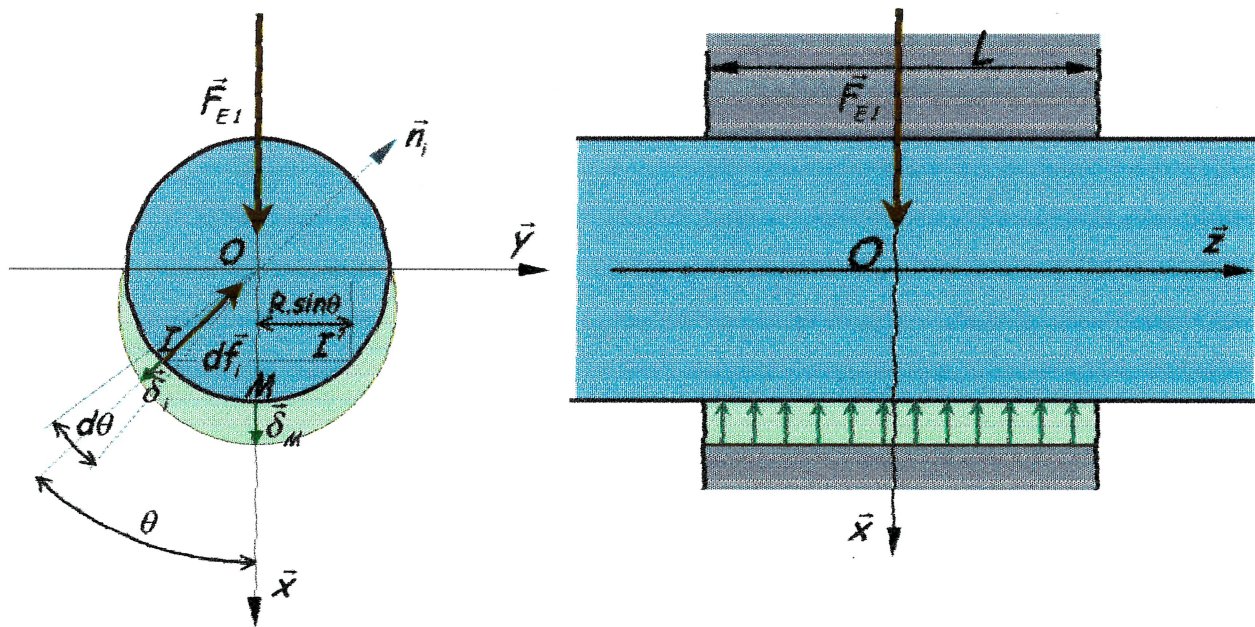
$$F = \iint_{(S)} p_i . dS . \cos \theta = \int_0^{\pi/2} p_i . 2.R.L . \cos \theta . d\theta \text{ soit en intégrant avec } p_i = p_0$$

$$F = 2RLp_0 [\sin \theta]_0^{\pi/2} = 2RLp_0$$

La pression de contact vaut dans ce cas  $p_0 = \frac{F}{\underbrace{2RL}_{A_0}}$

### ❖ *Modèle de répartition des pressions en fonction des déformations.*

En tout point la pression est proportionnelle à la déformation:  $p_i = -k . \bar{\delta}_i . \bar{n}_i$  où  $\bar{\delta}_i$  est le déplacement en I.



Le déplacement global  $\bar{\delta}$  de 1 par rapport à 2 est colinéaire à  $\bar{F}_{EI}$  (par raison de symétrie) donc en M  $\bar{\delta}_i$  est maximal et égal à  $\bar{\delta}_M$ .

Soit: - en M  $\Rightarrow \delta_M = \bar{\delta}_M . \bar{x}$

- en I  $\Rightarrow \delta_i = \bar{\delta}_M . \bar{n}_i$  avec  $\bar{\delta}_i = -\delta_i . \bar{n}_i$

D'où  $\delta_i = \delta_M \cos \theta$

La liaison étant parfaite ( $f=0$ ) le chargement est donc normal aux surfaces de contact.

Pour tout point de contact I on peut écrire:  $d\vec{f}_i = p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i$ , donc:  $\vec{R} = \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i$

Le principe fondamental de la statique appliqué à la pièce 1 conduit à:  $\{\vec{T}_{E1}\} + \{\vec{T}_{21}\} = \{0\}$

Choisissons une base orthonormée telle que  $\vec{x}$  soit colinéaire à  $\vec{F}_{E1}$

La relation de résultante selon  $\vec{x}$  s'écrit:

$$\vec{x} \cdot \iint_{(S)} d\vec{f}_i = \vec{x} \cdot \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i = \vec{x} \cdot \vec{F}_{E1} = F$$

Choisissons les points I et l'élément de surface  $dS$  comme dans l'étude précédente

Alors  $dS = 2R \cdot d\theta \cdot L$  et

$$F = \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \cos \theta = \iint_{(S)} p_i \cdot 2RL \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

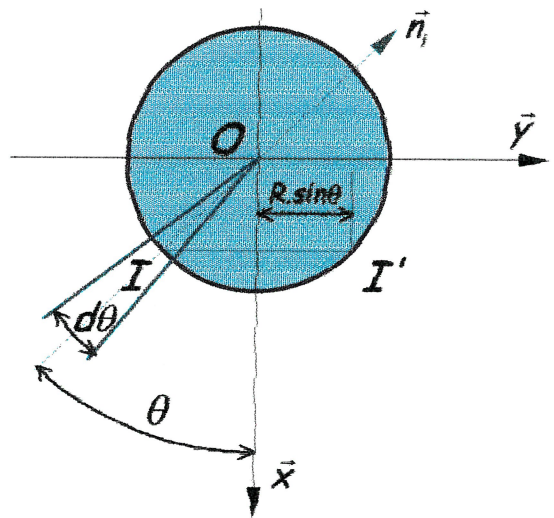
avec  $p_i = k \cdot \delta_i = k \cdot \delta_M \cos \theta = p_M \cos \theta$

$$F = \iint_{(S)} p_M \cdot 2RL \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta$$

$$\text{soit en intégrant } F = 2RLp_M \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

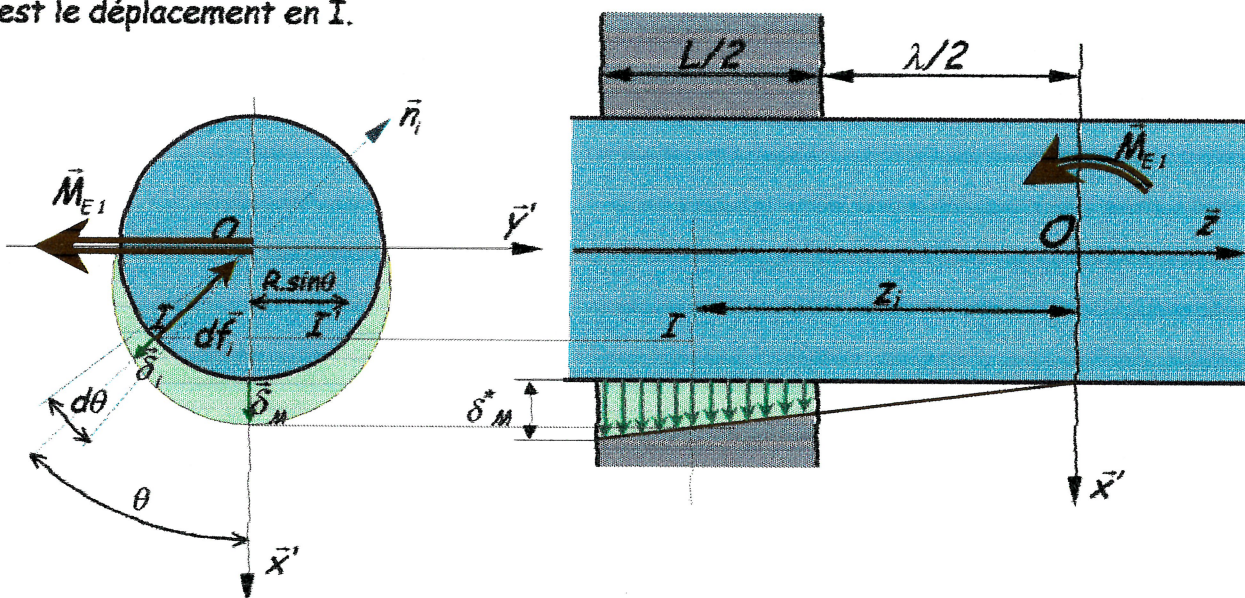
$$F = 2RLp_M \left( \left[ \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} + \left[ \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} \right) \rightarrow F = 2RLp_M \frac{\pi}{4}$$

La pression maximale de contact vaut dans ce cas  $p_M = \frac{4F}{\pi \underbrace{2RL}_{p_0}}$



#### ◆ Deuxième cas pivot glissant soumis à un moment

En tout point la pression est proportionnelle à la déformation:  $p_i = -k \cdot \bar{\delta}_i \cdot \vec{n}_i$  où  $\bar{\delta}_i$  est le déplacement en I.



Nous avons encore  $\delta_i = \delta_M \cos \theta$  et de plus  $\frac{\delta_M^*}{\delta_M} = \frac{\lambda + L}{2z_i}$  alors  $p_i = p_M^* \frac{2z_i}{L + \lambda} \cos \theta$

La liaison étant parfaite ( $f=0$ ) le chargement est donc normal aux surfaces de contact.

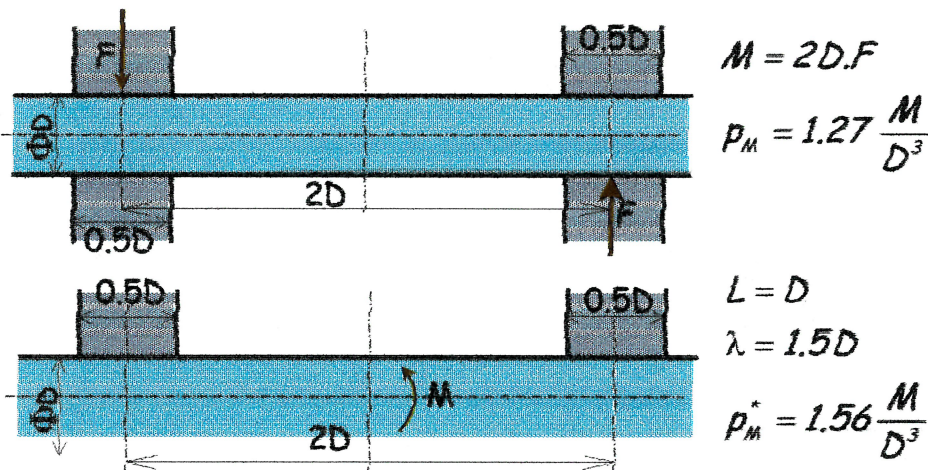
La relation de moment selon  $\vec{y}$  s'écrit:  $\vec{y} \cdot \iint_{(S)} \overline{MI} \wedge p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i = \vec{y} \cdot \vec{M}_{E1} = -M$ . Cette

relation conduit à  $M = \iint_{(S)} p_M^* \frac{2z_i^2}{L + \lambda} \cos^2 \theta \cdot dS$  soit encore en prenant comme élément

$$dS = 2R \cdot d\theta \cdot dz \rightarrow M = 2 \frac{p_M^*}{L + \lambda} 4R \int_{\lambda/2}^{\frac{L+\lambda}{2}} z_i^2 \cdot dz \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot d\theta \quad M = 2 \frac{p_M^*}{L + \lambda} 4R \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{\lambda/2}^{\frac{L+\lambda}{2}} \frac{\pi}{4}$$

D'où  $p_M^* = \frac{24}{\pi} \cdot \frac{M}{2R} \cdot \frac{L + \lambda}{(L + \lambda)^3 - \lambda^3}$  cas particulier  $\lambda=0$  alors  $p_M^* = \frac{24}{\pi} \cdot \frac{M}{2RL^2}$

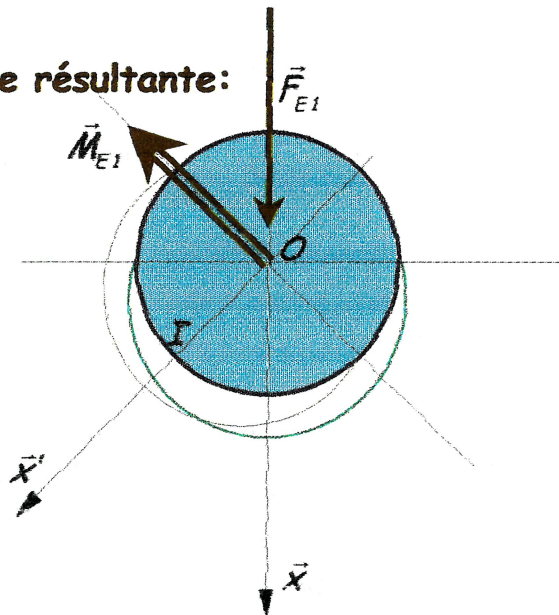
#### ◆ Comparaison entre les deux modèles



Le modèle faisant intervenir le jeu conduit à une étude analogue à celle de la rotule dans le premier cas (pivot glissant soumis à une résultante). Dans le second cas avec jeu (pivot glissant soumis à un moment)  $\theta_0$  est variable puisque  $\delta_M$  est variable: une étude numérique s'impose alors.

#### ◆ Sollicitation de moment combinée à une résultante:

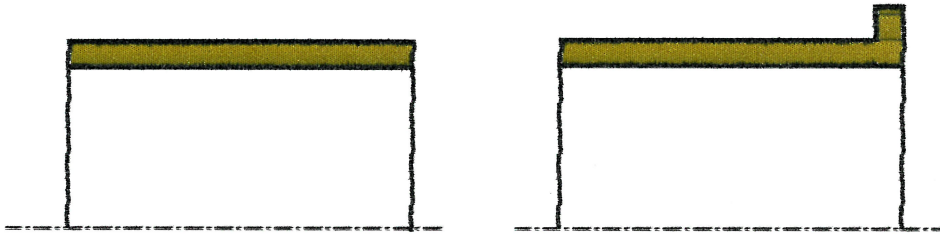
On procède par superposition des deux cas.



### ❖ Composants industriels : coussinets

Il existe deux technologies pour les coussinets :

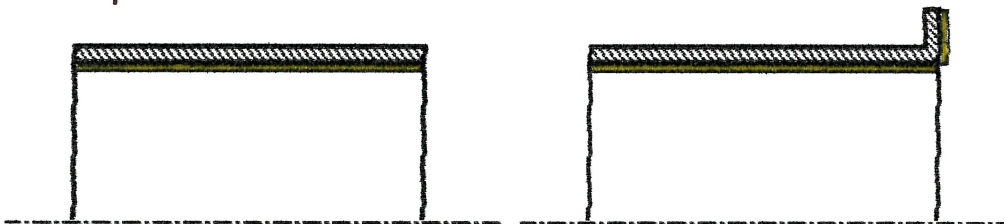
- matériaux homogènes (bronze, matériaux frittés, téflon, ...)



Coussinet cylindrique

Coussinet à collerette

- composites



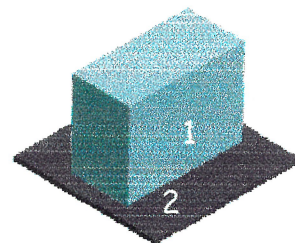
Coussinet cylindrique

Coussinet à collerette

Le principe de calcul conduit à limiter le produit (pression  $\times$  vitesse de glissement) pour une durée de vie donnée. Les constructeurs fournissent sous forme d'abaques ou sous forme de tableaux les éléments permettant, à partir du calcul d'une pression spécifique, de calculer les dimensions du composant.

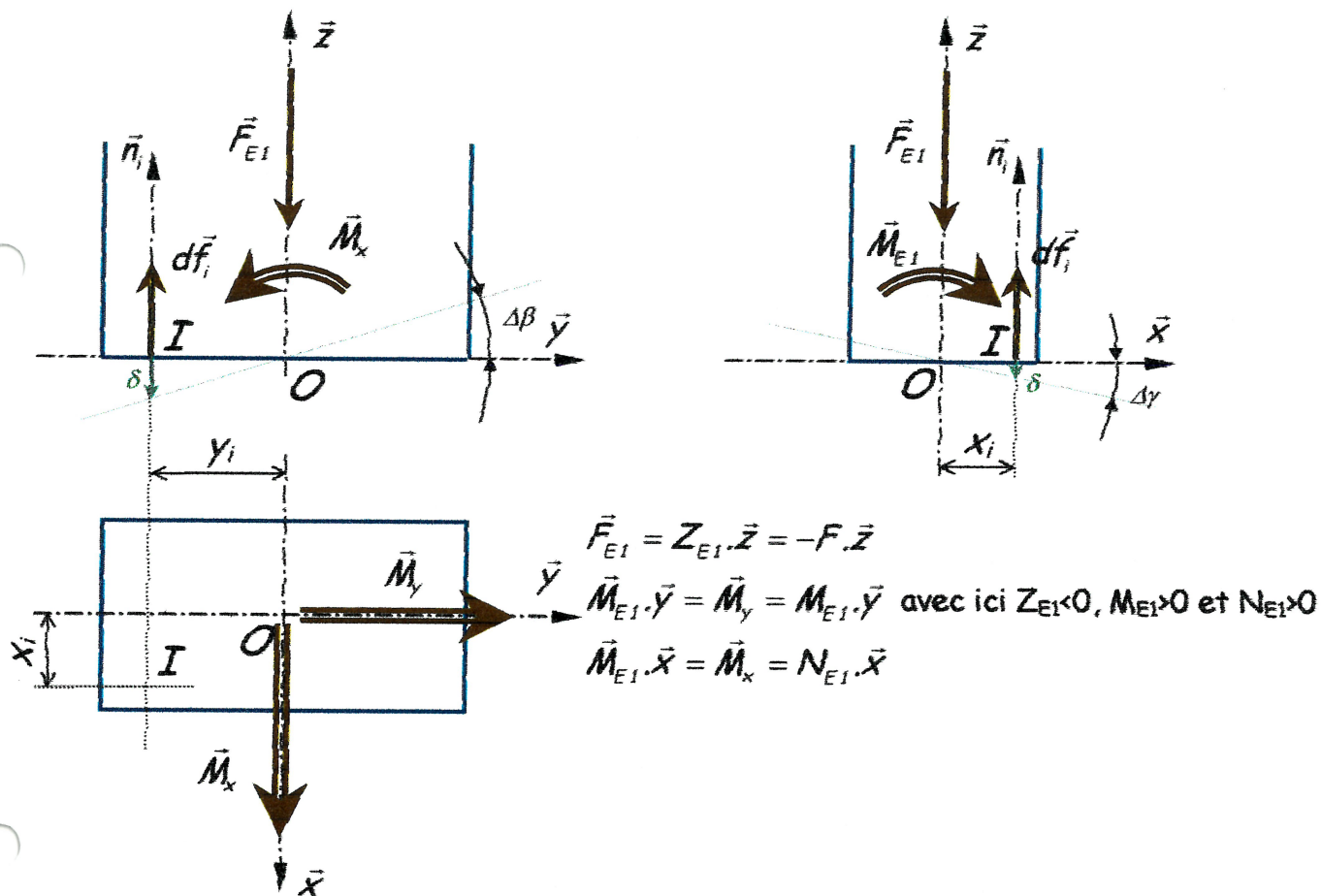
### III- Appui plan

Considérons un appui plan de normale  $O\vec{z}$ . Le torseur statique transmissible par cette liaison est  $\{\mathcal{T}_{21}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}$ . La pièce 1 est



soumise à une sollicitation extérieure définie par  $\{\mathcal{T}_{E1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{E1} \\ \vec{M}_{E1} \end{Bmatrix}$ .

❖ *Modèle de répartition des pressions en fonction des déformations*



En tout point la pression est proportionnelle à la déformation:  $p_i = -k \cdot \vec{\delta}_i \cdot \vec{n}_i$  où  $\vec{\delta}_i$  est le déplacement en I.

Procédons par superposition :

- charge  $\vec{F}_{E1} = -F \cdot \vec{z}$  on obtient  $\delta_1$  tel que  $p_1 = -k \delta_1$
- moment  $\vec{M}_x = M_x \cdot \vec{x}$  il y a rotation de  $\vec{x}$  de  $\Delta\beta$   
 $p_2 = -k \cdot \delta_2 = -k \cdot \Delta\beta \cdot y$  ( $\delta_2 < 0$  pour  $y < 0$ )
- moment  $\vec{M}_y = M_y \cdot \vec{y}$  il y a rotation de  $\vec{y}$  de  $\Delta\gamma$   
 $p_3 = -k \cdot \delta_3 = +k \cdot \Delta\gamma \cdot x$  ( $\delta_3 < 0$  pour  $x > 0$ )

Le déplacement du point I ( $x_i, y_i$ ) est  $\delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$  donc  $p_i = k(-\delta_1 - \Delta\beta \cdot y + \Delta\gamma \cdot x)$

La liaison étant parfaite ( $f=0$ ) le chargement est donc normal aux surfaces de contact.



Pour tout point de contact I on peut écrire:  $d\vec{f}_i = p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i$ .

Le principe fondamental de la statique appliqué à la pièce 1 conduit à:  $\{\mathcal{T}_{E1}\} + \{\mathcal{T}_{21}\} = \{0\}$

□ La relation de résultante selon  $\vec{z}$  s'écrit:

$$\vec{z} \cdot \iint_{(S)} d\vec{f}_i = \vec{z} \cdot \iint_{(S)} p_i \cdot dS \cdot \vec{n}_i = \vec{z} \cdot \vec{F}_{E1} = F$$

Soit encore  $\iint_{(S)} -k\delta_i dS + \iint_{(S)} -k\Delta\beta dS + \iint_{(S)} k\Delta\gamma dS = F$  avec  $\iint_{(S)} y_i dS$  moment

statique de la surface par rapport à l'axe  $O\vec{x}$  et  $\iint_{(S)} x_i dS$  moment statique de la

surface par rapport à l'axe  $O\vec{y}$ . Ces deux moments sont nuls. Il vient

$$F = \iint_{(S)} -k\delta_i dS = -k\delta_i \cdot S \text{ d'où } -k\delta_i = \frac{F}{S}$$

□ La relation de moment en O s'écrit  $\vec{M}_{E1} + \iint_{(S)} \vec{OI} \wedge d\vec{f}_i = \vec{0}$

soit encore  $\vec{M}_{E1} + \iint_{(S)} (x_i \vec{x} + y_i \vec{y}) \wedge p_i dS \cdot \vec{z} = \vec{0}$

d'où  $\vec{M}_{E1} + \iint_{(S)} -x_i \cdot p_i dS \cdot \vec{y} + \iint_{(S)} y_i \cdot p_i dS \cdot \vec{x} = \vec{0}$  qui donne deux relations

$$M_x + \iint_{(S)} -k\delta_i \cdot y_i dS + \iint_{(S)} -k\Delta\beta \cdot y_i^2 dS + \iint_{(S)} k\Delta\gamma \cdot x_i y_i dS = 0 \quad (\text{relation 1})$$

et

$$M_y + \iint_{(S)} k\delta_i \cdot x_i dS + \iint_{(S)} k\Delta\beta \cdot y_i x_i dS + \iint_{(S)} k\Delta\gamma \cdot x_i^2 dS = 0 \quad (\text{relation 2})$$

Dans ces relations les moments statiques par rapport aux axes  $O\vec{x}$  et  $O\vec{y}$  sont nuls ainsi que le moment produit  $\iint_{(S)} x_i y_i dS = 0$  (O est centre d'inertie de la surface et

les axes sont principaux).

Les termes  $\iint_{(S)} y_i^2 dS = I_{Ox}$  et  $\iint_{(S)} x_i^2 dS = I_{Oy}$  sont les moments quadratiques de la

surface d'appui par rapport aux axes  $O\vec{x}$  et  $O\vec{y}$ .

La relation 1 conduit à  $-k\Delta\beta = -\frac{M_x}{I_{Ox}}$  et la relation 2 conduit à  $k\Delta\gamma = \frac{M_y}{I_{Oy}}$

La pression en tout point I du plan est:  $p_i = \frac{F}{S} - \frac{M_x}{I_{Ox}} \cdot y_i + \frac{M_y}{I_{Oy}} \cdot x_i$

Ceci permet de vérifier le maintien de contact en tout point I:  $p_i$  toujours positif.

Cette relation permet de calculer les éléments d'assemblage dans une fixation sur un plan. En effet sous l'action des sollicitations extérieures la pression de contact  $p_i$

peut être négative en certains points de l'appui. Il faut alors ajouter un effort normale T pour rendre la pression positive en tout les point de l'appui. La relation

devient alors: 
$$p_i = \frac{F+T}{S} - \frac{M_x}{I_{Ox}} \cdot y_i + \frac{M_y}{I_{Oy}} \cdot x_i > 0$$

❖ *Composants industriels*

☐ composites



Bandes



Coussinet à collerette



$$P_i = \pm \frac{|P|}{S} = \frac{N_x}{I_{ox}} y_i + \frac{N_y}{I_{oy}} x_i$$

$$I_{ox} = \iint_S y^2 ds = L \int_0^{225} \int_0^{140} y^2 dx dy = L \int_0^{225} y^2 [x]_0^{140} dy = 280 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{225}$$

$$= 280 \times \frac{225^3}{3} = 1,06 \cdot 10^9 \text{ N/mm}^4$$

$$I_{oy} = 2 \iint_S x^2 ds = 2 \int_{-225}^{225} \int_{150}^{290} x^2 dy dx = 2 \int_{-225}^{225} x^2 dx = 450 \times \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-225}^{225}$$

$$= 140 \times \left( \frac{225^3}{3} + \frac{225^3}{3} \right) \times 2 = 212625 \cdot 10^3$$

$$P = C \times \omega$$

$$1 \text{ tr/min} = \frac{1}{60} \text{ tr/s} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow C = \frac{P}{\omega}$$

$$\Rightarrow 3000 \text{ tr/min} = \frac{3000 \times \pi}{30} = 100\pi$$

$$C = \frac{156 \cdot 10^3}{100\pi} = \frac{1560}{\pi} = 496,56 \text{ N.m}$$

$$I_{ox} = \iint_S y^2 ds = L \int_0^{225} \int_{150}^{290} y^2 dy dx = L \int_0^{225} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{150}^{290} dx = 450 \left( \frac{290^3}{3} - \frac{150^3}{3} \right)$$

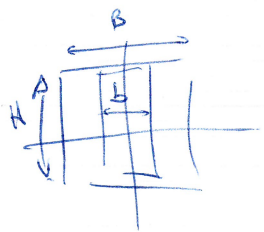
$$= 31522 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_{oy} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = (B-b) \frac{H^3}{12}$$

Soit pour 2 plaques:

$$63042 \cdot 10^3$$

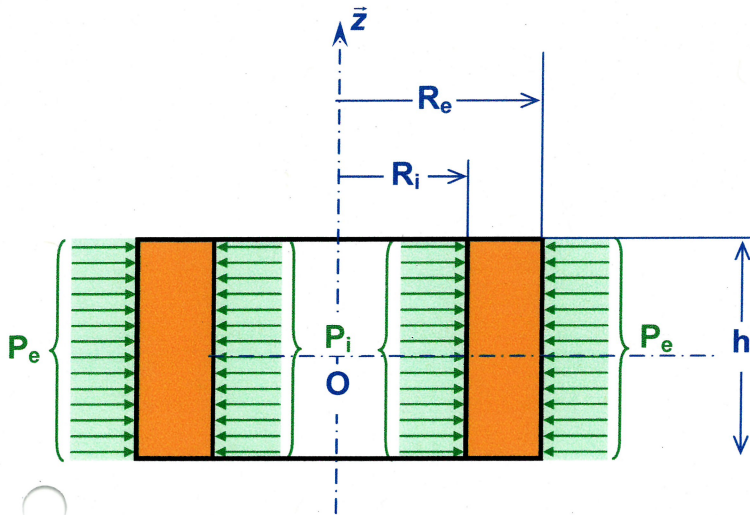
$$I_{ox} = \frac{HB^3}{12} - \frac{Hb^3}{12}$$



↳  $\frac{P+T}{S} = \frac{N_x}{I_{ox}} y_i + \frac{N_y}{I_{oy}} x_i$  par que le resultat soit > 0.

# Assemblages frettés

## Modèle de calcul



### Hypothèses:

Corps homogène

Les charges présentent une symétrie axiale

Les sections planes restent planes après déformation.

### Données:

Soit l'anneau épais ci-contre soumis à une pression intérieure  $p_i$ , pression extérieure  $p_e$  et charge axiale

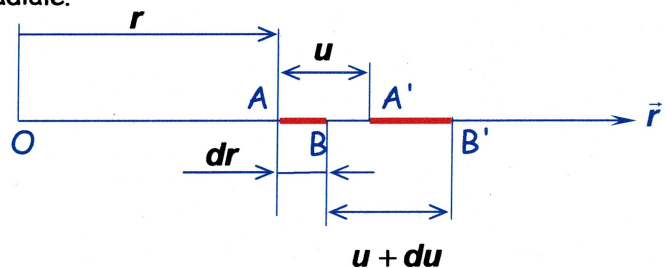
Soient deux points voisins A et B sur une direction radiale.

$u$  est le déplacement radial du point A en A'

$u + du$  est alors le déplacement radial de B en B'

$\epsilon_r$  est l'allongement relatif radial

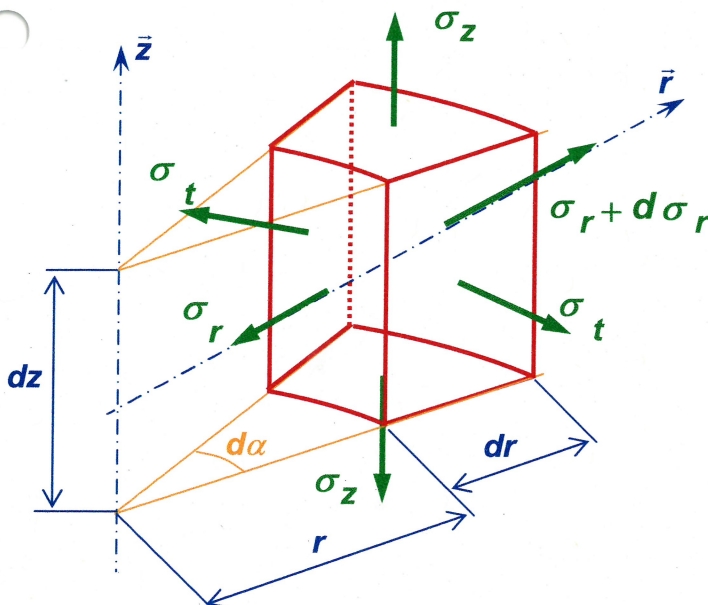
$\epsilon_t$  est l'allongement relatif circonférentiel



On peut écrire  $AB = dr$  et  $A'B' = dr + du$

$$\text{Alors } \epsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{du}{dr} \text{ et } \epsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

Isolons un élément de cylindre.



l'équilibre de l'élément en projection sur  $O\bar{r}$  s'écrit :

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\alpha.dz - \sigma_r.r.d\alpha.dz - 2\sigma_t \frac{d\alpha}{2} dz.dr = 0$$

en négligeant les termes de degré élevé nous obtenons:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0$$

La loi de Hooke généralisée nous donne:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)] \text{ et } \varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \text{ avec } \sigma_z \text{ connu (charge axiale)}$$

nous exprimerons donc  $\sigma_r$  et  $\sigma_t$  en fonction de  $(\varepsilon_r, \varepsilon_t, \sigma_z)$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \end{cases}$$

$$\text{comme } \varepsilon_t = \frac{u}{r} \text{ et } \varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \end{cases}$$

l'équation d'équilibre  $\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0$  devient  $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$  soit encore

$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ur) \right] = 0$  qui admet pour solutions  $u_1 = r$  et  $u_2 = \frac{1}{r}$  la solution générale est donc de la

forme  $u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$  ou  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes déterminées par les conditions aux limites.

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left( C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont:

Pour  $r = R_i$  alors  $\sigma_r = -p_i$  et pour  $r = R_e$  alors  $\sigma_r = -p_e$

D'où

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{1+\nu} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_z \\ C_2 = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} (p_i - p_e) \end{cases}$$

Les résultats deviennent

$$u = \frac{1-\nu}{E} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{R_i^2 R_e^2}{r} \frac{(p_i - p_e)}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_z r$$

$$\sigma \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \cdot \frac{(p_i - p_e)}{R_e^2 - R_i^2}$$

## Cas particuliers

Cylindre soumis à  $p_i = p$  et  $p_e = 0$

$$\sigma_r = \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right)$$

pour  $r = R_i$

$$\sigma_r = -p$$

$$\sigma_t = p \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \text{ soit en posant } K = \frac{D_e^2 + D_i^2}{D_e^2 - D_i^2}$$

$$\sigma_t = Kp$$

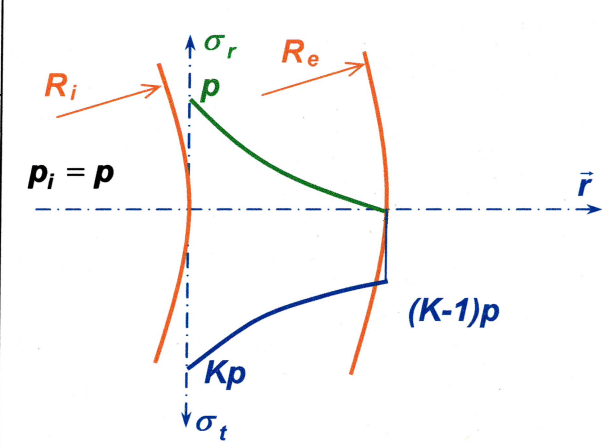
pour  $r = R_e$

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_t = 2p \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = p \left[ \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{R_i^2 - R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right]$$

$$\sigma_t = (K-1)p$$

Règle pour retrouver rapidement ces résultats:

Posons $K = \frac{\Sigma D^2}{\Delta D^2}$		
<u>Coté pression</u>	<u>coté sans pression</u> Mêmes valeurs diminuées de p	
$ \sigma_r  = p$ $\sigma_t = Kp$	$ \sigma_r  = 0$ $\sigma_t = (K-1)p$	

Déplacement au rayon

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{R_i^2 R_e^2}{r} \frac{p}{R_e^2 - R_i^2}$$

pour  $r = R_i$

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} R_i + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i} \frac{p}{R_e^2 - R_i^2} \text{ ce qui conduit à } u = \frac{pR_i}{E} \cdot (K+\nu)$$

La variation de diamètre est donc  $\delta D_i = -\frac{pD_i}{E} (K+\nu)$

pour  $r = R_e$

La variation de diamètre est donc  $\delta D_e = -\frac{pD_e}{E} (K-1)$

Une étude identique :

Cylindre soumis à  $p_e = p$  et  $p_i = 0$

Conduit aux résultats suivants

Posons $K = \frac{\Sigma D^2}{\Delta D^2}$		
<u>Coté pression</u> $ \sigma_r  = p$ $\sigma_t = -Kp$	<u>coté sans pression</u> Mêmes valeurs diminuées de p $ \sigma_r  = 0$ $\sigma_t = -(K+1)p$	

Les variations de diamètre conduisent aux résultats suivants:

$$\delta D_e = -\frac{pD_e}{E}(K-\nu) \text{ et } \delta D_i = -\frac{pD_i}{E}(K+1)$$

D'où

### Bilan

Coté pression	Coté opposé
$ \sigma_r  = p$ $\sigma_t = \pm Kp$ (signes: + si p intérieur - si p extérieur)	$ \sigma_r  = 0$ $\sigma_t = \pm Kp - p$ (signes: + si p intérieur - si p extérieur)
Variations de diamètre: $\delta D_e = \pm \frac{pD_e}{E} [K \pm (\nu \text{ ou } 1)]$	
$\nu$ coté pression	$1$ coté opposé
$\nu$ doit toujours donner une dilatation (signe résultant +), $1$ doit donner une contraction (signe -)	

Voir sur l'exemple précédent



# Mélangeur

$$\{T_{01}^B\}_{B\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{01}^A\}_{A\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{12}\}_{I\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} T_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 \\ R_{12} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{02}^D\}_{D\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}$$

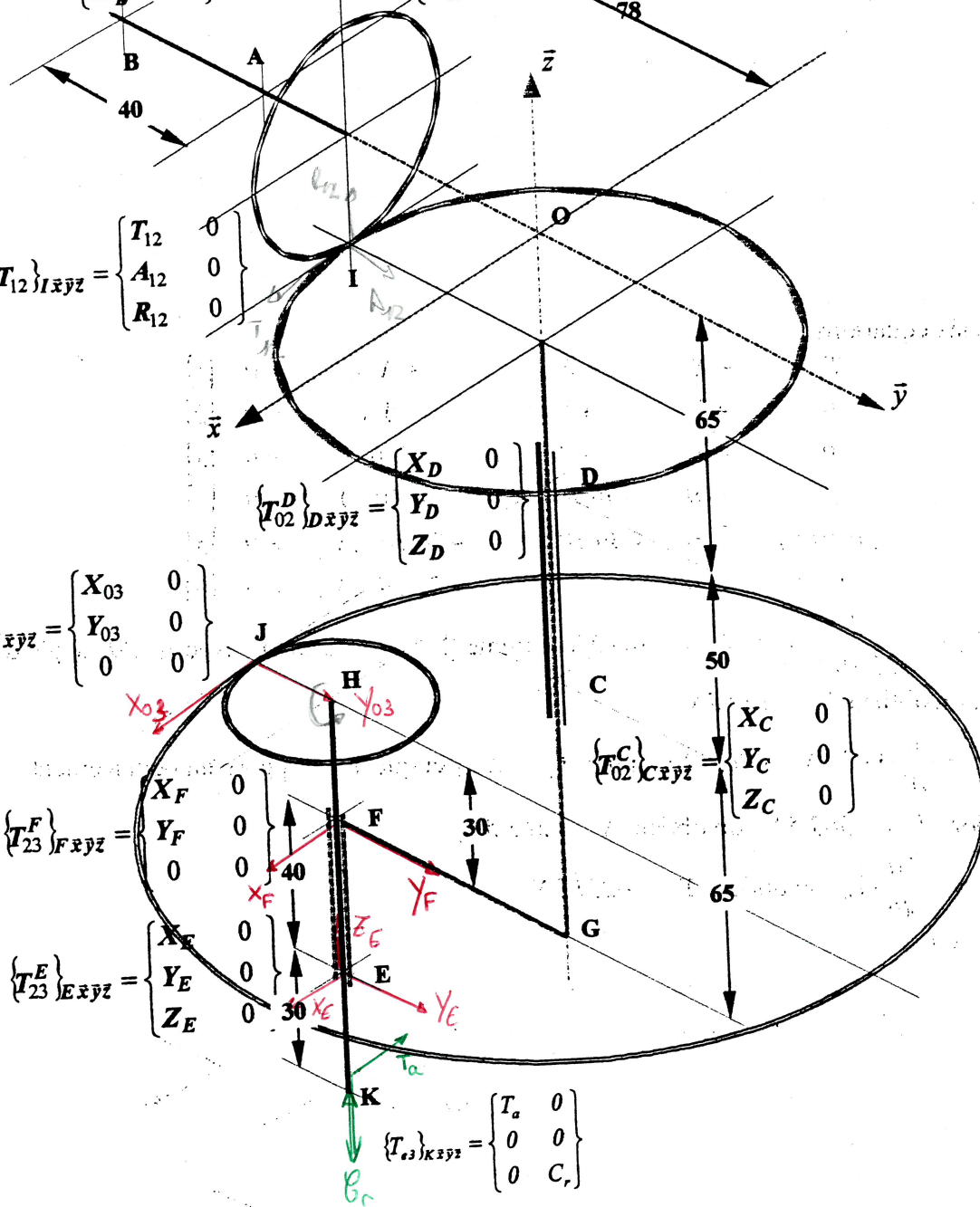
$$\{T_{03}\}_{J\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ Y_{03} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{23}^F\}_{F\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} X_F & 0 \\ Y_F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

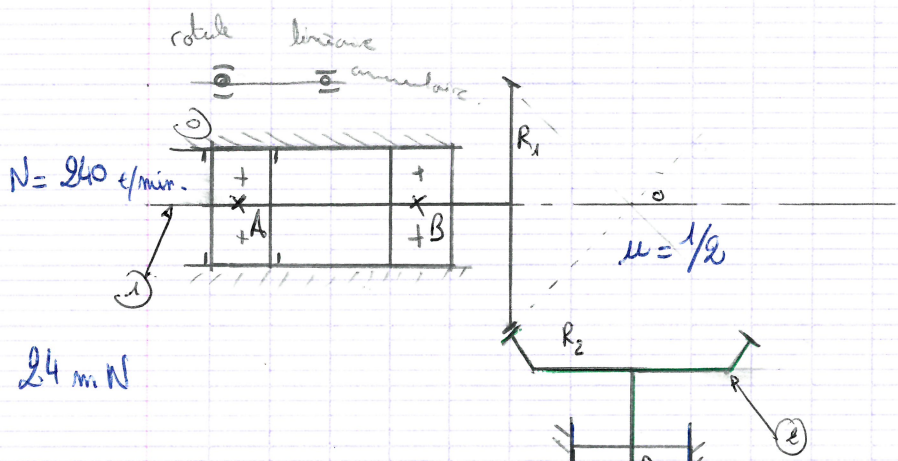
$$\{T_{23}^E\}_{E\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} X_E & 0 \\ Y_E & 0 \\ Z_E & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{02}^C\}_{C\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}$$

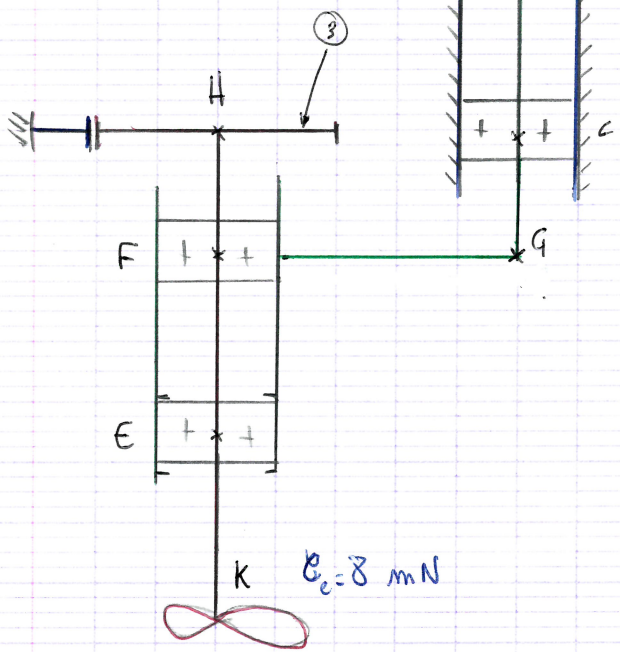
$$\{T_{23}\}_{K\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{Bmatrix} T_a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_r \end{Bmatrix}$$



9/08/08.  
 Division microm.



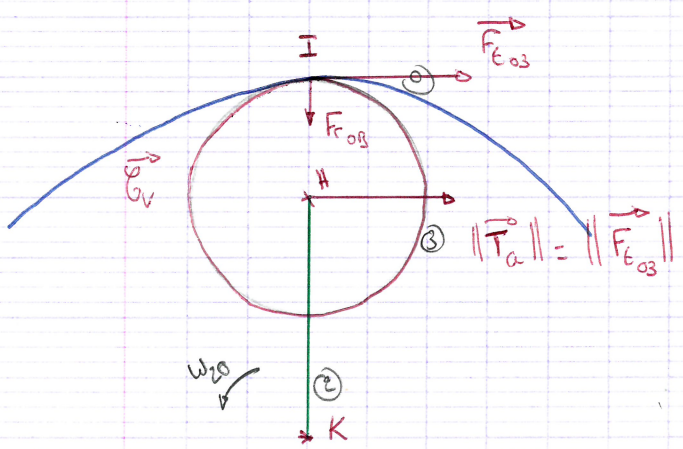
$\varnothing_m = 24 \text{ mN}$

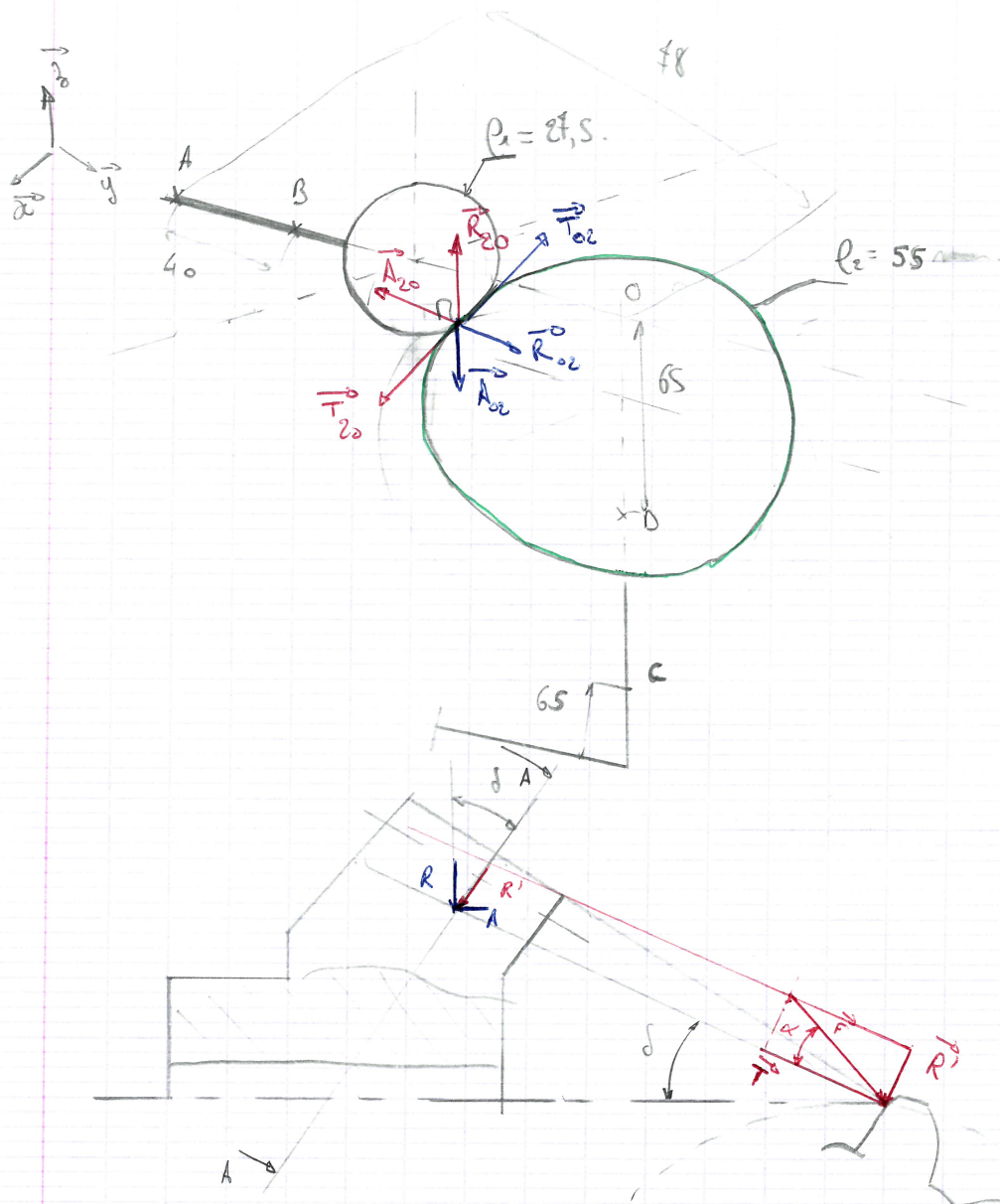


- Données:
- AB = 40
  - OA = 18
  - OD = 65
  - DC = 50
  - CG = 65
  - FH = 30
  - EF = 40
  - EK = 30

$Z_1 = 20$   
 $Z_2 = 40$   
 $Z_3 = 16$   
 $Z_4 = 64$   
 $D_{Pi} = m_i Z_i$

$m = 2,15$   
 $\alpha = 20^\circ$





$$T = \frac{2\ell}{d_p}$$

$$R' = T \tan \alpha$$

$$R = T \tan \alpha \cos \delta$$

$$A = T \tan \alpha \sin \delta$$

3/08/08.  
 diérisés méca  
 suite.

en A : rotule.

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{a1}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A \vec{x}y\vec{z}}$$

en R ponctuel

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{e1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{20} & 0 \\ -A_{20} & 0 \\ R_{20} & 0 \end{Bmatrix}_{R \vec{x}y\vec{z}}$$

en B linéaire annulaire.

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{a1}^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B \vec{x}y\vec{z}}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{e1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +B_e \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

PFS:  $\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{a1}^A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{a1}^B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{e1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_{e1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$

dems  $\vec{x}y\vec{z}$  en pt.

$$\vec{d}b_0^e = \vec{d}b_A^e + \vec{OA} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{d}b_A^e = \vec{d}b_R^e + \vec{AR} \wedge \vec{R}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 50,5 \\ 27,5 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} T \\ -A \\ R \end{matrix} = \begin{matrix} 50,5R + 27,5A \\ 27,5T \\ -50,5T \end{matrix}$$

$$\vec{d}b_A^e = \vec{d}b_B^e + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{a1}^B$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{matrix} = \begin{matrix} 40Z_B \\ 0 \\ -40X_B \end{matrix}$$

$$\textcircled{6} \Rightarrow X_B = -\frac{50,5 \times T}{40}$$

- ①  $X_A + X_B + T_{20} = 0$
- ②  $Y_A + 0 + A_{20} = 0$
- ③  $Z_A + Z_B + R_{20} = 0$
- ④  $40Z_B + 50,5R + 27,5A = 0$
- ⑤  $27,5T + B_e = 0$
- ⑥  $-40X_B - 50,5T = 0$

\* Principe fondamental de la statique: appliqué à ① dans  $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$

$$\{\mathcal{C}_{01}^A\} + \{\mathcal{C}_{01}^A\} + \{\mathcal{C}_{21}\} + \{\mathcal{C}_{e1}\} = \{0\}$$

\* PFS à ③ dans  $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$

$$\{\mathcal{C}_{03}^J\} + \{\mathcal{C}_{23}^F\} + \{\mathcal{C}_{23}^E\} + \{\mathcal{C}_{e3}^K\} = \{0\}$$

en E

\* PFS à ② dans  $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$

$$\{\mathcal{C}_{12}^I\} + \{\mathcal{C}_{02}^D\} + \{\mathcal{C}_{02}^C\} + \{\mathcal{C}_{32}^F\} + \{\mathcal{C}_{32}^E\} = \{0\}$$

\* PFS à ②+③ dans  $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$

$$\{\mathcal{C}_{12}\} + \{\mathcal{C}_{02}^D\} + \{\mathcal{C}_{02}^C\} + \{\mathcal{C}_{03}\} + \{\mathcal{C}_{e3}\} = \{0\}$$

- ①  $0 = -\frac{X_E}{T_a} + X_F + X_E + X_{03}$
- ②  $0 = 0 + Y_F + Y_E + X_{03} \tan \alpha$
- ③  $0 = 0 + 0 + X_E$
- ④  $0 = 0 + 0 - 40Y_F - 40X_{03} \tan \alpha$
- ⑤  $0 = 0 + 30T_a + 40X_F + 40X_{03}$
- ⑥  $0 = -R_r + 0$



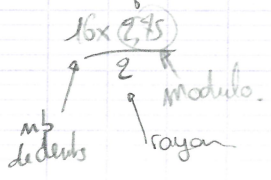
$$\frac{Y_{03}}{X_{03}} = \frac{R}{T} = \tan \alpha$$

$$\vec{M}_E^t = \vec{M}_K^t + EK \wedge \vec{R}_{e3}$$

$$= -R_r \vec{z} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -T_a \\ 0 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_E^t + \vec{M}_F^t + \vec{E}F \wedge \vec{R}_{23} = \vec{0} + [40\vec{z} \wedge (X_F \vec{x} + Y_F \vec{y})]$$

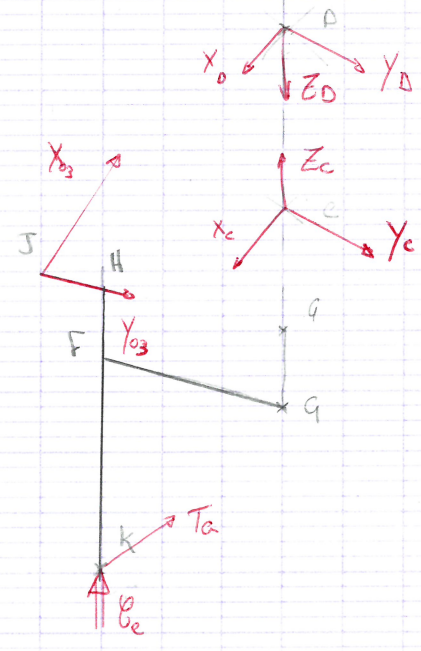
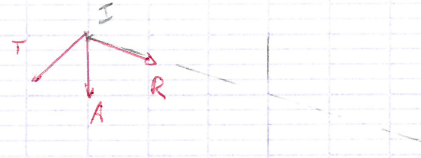
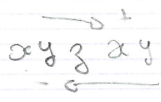
$$\vec{M}_E^t = \vec{M}_J^t + \vec{E}J \wedge \vec{R}_{03} = \vec{0} + (40\vec{z} + 2\vec{y}) \wedge (X_{03} \vec{x} + X_{03} \tan \alpha \vec{y})$$



10/03/08.  
liaison  
micca

25 apt. Reple de l'herbe.  
sitre la francos.

PFS à ②+③ ds  $\vec{x}y_3$



$$\begin{aligned} X_{03} &= -363,5 \\ Y_{03} &= 132,3 \\ X_F &= 365,5 \\ Y_F &= -231,5 \\ Z_C &= 0 \\ Y_C &= 99,2 \\ X_E &= 363,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12} &= 872,3 \\ \delta &= 63,43^\circ \\ A_{12} &= -283,8 \\ R_{12} &= 141,9 \\ X_D &= -2762,4 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} X_C &= 2617 \\ Y_D &= -190,6 \\ Y_C &= 412,2 \\ Z_C &= 283,8 \end{aligned} \right.$$

- ①  $0 = T_{12} + X_D + X_C + X_{03} - T_a$
- ②  $0 = R_{12} + Y_D + Y_C + Y_{03}$
- ③  $0 = -A_{12} + Z_D + Z_C + 0$
- ④  $0 = 55A_{12} - 87,5R_{12} + 0 + 0 + 35Y_{03}$
- ⑤  $0 = 87,5T_{12} + 50X_D + 0 + 35X_{03}$
- ⑥  $0 = 55T_{12} + 0 + 0 - 88X_{03} + C_r$

$$\vec{M}_O^t = \vec{M}_I^t + \vec{CI} \wedge \vec{R}_{12} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -35 & 1 \\ 87,5 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{12} \\ R_{12} \\ -A_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 55A_{12} - 87,5R_{12} \\ 87,5T_{12} \\ 55T_{12} \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O^t = \vec{M}_O^t + \vec{CO} \wedge \vec{R}_O = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 50 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 50X_D \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O^t = \vec{M}_O^t + \vec{IC} \wedge \vec{R}_{03} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 88 & 1 \\ 35 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_{03} \\ Y_{03} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -35Y_{03} \\ 35X_{03} \\ -88X_{03} \end{vmatrix}$$