Mécanique des fluides.

I- Statique.

1°) Déf : c'est un milieu matériel continu déformable sous l'action de forces relativement faibles.

gaz	liquide
masse volumique	
ρ faible.	ρ grand
occupe tout le volume	surface libre
compressible	$\simeq$ incompressible.

$T > T_{critique}$: plus aucune distinction entre fluide et gaz.

2°) forces de volume

$F_{int} = 0$

force de pesanteur (poids) [force d'inertie d'entrainement coriolis : repère non galiléen]

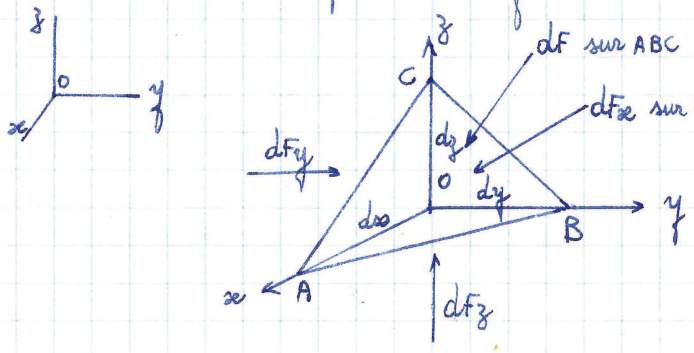
force de surface (pression)

3°) fluide parfait ou fluide réel (visqueux)

mvt relatifs sans frottement → parfait.

mvt relatifs avec frottement → visqueux.

4°) Pression en un pt d'un fluide.



$d\tau = \frac{1}{6} dx\, dy\, dz$ (3° ordre.)

$m = \rho\, d\tau$

poids $= mg = \rho g\, d\tau$

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ (en équilibre)

en proj / $\vec{x}$ $\quad dF_x = -\cos\alpha \, dF = 0$

$\alpha = (\vec{dF}, 0\vec{x})$

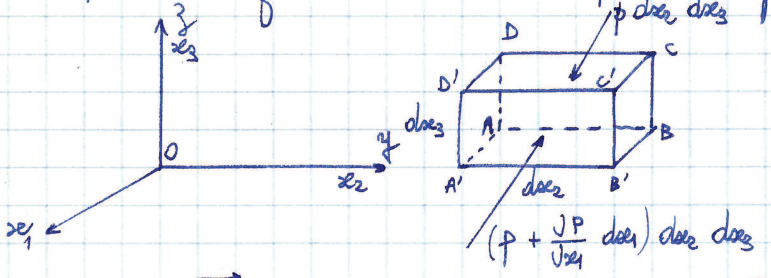
dS_x ↑ OCB $= \frac{1}{2} dy\, dz$ (2e ordre.)

$\cos\alpha = \frac{dF_x}{dF} = \frac{dS_x}{dS}$

pression $p = \frac{dF_x}{dS_x} = \frac{dF}{dS} = \frac{dF_y}{dS_y}$ pression indep^t de la surface

$dx \to 0$, $dy \to 0$, $dz \to 0$ $\quad p = \frac{dF}{dp} \to p_0$

5) Equation fond^{le} de la statique des fluides.



$\vec{F}$: force de volume par unité de masse.

$\vec{F} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}$ $\quad m = 1$ $\quad vol = 1$ $\quad \rho\vec{F} = \begin{vmatrix} \rho X_1 \\ \rho X_2 \\ \rho X_3 \end{vmatrix}$

ρ : masse / vol

$\rho\vec{F}\, dv = \begin{vmatrix} \rho X_1\, dv \\ \rho X_2\, dv \\ \rho X_3\, dv \end{vmatrix}$ $\quad dv = dx_1\, dx_2\, dx_3$

$-\frac{\partial p}{\partial x_1} \underbrace{dx_1\, dx_2\, dx_3}_{dv}$

$-\frac{\partial p}{\partial x_2} dv$

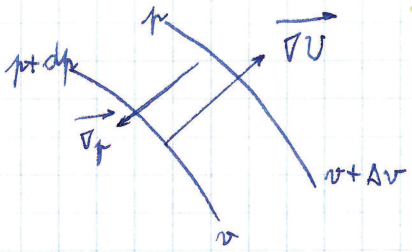
$-\frac{\partial p}{\partial x_3} dv$

$$\begin{cases} \rho X_1\, dv - \frac{\partial p}{\partial x_1} dv = 0 \\ \rho X_2\, dv - \frac{\partial p}{\partial x_2} dv = 0 \\ \rho X_3\, dv - \frac{\partial p}{\partial x_3} dv = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \rho\vec{F} - \text{grad}\, p = \vec{0}$

$\rho\vec{F} - \vec{\nabla} p = \vec{0} \longrightarrow \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \vec{0}$

force vol / m=1 + $\frac{1}{\rho}$ pression $= 0$

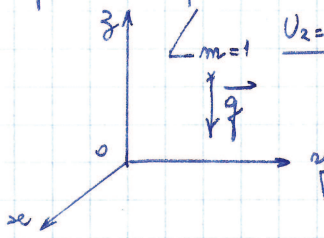


$$\vec{F} = -\text{grad}\, V = -\vec{\nabla} v$$

$$-\nabla \vec{u} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} v = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

Application en cas d'1 fluide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur



$$\vec{F} = \vec{q} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \end{vmatrix}$$

$$\rho \vec{F} - \vec{\nabla} p = \vec{0} \quad \begin{cases} (Ox) & 0 - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ (Oy) & 0 - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ (Oz) & -\rho q - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$(Oz) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho q \quad \rightarrow \quad \int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho q \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$p_2 - p_1 = -\rho q (z_2 - z_1)$$

$$p_1 + \rho q z_1 = p_2 + \rho q z_2$$

$$\widehat{p_1} = \widehat{p_2}$$

pression motrice = cte dans tt le fluide.

$$\vec{q} = -\vec{\nabla} U \qquad q = -\vec{\nabla}(qz)$$

$U = qz$

z et p ↗ en sens inverse.

soit $h = z_2 - z_1$ $\qquad p_1 - p_2 = \rho q h = \varpi h$ ← poids volumique.

$$p + \rho q z = \text{cte}$$

6) Unité de pression

MKS $\qquad p = \frac{F}{S} = \frac{N}{m^2}$ ou Pa

CGS $\quad 1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}$; $\quad 1\,N = 1\,kg \times 1\,m/s^2$

$= 10^3\,g \times 10^2\,cm/s^2 = 10^5$ dyns (CGS)

$1\,Pa = \frac{10^5\,dyns}{10^4\,cm^2} \longrightarrow 1\,bar = 10^6\,baryes = 10^5\,Pa.$

$1\,mb = 10^{-3}\,bar = 10^3\,baryes = 10^2\,Pa = 1\,h\,Pa.$

$1\,mm\,Hg\,(Torr) = h\,g\,\rho = 10^{-3}\,m \times 13{,}6 \cdot 10^3 \times 9{,}81 = 133{,}4\,Pa$

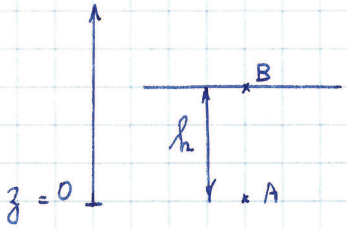
(h : 1 mm ; ρ : $13{,}6\,g/cm^3$)

$1\,mm\,Hg = 1{,}33\,mb \qquad 1\,mb \simeq \frac{3}{4}\,mm\,Hg$

p normale $= 760\,mm\,Hg = 1013\,mb$

p normale $= 10^5\,Pa = 1\,bar.$

7.) Pression absolue - effective.

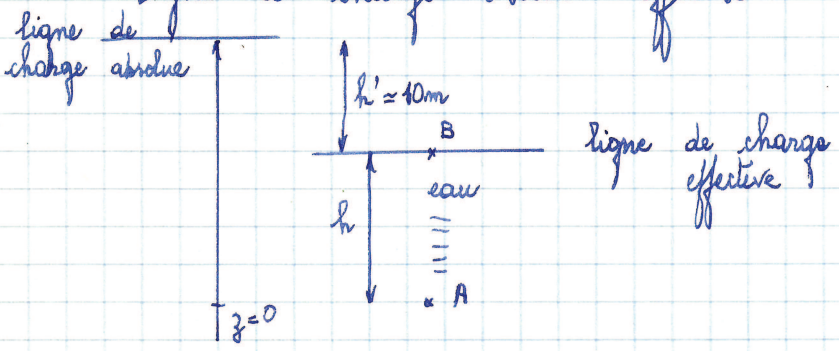


liquide $\qquad p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$

$\longrightarrow \quad p_A = p_{Atm} + \underbrace{\rho g h}$

p_A : p absolue ; $\rho g h$: p effective

Ligne de charge absolue - effective.



$\vec{F} - \vec{\nabla} = -\vec{\nabla} U \qquad \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p = \vec{0}$

($U = qz$)

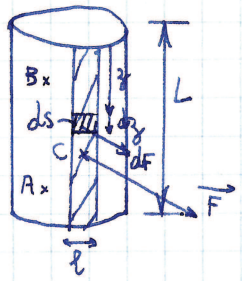
$-\rho \vec{\nabla}(qz) - \vec{\nabla} p = \vec{0}$

$-\vec{\nabla} \rho g z - \vec{\nabla} p = \vec{0} \longrightarrow \vec{\nabla}(\rho g z + p) = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad p + \rho g z = \hat{p} = c^{te}$

EX:

tonneau en bois



$$\begin{cases} g = 10\ ms^{-2} \\ L = 1m \\ l = 10cm \\ \rho = 10^3\ kg/m^3 \end{cases}$$

$$P_A - P_B = \rho g h = \varpi h$$

↓ poids volumique

$$\begin{cases} dS = l\,dz \\ dF = p\,dS = \rho g z\,dS = \rho g l z\,dz \end{cases}$$

$$F = \rho g l \int_0^L z\,dz = \rho g l \left(\frac{z^2}{2}\right)_0^L = \frac{1}{2}\rho g l L^2.$$

$$F = 500N.$$

Déterminer le pt d'aplication de $\vec{F}$ sur une douve. (pt C)

$$d M^t = z\,df \quad \text{(plan de référence en haut)}$$

↑ moment élémentaire.

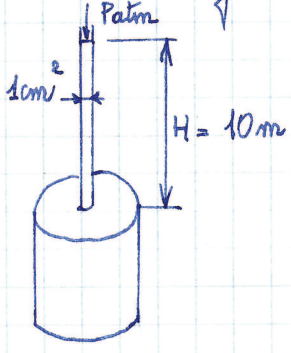
$$\int z\,df = F \times z_c$$

↑ (ordonnée centre de poussée.)

$$\Rightarrow \quad \rho g l \int_0^L z^2 dz = \frac{1}{2}\rho g l L^2 z_c$$

$$\frac{L^3}{3} = \frac{1}{2}L^2 z_c \rightarrow \quad z_c = \frac{2}{3}L = 0,667m.$$

Rajoutons un tuyau en dessus au milieu $l_g = 10m$ section $= 1cm^2$



$P_{atm} = 0$ (pression effective.)

ici z devient $z+h$

$$df' = \rho g (z+h)\,dS = \rho g (z+h) l\,dz$$

$$F' = \rho g l \int_0^L (z+h)\,dz = \rho g l \left[\frac{z^2}{2} + hz\right]_0^L$$

$$F' = \rho g l \left[\frac{L^2}{2} + hL\right] = \underbrace{\frac{1}{2}\rho g l L^2}_{=F} + \rho g l h L$$

$\Rightarrow \quad F' = 500 + 10\,000$

$F' = 10\,500\ N$

Déterminons le nouveau C' (centre de poussée)

$$d'M_t = z\,df' = \rho g l\,(z+h)\,z\,dz$$

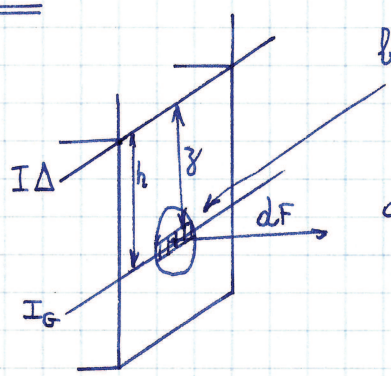
$$M_t' = \rho g l \int_0^L (z+h)\,z\,dz = \rho g l \left[\frac{L^3}{3} + \frac{hL^2}{2}\right]$$

$$= F' \times z_{c'}$$

or on connait F'

$$\Rightarrow \quad z_{c'} = \frac{\frac{L^2}{3} + \frac{hL}{2}}{\frac{L}{2} + h} = 0,507\ m$$

EX :



$$df = \underbrace{\rho g z}_{p\ \text{effective}}\, ds \Rightarrow F = \int \rho g z\, ds = \rho g \int z\, ds = z_G \cdot S\, \rho g$$

vu $\int \underbrace{\Sigma \overrightarrow{OM_i}}_{z}\, ds = \underbrace{\overrightarrow{OG}}_{z_G} \cdot S$

$$F = \rho g z_G S = \pi \rho g R^2 h$$

A mesure qu'on descend, la pression ↗ ⇒ centre de poussé plutot en dessous de G

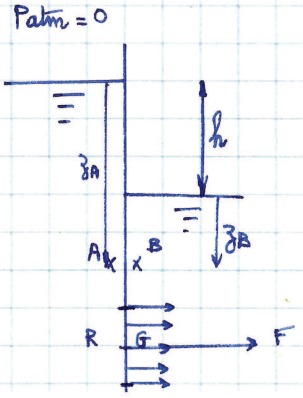
$$d M_t = z\,df = \rho g z^2\,ds \rightarrow M_t = \rho g \underbrace{\int z^2\,ds}_{I_\Delta} = F \times z_c$$

$$I_\Delta = I_G + S h^2$$

$\frac{\pi R^4}{4}$ $\quad$ πR^2

$$\rightarrow \quad z_c = h + \frac{R^2}{4h}$$

EX :



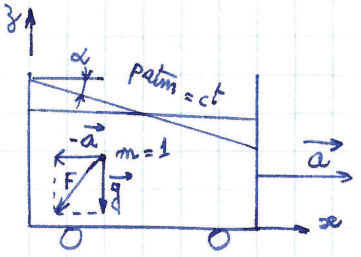
$$\begin{cases} p_A = p_{Atm} + \rho g z_A \\ p_B = p_{Atm} + \rho g z_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p_A - p_B = \rho g (z_A - z_B) = \rho g h$$

répartition uniforme → centre poussée en G.

$F = \rho g h S = \rho g h \pi R^2$

EX :



$\vec{F}$ $\begin{cases} \vec{g} \text{ (poids)} & (Oz) \\ -m\vec{a_e} = -\vec{a} \text{ (force d'inertie d'entrainement.)} & (Ox) \end{cases}$

on a : $\rho \vec{F} - \vec{\nabla} p = \vec{0}$

suivant (Oz) : $-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

suivant (Ox) : $-\rho a - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

une surface isobare correspond à $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0$

$dp = -\rho a\, dx - \rho g\, dz$

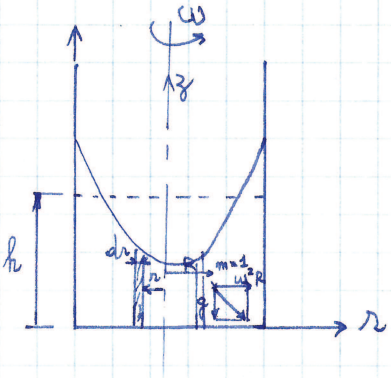
$\Rightarrow p = -\rho a x - \rho g z + cte$ or $p = cte$

$\rightarrow -\rho a x + \rho g z = cte$

$\Rightarrow z = -\frac{a}{g} x + cte$ (équation surfaces isobares.)

pente de la droite $= \frac{a}{g} = tg\,\alpha$

EX :



$\rho \vec{F} - \vec{\nabla} p = \vec{0}$

$m = 1 \quad \vec{g} + \omega^2 R =$ (F d'inertie entrainement)

proj sur (Oz) $\begin{cases} -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ /Or \quad +\rho \omega^2 R - \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{cases}$

$dp = \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial r} dr = -\rho g\, dz + \rho \omega^2 r\, dr$

$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 + cte$

$p = cte$ (isobare) $-gz + \frac{1}{2} \omega^2 R^2 = cte \rightarrow z = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2 + C.$

parabolique / Oz.

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \qquad U = gz - \frac{1}{2} \omega^2 R^2$

$U_1 = gz \qquad U_2 = -\frac{1}{2} \omega^2 R^2$

$-\rho \vec{\nabla} U - \vec{\nabla} p = \vec{0}$

$-\rho \vec{\nabla} \left(gz - \frac{1}{2} \omega^2 R^2 \right) - \vec{\nabla} p = \vec{0}$

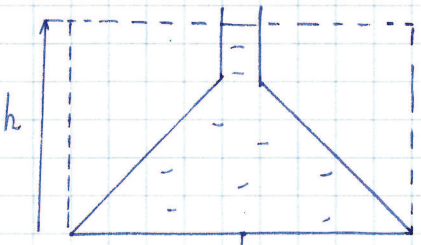
$$dv = 2\pi r dr z = 2\pi \left(\frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{g} + C\right) r dr = 2\pi\left(\frac{1}{2}\omega^2\frac{R^3}{g} + Cr\right) dr$$

$$v = \int dv = 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{2}\omega^2\frac{R^3}{g} + Cr\right) dr = 2\pi\left(\frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^4}{g4} + C\frac{R^2}{2}\right)$$

$$\rightarrow C = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

surface libre $z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{g} + h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$

EX :



vol = S x h

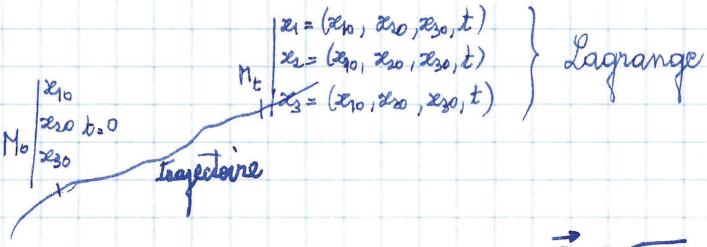
masse = ρ S h

$F = Sp = \rho g h S$ > poids du liquide contenu dans le vase.

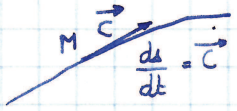
II- Cinématique.

1- Variables de Lagrange

Euler.



Soit $\vec{C}$ $\begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{cases}$ célérité (vitesse)



On appelle ligne de courant les lignes tgtes aux vecteurs vitesse.

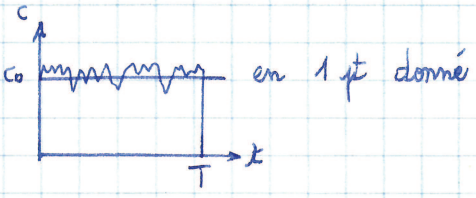
éq $\frac{dx_1}{C_1} = \frac{dx_2}{C_2} = \frac{dx_3}{C_3}$

$\vec{C} = \frac{ds}{dt}$ si on est en régime variable $\vec{C}(x_1, x_2, x_3, t)$ ligne de courant ≠ trajectoire.

2- Cas particulier

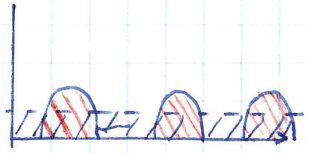
écoulement permanent ou stationnaire

$\rightarrow \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = \vec{0}$ en un pt la vitesse est cte



en 1 pt donné

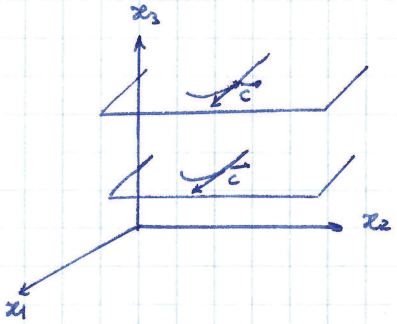
$\vec{C} = \frac{1}{T}\int_0^T C\,dt \rightarrow \bar{C}T = \int_0^T C\,dt$



aires = → continu.

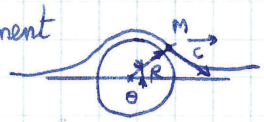
b) Ecoulement tridimensionnel

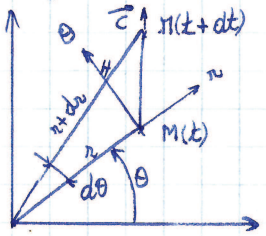
$\vec{C}(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ $\frac{\partial \vec{C}}{\partial x_3} = 0$



identique dans 2 plans //.

écoulement d'eau





MH = 2dθ

$\vec{C}(r,\theta)$ en polaire.

$ds = \overrightarrow{MM'}$

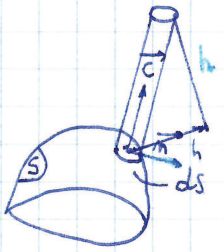
$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$\vec{C} = \frac{ds}{dt}$ $\begin{cases} Cr = \frac{dr}{dt} \\ C\theta = r\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$ $\rightarrow \frac{d\theta}{C_\theta} = \frac{1}{r}\frac{dr}{r}$

symétrie de révolution

écoulement dans un plan méridien (r,θ)

Débits. Q_v = débit volumique volume traverse S pendant $\Delta t = 1$



dv = volume du cylindre de base ds et hauteur h

$dv = ds \times h = ds \cdot \vec{C}\cdot\vec{n}\,dt$

$vol = \vec{C}\cdot\vec{n}\,dt\,ds$

pour $\Delta t = 1$ $\vec{C}\cdot\vec{n}\,ds$

$Q_v = \iint_S \vec{C}\cdot\vec{n}\,ds$ ← flux de $\vec{C}$ à travers S.

Q_m : masse à travers S $\Delta t = 1$.

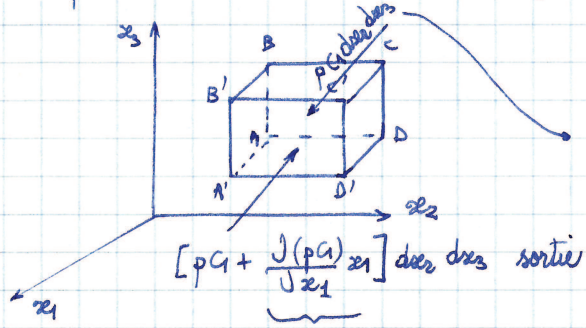
masse = vol × ρ

$$Q_m = \iint_S \rho \vec{C} \cdot \vec{n} \, ds$$

source : Puit :

4- Equation de continuité. (conservation de la masse.)

$\vec{C}$ | C_1 | C_2 | C_3



sur ABCD seul C_1 va donner un flux.

volume sur ABCD $\Delta t = 1$

variation de ρC_1 qd $x_1 \to x_1 + dx_1$

$$\frac{\partial(\rho C_1)}{dx_1} \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{dv} + \frac{\partial(\rho C_2)}{\partial x_2} dv + \frac{\partial(\rho C_3)}{\partial x_3} dv + \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = 0$$

dv vol ABCD A'B'C'D'

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ↑ variation de la masse vol pendant $\Delta t = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho C_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho C_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho C_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{C}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \| \text{ écoulement permanent } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{C}) = \vec{0}$$

si de plus fluide incompressible ($\rho = c^{te}$) $\to$ $\operatorname{div}(\vec{C}) = \vec{0}$

$$\to \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3} = 0$$

tube de courant

$q_{m1} = q_{m2}$

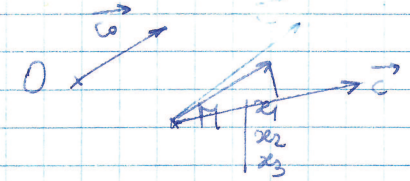
$\rho_1 S_1 C_1 = \rho_2 S_2 C_2$ si $\rho = c^{te} = \rho_1 = \rho_2$

$\to S_1 C_1 = S_2 C_2$

$\Rightarrow Q_{v1} = Q_{v2}$

débit volumique c^{te}

4°) Champs de vitesse



$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{\Delta v}$$

$$\vec{\Delta v} \begin{cases} \Delta v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} x_3 + \frac{\partial v_1}{\partial t} \Delta t \\ \Delta v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} x_3 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \Delta t \\ \Delta v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} x_3 + \frac{\partial v_3}{\partial t} \Delta t \end{cases}$$

On a t donné $\Delta t = 0$

$$\Delta \vec{v} = T \cdot \vec{OM}$$

↑ tenseur

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$T = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$ ligne i, colonne j

$$\vec{v} = \vec{v_0} + T \cdot \vec{OM}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

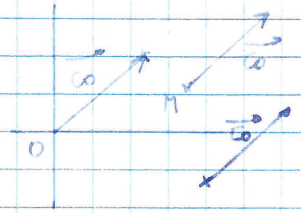
↓

$$T = T_a + T_s$$

(T_a : antisymétrique ; T_s : symétrique)

$$\rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} + T_a \cdot \vec{OM} + T_s \cdot \vec{OM}$$

a) champ de translation



b) $T_a \cdot \vec{OM}$ $\qquad T_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}$

Suivant $O\vec{x_1}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x3}} - \frac{J_{C2}}{J_{x1}}\right) x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x3}} - \frac{J_{C3}}{J_{x1}}\right) x_3$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\ \text{rot}\ \vec{C} \qquad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{J_{C3}}{J_{x2}} - \frac{J_{C2}}{J_{x3}} & \vec{x_1} \\ \frac{J_{C1}}{J_{x3}} - \frac{J_{C3}}{J_{x1}} & \vec{x_2} \\ \frac{J_{C2}}{J_{x1}} - \frac{J_{C1}}{J_{x2}} & \vec{x_3} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

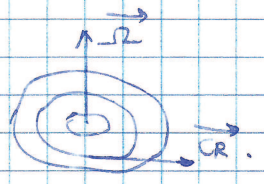
sur $O\vec{x_1}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x3}} - \frac{J_{C3}}{J_{x1}}\right) x_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{J_{C2}}{J_{x1}} - \frac{J_{C1}}{J_{x2}}\right) x_2$$

$\vec{T_a} \cdot \vec{OM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = C_R \longrightarrow$ rotation.

$$\vec{C} = \vec{C_0} + \vec{C_R} + \vec{T_S} \cdot \vec{OM}$$

↳ champ de rotation



c) $\vec{T_S} \cdot \vec{OM}$ x_1, x_2, x_3

$$T_S = \begin{pmatrix} \frac{J_{C1}}{J_{x3}} & \frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x2}} + \frac{J_{C2}}{J_{x1}}\right) & \vec{x_1} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{J_{C2}}{J_{x1}} + \frac{J_{C1}}{J_{x2}}\right) & \frac{J_{C2}}{J_{x2}} & \vec{x_2} \end{pmatrix}$$

suivant $O\vec{x_1}$. $\frac{J_{C1}}{J_{x1}}\vec{x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x2}} + \frac{J_{C2}}{J_{x1}}\right) x_2$ (1)

suivant $O\vec{x_2}$: $\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C2}}{J_{x1}} + \frac{J_{C1}}{J_{x2}}\right) x_1 + \frac{J_{C2}}{J_{x2}} x_2$ (2)

(1) $\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x1}} + \frac{J_{C2}}{J_{x2}}\right) x_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x1}} - \frac{J_{C2}}{J_{x1}}\right)\right)}_{a} x_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x1}} + \frac{J_{C2}}{J_{x1}}\right)\right)}_{b} x_2$

(2) $\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x1}} + \frac{J_{C2}}{J_{x2}}\right) x_2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x2}} + \frac{J_{C2}}{J_{x1}}\right)\right)}_{b} x_1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{J_{C1}}{J_{x1}} - \frac{J_{C2}}{J_{x2}}\right)\right)}_{a} x_2$

$\vec{C}_{div} = \frac{1}{2}\ \text{div}\ \vec{C} \cdot \vec{OM}$

champ de divergence.

si le fluide est incompressible $\vec{C}\,div = \vec{0}$ $div\,\vec{C} = \vec{0}$

$\vec{C}\,def \begin{cases} u_1 = a x_1 + b x_2 \\ u_2 = b x_1 - a x_2 \end{cases}$

lignes de courant $\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2}$ (equations ligne de courant.)

$\Rightarrow \frac{dx_1}{a x_1 + b x_2} = \frac{dx_2}{b x_1 - a x_2}$

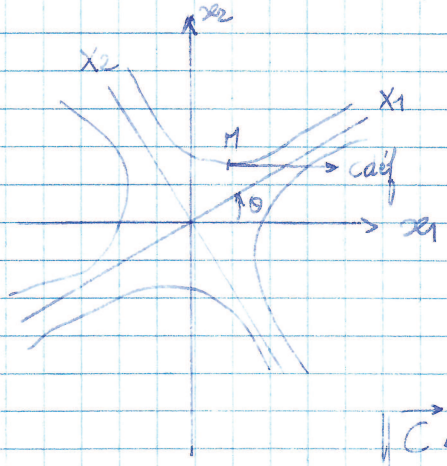
$\rightarrow b x_1 dx_1 - a x_2 dx_1 = a x_1 dx_2 + b x_2 dx_2$

$b(x_1 dx_1 - x_2 dx_2) - a(\underbrace{x_1 dx_2 - x_2 dx_2}_{d(x_1 x_2)}) = 0$

intégration

$\Rightarrow \frac{b}{2}(x_1^2 - x_2^2) - a x_1 x_2 = k^{te}$.

equation d'hyperbole équilatère.

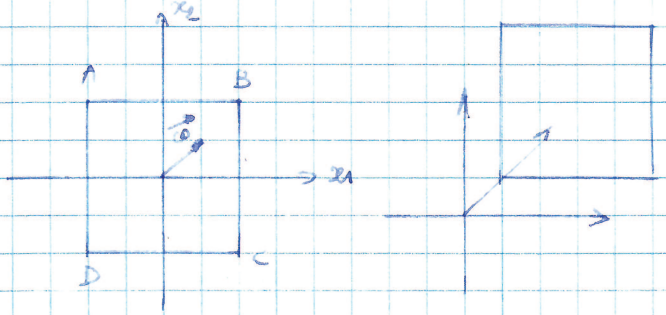


$tg\,2\theta = \frac{b}{a}$

$\begin{cases} U_1 = \frac{b}{2\sin 2\theta} X1. \\ U_2 = \frac{-b}{2\sin 2\theta} X2 \end{cases}$

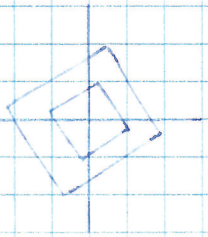
$\|\vec{C}\,déf\| = \frac{b}{2\sin 2\theta} \|\vec{OM}\|$

$\vec{C} = \vec{0} + \vec{C}\,rot + \vec{C}\,div + \vec{C}\,déf$

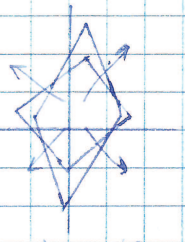


pas de déformations
qd $\vec{T_w}$ et rotations.
(translation)

divergence ↗ du carré (mais tjs carré)



champ de déformation



6') champ d'accélération.

$$\vec{C} = \vec{C_0} + \vec{C}_{rot} + \vec{C}_{div} + \vec{C}_{def}$$

$= 0$ si $\overrightarrow{rot}\,\vec{C} = \vec{0}$ écoulement irrotationnel

$$\vec{C}_{rot} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{C}.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{c}}{dt} \qquad \vec{a} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \quad \vec{C} \begin{vmatrix} C_1 = \frac{dx_1}{dt} \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} \quad a_1 = \frac{\partial C_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial C_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial C_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}$$

$$\vec{a_1} = C_1\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + C_2\frac{\partial C_1}{\partial x_3} + C_3\frac{\partial C_1}{\partial x_3} + \frac{\partial C_1}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial C_1}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_1}\right)C_3 - \left(\frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2}\right)C_1}_{\text{composante suivant } Ox_1 \text{ de } \overrightarrow{rot}\,\vec{C} \wedge \vec{C}} + \underbrace{\frac{\partial C_1}{\partial x_1}C_1 + \frac{\partial C_2}{\partial x_1}C_2 + \frac{\partial C_3}{\partial x_1}C_3}_{\frac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2\right)} + \frac{\partial C_1}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{C^2}{2}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{C} \wedge \vec{C}\right) + \vec{\nabla}\left(\frac{C^2}{2}\right) + \frac{\partial \vec{C}}{\partial t}$$

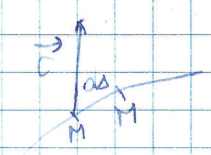
1') Si écoulement irrotationnel $(\overrightarrow{rot}\,\vec{C} = \vec{0})$

$$\vec{a} = \vec{\nabla}\left(\frac{C^2}{2}\right) + \frac{\partial \vec{C}}{\partial t}$$

2') écoulement permanent $\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\vec{a} = \vec{\nabla}\left(\frac{C^2}{2}\right)$$

I3- Ecoulement à potentiel des vitesses.



$\overrightarrow{MM'} = ds \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix}$

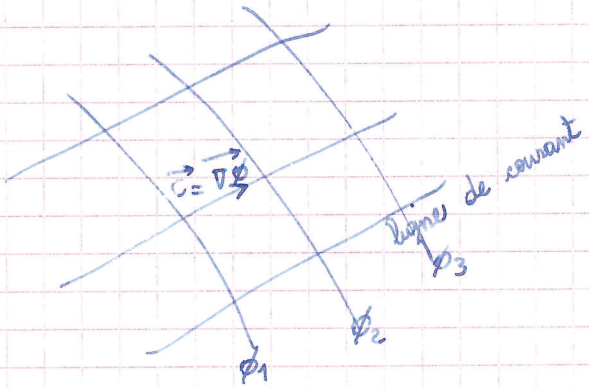
circulation de $\vec{C}$ le long de $\overrightarrow{AB}$

$$\Gamma = \int_A^B \vec{C}\cdot d\vec{s} = \int_A^B C_1\,dx_1 + C_2\,dx_2 + C_3\,dx_3$$

$\Gamma = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1$ $\quad \phi$ fct potentiel des vitesses

$c_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad c_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad c_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$

$\vec{c} = \nabla \phi \qquad \int \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3$



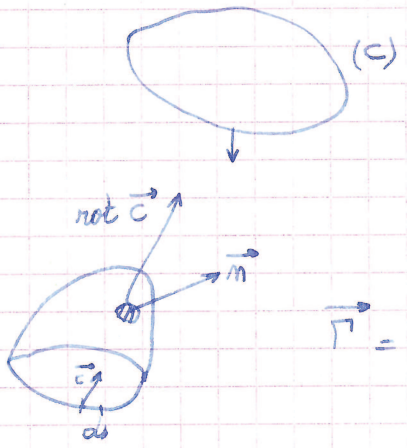
$\vec{rot}\ \vec{c} = \vec{0}$ si $\vec{c} = \vec{\nabla}\phi$

$(Ox_1) : \quad \frac{\partial c_3}{\partial x_2} - \frac{\partial c_2}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$

---

th de Stockes.

$\int_{(C)} d\phi = 0$ $\quad$ (C) courbe fermée

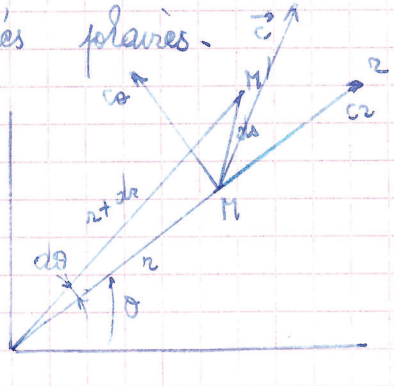


Pour un écoulement potentiel des vitesses $\Gamma = 0$ si ϕ univoque (bien déterminée.)

$\vec{\Gamma} = \oint \vec{ds} \cdot \vec{c} = \iint_S \vec{rot}\ \vec{c} \cdot \vec{n}\ ds$

$\forall$ qui s'appui sur (C)

Coordonnées polaires.



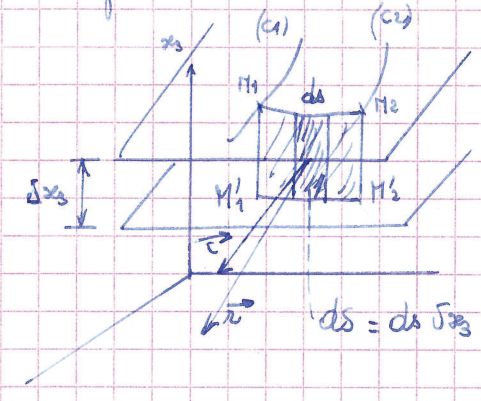
$\vec{c} \begin{vmatrix} c_r \\ c_\theta \end{vmatrix} \quad ds \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \end{vmatrix}$

$\vec{\Gamma} = \int \vec{c}\,\vec{ds} = \int c_r\,dr + r\,c_\theta\,d\theta$

$= \int \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \int d\phi$

$$C_{r2} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad ; \quad C_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

8') fonctions de courant

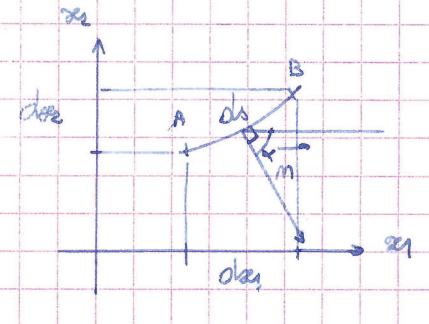


débit volumique à travers $M_1M_2M'_1M'_2$

$$dQ_v = \vec{C}\cdot\vec{n}\,ds = \vec{C}\cdot\vec{n}\,ds\,\delta x_3$$

$$Q_v = \delta x_3 \int \vec{C}\cdot\vec{n}\,ds$$

$\delta x_3 = 1$ pour simplifier



$\|\vec{n}\| = 1 \quad \vec{n}\,ds \;\Big|\; \cos\alpha\,ds = dx_2$

$\qquad\qquad\qquad\quad\; = \sin\alpha\,ds = -dx_1$

$$\sin\alpha = \frac{dx_1}{ds} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{dx_2}{ds}$$

$$\rightarrow \quad Q_v = \int C_1\,dx_2 - \int C_2\,dx_1$$

$$= \int \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\,dx_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\,dx_1 \qquad \text{(si écoul}^{t}\text{ potentiel)}$$

soit $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} = \dfrac{-\partial \phi}{\partial x_2}$

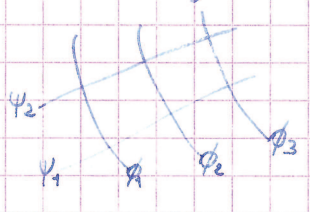
$$\rightarrow \quad Q_v = \int \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\,dx_1 = \psi_2 - \psi_1$$

ψ fct de courant

si M_1 et M_2 sont pris sur la ∞ ligne de courant le fluxe est alors nul. $Q_v = 0$ (vu $\vec{C} \parallel s$ pas de fluxe.) et $\psi_1 = \psi_2$.

Propriétés de ϕ et ψ $\qquad \Delta\phi = 0$

$\Delta\psi = 0$



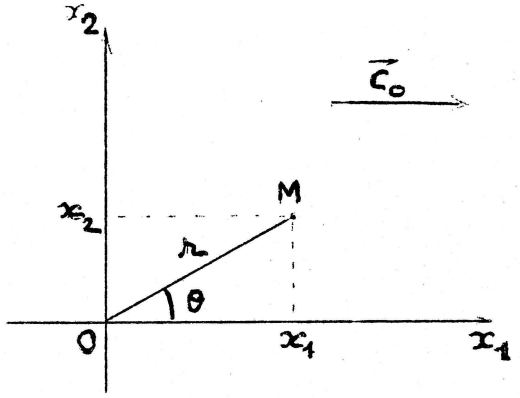
$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} \qquad \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

C I N E M A T I Q U E

U2

On considère la superposition d'un écoulement plan uniforme de vitesse $\vec{C}_0$ parallèle à l'axe Ox_1 et d'un écoulement issu d'une source ponctuelle située à l'origine O et qui correspond à un débit volumique Q_v.

1) Déterminer pour l'écoulement résultant, la fonction potentiel des vitesses Φ et la fonction courant Ψ en un point M (x_1, x_2).



2) En déduire la composante C_1 suivant Ox_1 de la vitesse $\vec{C}$. En quel point (A) de Ox_1 la vitesse est-elle nulle (point d'arrêt) ?
Quelle est la valeur particulière Ψ_A de la fonction courant qui passe par ce point A ? En déduire la fonction x_2 (θ) correspondant à Ψ_A. Vers quelles valeurs tend x_2 (θ) lorsque $\theta \to o$ et $\theta \to 2\Pi$?

Montrer que si l'on matérialise par une paroi solide la courbe correspondant à Ψ_A, les lignes de courant situées de part et d'autre de cette paroi sont celles des deux écoulements composants.

V2

Corrigé du problème relatif à la superposition d'un écoulement plan uniforme et d'un écoulement issu d'une source ponctuelle.

1). Ecoul^t plan uniforme

fonction potentiel des vitesses : $\Phi_1 = C_0 x_1$

fonction de courant : $\psi_1 = C_0 x_2$

Ecoul^t issu de O

$\Phi_2 = \frac{Q_v}{2\pi} \log r + Cte$ (on a fait $e=1$ dans la formule des cours, ce qui est toujours possible avec un choix convenable des unités).

$\psi_2 = \frac{Q_v}{2\pi} \theta + Cte$

On applique la propriété additive de Φ et $\psi \Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$

Ecoulement résultant : $\Phi = C_0 x_1 + \frac{Q_v}{2\pi} \log r + Cte = C_0 x_1 + \frac{Q_v}{2\pi} \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + Cte$

$\psi = C_0 x_2 + \frac{Q_v}{2\pi} \theta + Cte$ avec $\theta = tg^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$

2) $C_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = C_0 + \frac{Q_v}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$

Sur Ox_1 $(x_2 = 0)$

$C_1 = C_0 + \frac{Q_v}{2\pi} \frac{1}{x_1}$

pour A : $C_1 = 0$

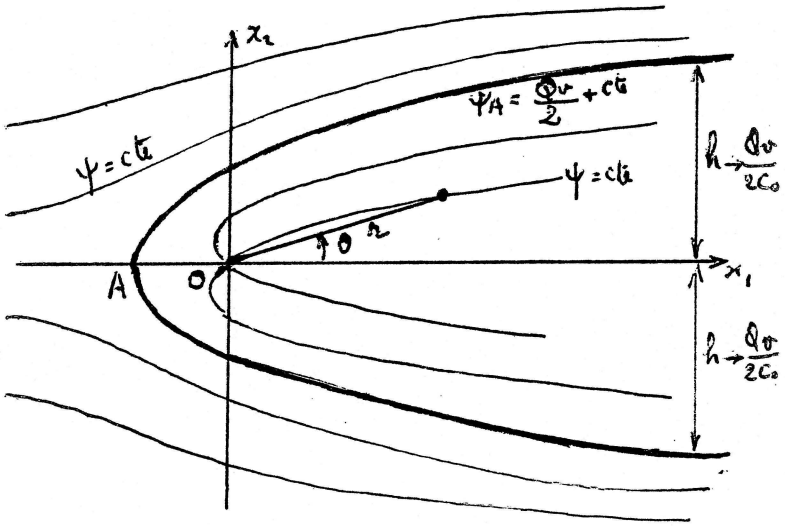
pour $x_1 = -\frac{Q_v}{2\pi C_0}$

La fonction de courant ψ_A qui passe par A est telle que

pour $\theta = \pi$, $x_2 = 0$

$\psi_A = 0 + \frac{Q_v}{2\pi} \cdot \pi + Cte$

$\psi_A = \frac{Q_v}{2} + Cte$



La courbe correspondante est telle que

$\psi = C_0 x_2 + \frac{Q_v}{2\pi} \theta + Cte = \frac{Q_v}{2} + Cte \Rightarrow x_2 = \frac{Q_v}{2\pi C_0} (\pi - \theta)$

Pour $\theta \to 0$ $\quad x_2 \to \frac{Q_v}{2C_0}$

$\theta \to 2\pi$ $\quad x_2 \to -\frac{Q_v}{2C_0}$

Si on matérialise la courbe $\psi_A = Cte$ par une paroi solide infinie, rien n'est changé dans la répartition des vitesses car aucun flux de courant ne la traverse. Les lignes de courant sont inchangées d'un côté ou de l'autre de la solide. En particulier tout le débit Q_v de la source (en O) reste à l'intérieur de la surface solide.

Les lignes de courant représentant l'écoulement autour d'un solide (dont la forme est déterminée par $x_2 = \frac{Q_v}{2\pi C_0}(\pi - \theta)$) placé dans un courant uniforme ou celui d'une source située en O à l'intérieur de la surface.

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta\phi &= 0\\ \Delta\psi &= 0\end{aligned}\right| \text{ Laplacien.}$$

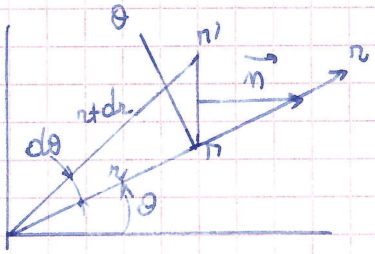
Si 2 écoulements $\phi_1\ \psi_1$ et $\phi_2\ \psi_2$

$$\left.\begin{aligned}\Delta(\phi_1+\phi_2) &= 0\\ \Delta(\psi_1+\psi_2) &= 0\end{aligned}\right| \quad \left\{\begin{aligned}\phi &= \phi_1+\phi_2\\ \psi &= \psi_1+\psi_2\end{aligned}\right.$$

Coordonnées polaires

$$Q_v = \int \vec{c}\cdot\vec{n}\, ds \quad \text{avec } \int x_3 = 1 \qquad \vec{c}\begin{cases} c_r \\ c_\theta \end{cases} \quad \vec{n}\, ds \begin{cases} r d\theta \\ -dr \end{cases}$$

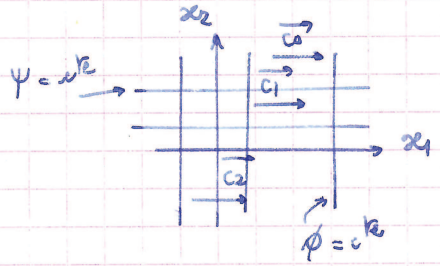
$$\begin{cases}\cos\alpha = r\dfrac{d\theta}{ds}\\ \sin\alpha = \dfrac{dr}{ds}\end{cases}$$



$$Q_v = \int c_r\, r\, d\theta - c_\theta\, dr = \int \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\, d\theta + \frac{\partial\psi}{\partial r}\, dr$$

$$\begin{cases} c_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad c_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\\ c_r = \dfrac{\partial\phi}{\partial r}\end{cases}$$

1) Cas d'un écoulement uniforme



$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \quad \leftarrow \text{(potentiel des vitesses } \vec{c} = \vec{\nabla}p\text{)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}$$

fonction de courant : ψ

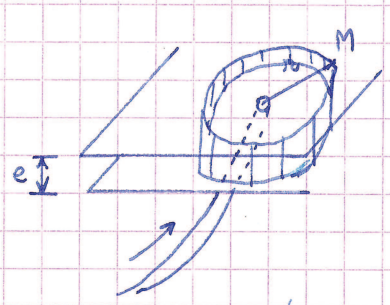
$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_1} = c_0\\ c_2 = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_2} = 0\end{cases} \Rightarrow \phi = c_0 x_1 + \phi_0 \qquad \begin{cases}\phi = cte\\ x_1 = cte\end{cases} \quad (\parallel x_2)$$

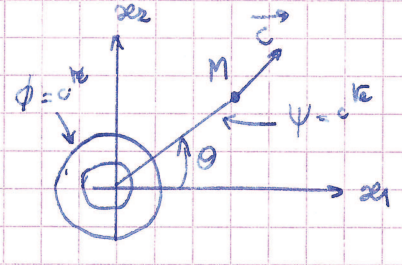
$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} = c_0\\ c_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0\end{cases} \Rightarrow \psi = c_0 x_2 + \psi_0 \qquad \begin{cases}\psi = cte\\ x_2 = cte\end{cases} \quad (\parallel x_1)$$

ϕ tjs $\perp$ ψ $\quad \vec{c_0} \parallel \vec{x_1} \rightarrow \psi \parallel \vec{x_1}$ et donc $\phi \perp \psi$ MF 13

$\rightarrow \phi \parallel x_2$

2)





(vitesse radiale)

$$\begin{cases} C_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = C = \frac{Q_v}{2\pi e}\frac{1}{r} \\ C_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Débit volumique Q_v à travers $S = 2\pi R e$

$$Q_v = S \times C = 2\pi R e C.$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{Q_v}{2\pi R e} \qquad \text{(vitesse} \downarrow \text{ qd } R \uparrow\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad C_r = \frac{Q_v}{2\pi e}\frac{1}{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r};$$

$$\phi = \frac{Q_v}{2\pi e} \log_e r + \phi_0 \qquad \phi = c^{te} \rightarrow r = c^{te}$$

(cercles concentriques.)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q_v}{2\pi e} \rightarrow \psi = \frac{Q_v}{2\pi e}\theta + \psi_0.$$

ligne courant $\psi = c^{te} \rightarrow \theta = c^{te}$

I- écoulement plan ($C_3 = 0$) bidimensionnel non permanent ($C_2 = f(t)$)

trajectoires (variable t) $\rightarrow f(x_1, x_2) = 0$?

$$\begin{cases} C_1 = a \\ C_2 = b + mt \\ C_3 = 0 \end{cases} \qquad \vec{C} = \frac{d\vec{s}}{dt} \qquad d\vec{s} \begin{cases} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{dx_1}{dt} = a \\ C_2 = \frac{dx_2}{dt} = b + mt \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \rightarrow x_3 = c^{te} \text{ (plan)} \end{cases}$$

LICENCE DE TECHNOLOGIE

U2 - MECANIQUE DES FLUIDES

CINEMATIQUE

I.- On considère l'écoulement défini par les composantes de la vitesse, dans un repère $ox_1\ x_2\ x_3$

$$c_1 = a$$
$$c_2 = b + mt$$
$$c_3 = o$$

1°) Quelle est la particularité d'un tel écoulement ? Celui-ci est-il permanent ?

2°) Déterminer l'équation des trajectoires et des lignes de courant.

3°) L'écoulement est-il irrotationnel ?

4°) Déterminer l'équation des lignes équipotentielles.

II.- On considère l'écoulement défini dans un repère $ox_1\ x_2\ x_3$ par les composantes de la vitesse :

$$c_1 = x_1 - 5x_2$$
$$c_2 = 5x_1 - x_2$$
$$c_3 = 0$$

1°) Quelles sont les caractéristiques d'un tel écoulement ? Montrer que le fluide considéré est incompressible.

2°) Déterminer le champ des accélérations

3°) Déterminer l'équation des lignes de courant.

4°) L'écoulement est-il irrotationnel ?

5°) Calculer la circulation de la vitesse le long de la ligne de courant passant par le point de coordonnées $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$

III.- Un écoulement plan est défini par les composantes de la vitesse :

$$C_1 = A_1\ x_1 + A_2\ x_2$$
$$C_2 = A'_1\ x_1 + A'_2\ x_2$$
$$C_3 = 0$$

1°) A quelle condition doivent satisfaire certains coefficients pour que le fluide soit incompressible ?

2°) A quelle autre condition doivent satisfaire d'autres coefficients pour que l'écoulement soit à potentiel des vitesses ? Montrer que l'écoulement est alors irrotationnel.

3°) Les conditions précédentes étant satisfaites, tracer dans le plan (x_1, x_2) le réseau des lignes équipotentielles et des lignes de courant en prenant les valeurs particulières : $A_1 = 1$, $A_2 = 0$.

$$\rightarrow \quad x_1 = at + x_{10}$$
$$x_2 = \frac{1}{2} m t^2 + bt + x_{20}$$
$$x_3 = 0$$

$$t = \frac{x_1 - x_{10}}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{m}{a^2} (x_1 - x_{10})^2 + \frac{b}{a} (x_1 - x_{10}) + x_{20}$$

famille de paraboles.

Lignes de courants :

$$\frac{dx_1}{c_1} = \frac{dx_2}{c_2} = \frac{dx_3}{c_3}$$

(x_1, x_2 variable, $t = 0$)

↑ bidimensionnel

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{a} = \frac{dx_2}{b + mt} \Longleftrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \underbrace{\frac{b + mt}{a}}_{0}$$

$$\Rightarrow dx_2 = \frac{b + mt}{a} dx_1$$

$$\rightarrow \quad x_2 = \frac{b + mt}{a} x_1 + 0 \quad \text{famille de droite}$$

de pente $\left(\frac{b + mt}{a}\right)$: équation ligne de courant.

Ecoulement irrotationnel ?

$$\text{rot } \vec{C} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad c_1 & \frac{\partial c_3}{\partial x_2} - \frac{\partial c_2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \quad c_2 & \text{——} \quad \frac{\partial c_1}{\partial x_3} - \frac{\partial c_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \quad c_3 & \text{——} \quad \frac{\partial c_2}{\partial x_1} - \frac{\partial c_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

vitesse indépt de x_1, x_2, x_3 → rot $\vec{C} = \vec{0}$

écoulement irrotationnel

$$\vec{C} = \vec{\nabla} \phi$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = a \\ c_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = b + mt \\ c_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_3}}_{0} dx_3$$

$$\Downarrow$$

$$d\phi = a\,dx_1 + (b + mt)\,dx_2$$

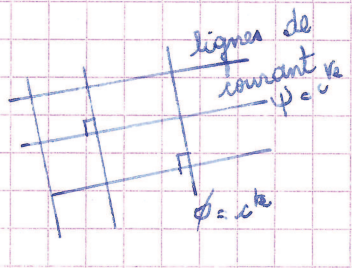
$$\Downarrow$$

$$\phi = a x_1 + (b + mt) x_2 + \phi_0$$

$x_2(b+mt) + a x_1 = c^{te}$ (lignes courant).

$x_2 = -\frac{a}{b+mt} x_1 + c^{te}$

↳ pte de pente $\frac{-a}{b+mt}$



produit des pentes

ϕ et $\psi = -1 \rightarrow \phi \perp \psi$.

II - $\begin{cases} C_1 = x_1 - 5x_2 \\ C_2 = 5x_1 - x_2 \\ C_3 = 0 \end{cases}$

écoulement plan bidimensionnel permanent (pas de temps.) $\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = 0$

incompressible en régime permanent $\Rightarrow$ $\operatorname{div} \vec{C} = \vec{0}$

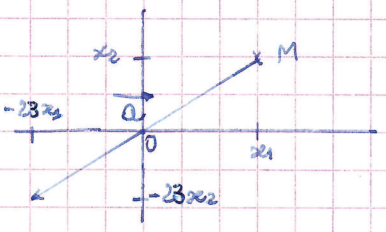
$\Leftrightarrow \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3} = 0$??

$1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow$ incompressible.

champ accélérations $\vec{a} = \frac{d\vec{C}}{dt}$ $\vec{a} \begin{cases} a_1 = \frac{dC_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - 5\frac{dx_2}{dt} = C_1 - 5C_2 \\ a_2 = \frac{dC_2}{dt} = 5\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = 5C_1 - C_2 \\ a_3 = \frac{dC_3}{dt} = 0 \end{cases}$

$\rightarrow a_1 = (x_1 - 5x_2) - 5(5x_1 - x_2) = -24x_1$

$a_2 = 5(x_1 - 5x_2) - (5x_1 - x_2) = -24x_2$



$\vec{a} = -24\,\overrightarrow{OM}$

$\|\vec{a}\| = 24\,\|\overrightarrow{OM}\|$

lignes de courant $\frac{dx_1}{C_1} = \frac{dx_2}{C_2} \rightarrow \frac{dx_1}{x_1 - 5x_2} = \frac{dx_2}{5x_1 - x_2}$

$\Rightarrow (5x_1 - x_2)\,dx_1 = (x_1 - 5x_2)\,dx_2$

$5x_1\,dx_1 - x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2 + 5x_2\,dx_2 = 0$

$\frac{5}{2}x_1^2 \quad -d(x_1x_2) \quad \frac{5}{2}x_2^2 = c^{te}$

$\Rightarrow \quad 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = c^{te}$

famille de coniques { ellipses, paraboles, hyperboles

$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 = c^{te}$

$B^2 - AC < 0$: ellipses.

$B^2 - AC = 0$: paraboles

$B^2 - AC > 0$: hyperboles.

Ici $B^2 - AC = 1 - 25 = -24 < 0$: ellipses

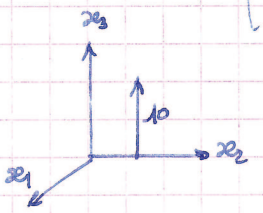
D'où familles d'ellipses.

$\text{rot } \vec{C}$ { $\frac{\partial C_3}{\partial x_2} - \frac{\partial C_2}{\partial x_3} = 0$; $\frac{\partial C_1}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2} = 5 + 5 = 10$

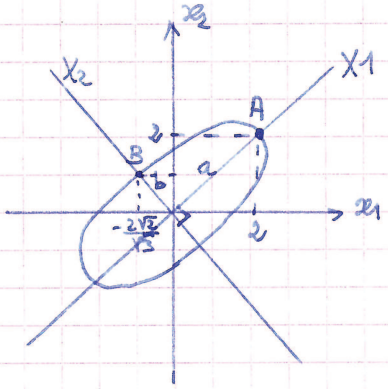
vecteur $\text{rot } \vec{C} \neq 0$

module 10

pas un écoul^t irrotationn

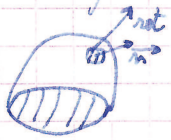


2d { x_1 changé en x_2 ; x_2 - - - - - - x_1



ellipse $\neq$ / X1

$\Gamma = \oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = \iint \text{rot } \vec{C} \cdot \vec{n}\, ds$



$\Gamma = 10 \times S$ or $S = \pi ab$

$\uparrow \text{rot } \vec{C} = c^{te}$ $\quad a^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow a = \sqrt{8}$ (pythagore

B $\in$ bissectrice $\rightarrow x_1 = -x_2$

$\rightarrow \quad 5x_1^2 + 2x_1^2 + 5x_1^2 = c^{te} \rightarrow 12x_1^2 = c^{te}$

Pour Pt A $x_1 = x_2 = 2$

$\rightarrow \quad 5 \times 4 - 2 \times 2 \times 2 + 5 \times 4 = 32 \rightarrow c^{te} = 32$

$\rightarrow \quad 12x_1^2 = 32 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$b^2 = 2 \times \left(4 \times \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$S = \pi ab = 8\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\hookrightarrow \Gamma = 10 \times 8\sqrt{\frac{2}{3}}\pi .$

EX: 3

1) fluide incompressible $\operatorname{div}\vec{C} = \vec{0}$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow A_1 + A'_2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = A_1 x_1 + A_2 x_2 \longrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = A_2 \\ C_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = A'_1 x_1 + A'_2 x_2 \longrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} = A'_1 \end{array} \right\} \Rightarrow A'_1 = A_2$$

$\operatorname{rot}\vec{C}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_3}{\partial x_2} - \frac{\partial C_2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2} = A'_1 - A_2 = 0 \end{array} \right.$ vu ec^{le} potentiel

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 = (A_1 x_1 + A_2 x_2)\, dx_1 + (A'_1 x_1 + A'_2 x_2)\, dx_2$$

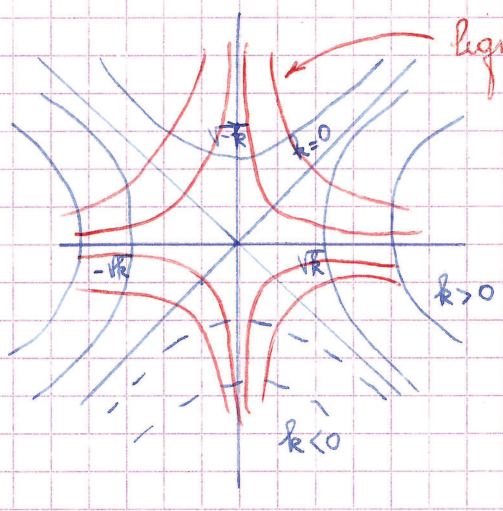
$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} A_1 x_1^2 + A_2 x_2 x_1 + A'_1 x_1 x_2 + \frac{1}{2} A'_2 x_2^2 + c^{te}$$

Avec $\left\{ \begin{array}{ll} A_1 = 1 & A_2 = 0 \\ A'_2 = -1 & A'_1 = 0 \end{array} \right.$

Donc $\phi = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} + c^{te}$.

ligne équipotentielle $\phi = c^{te} \rightarrow x_1^2 - x_2^2 = k$ (hyperbole.)

symétrie



$C_1 = x_1$ et $C_2 = -x_2$

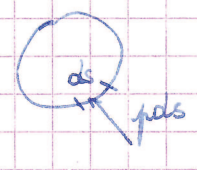
$$\frac{dx_1}{C_1} = \frac{dx_2}{C_2} \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-x_2} \rightarrow x_1\,dx_2 = -x_2\,dx_1$$

$$\rightarrow x_1\,dx_2 + x_2\,dx_1 = 0$$

$$\rightarrow d(x_1 x_2) = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = c^{te}$$ hyperboles équilatères d'axes Ox_1, Ox_2

III - Dynamique des fluides parfaits.

Pas de frottements → forces de pression ⊥ surfaces



1- Equation du mvt

$m = 1$ $\quad \Sigma \vec{F} = m\vec{a} = \vec{a}$

$$\vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla p} \qquad \text{si } \vec{f} = -\vec{\nabla U}$$

$\vec{f}$: force volume ; $\frac{1}{\rho}\vec{\nabla p}$: f pression

Alors $\vec{a} = -\vec{\nabla U} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla p} = -\nabla\left(U + \frac{p}{\rho}\right)$

Champ de pesanteur $U = gz$

$\vec{g} = -\vec{\nabla}(gz)$

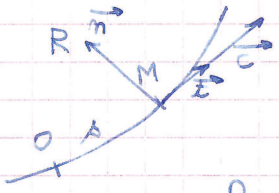
$\vec{a} = -\vec{\nabla}\left(gz + \frac{p}{\rho}\right)$ si fluide incompressible $\rho = c^{te}$.

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p}$$

fluide incompressible dans champ de pesanteur

$$m = 1 \qquad \vec{a} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p}$$

Equations intrinsèques (ou locale)



$\vec{a}$ | a_t $(\vec{n}, \vec{t})$ plan osculateur
a_n

R : rayon du cercle dont ds est un elt rayon de courbure.

$C(t,s)$ $\vec{a}$ $\begin{cases} a_t = \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial c}{\partial s} \\ a_n = \frac{c^2}{R} \end{cases}$

$\frac{\partial c}{\partial t} = 0$ régime permanent

$$\rightarrow \begin{cases} a_t = c\frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial s} \\ a_n = \frac{c^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \hat{p}}{\partial s} = -\rho c\frac{\partial c}{\partial s} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -\rho\frac{c^2}{R} \end{cases}$$

supposons $c \nearrow$ qd $s \nearrow$ $\left(\frac{\partial c}{\partial s} > 0\right)$ $\rightarrow \hat{p} \searrow$

Qd la vitesse croit sur une trajectoire la pression motrice diminue

$\frac{\partial \hat{p}}{\partial n} < 0$ pression décroit vers l'intérieur de courbure.

si rectiligne régime permanent $R \to \infty \rightarrow \hat{p} = cte$
répartition hydrostatique des pressions dans une section dte.

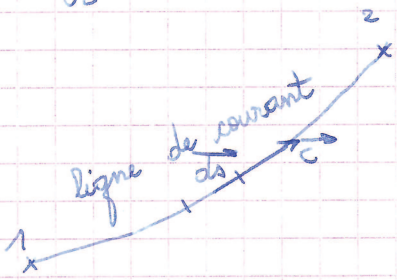
2.) th de Bernoulli.

a) Cas général de l'écoulement non permanent d'un fluide

incompressible ($\rho = cte$)

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\tilde{p} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z)$$

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + (\mathrm{rot}\,\vec{c} \wedge \vec{c}) + \vec{\nabla}\frac{c^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z)$$



$\vec{c} \parallel \vec{ds}$

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\cdot\vec{ds} + (\mathrm{rot}\,\vec{c} \wedge \vec{c})\cdot\vec{ds} + \vec{\nabla}\frac{c^2}{2}\vec{ds} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z)\cdot\vec{ds} = \vec{0}$$

incompressible $\Rightarrow$ $\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\vec{ds} + \vec{\nabla}\frac{c^2}{2}\vec{ds} + \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + g z\right)\vec{ds} = \vec{0}$

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\vec{ds} + \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + g z + \frac{c^2}{2}\right)\vec{ds} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\vec{ds} + \left[\frac{p}{\rho} + g z + \frac{c^2}{2}\right]_1^2 = 0$$

$$\frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{c_2^2}{2} - \left(\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{c_1^2}{2}\right) = 0$$

b) Ecoult permanent $\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{p}{\rho} + g z + \frac{c^2}{2} = cte$$

$$\Leftrightarrow p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho c^2 = cte$$

$$\Leftrightarrow \tilde{p} + \frac{1}{2}\rho c^2 = cte$$

cte le long d'une ligne de courant seulement.

c) ecoult irrotationnel permanent.

$$\mathrm{rot}\,\vec{c} = \vec{0} \rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + g z + \frac{c^2}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{p}{\rho} + g z + \frac{c^2}{2} = cte \quad \text{(dans tt le fluide)}$$

Cas particulier des gaz

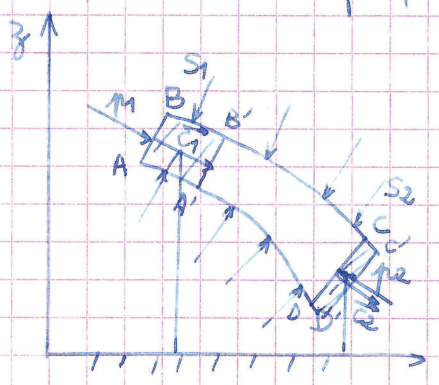
ρ petit $\rightarrow \Delta(\rho g z) \ll \Delta p$

$\rightarrow \quad p + \frac{1}{2} \rho C^2 = cte.$

On considère le gaz incompressible si $c < 0{,}3 \times$ vitesse du son.

$\simeq 100$ m/s.

c) Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli.



entre t et $t + dt$

$ABCD \rightarrow A'B'C'D'$

$p_1 S_1 C_1 dt - p_2 S_2 C_2 dt + \rightarrow$

travail des efforts de pression

on a $\begin{cases} AA' = BB' = C_1 dt \\ CC' = DD' = C_2 dt \end{cases}$

$A'B'CD$ commune

$\rightarrow + (z_1 - z_2) g \, dm = \frac{1}{2} dm (C_2^2 - C_1^2)$

poids

travail effort de pesanteur

ΔE_c

Or $dm = \rho \, dv = \rho \underbrace{C_1 dt S_1}_{dv} = \rho \underbrace{C_2 dt S_2}_{dv}$

th. de l'E_c $\Longleftrightarrow$ $p_1 - p_2 + (z_1 - z_2) \rho g = \frac{1}{2} \rho (C_2^2 - C_1^2)$

$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho C_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho C_2^2 = \ldots$

énergies potentielles de pression (J/m^3) | E_c (J/m^3) | E_p potentielle | E_c

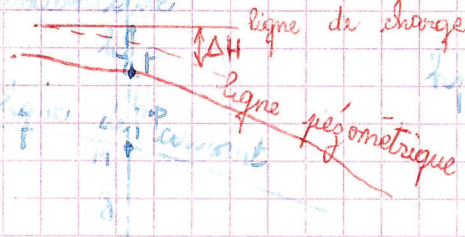
E_p de pesanteur

Énergie potentielle + énergie cinétique = E mécanique

$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{c^2}{2g} = H$ (charge de l'écoulement)

(m)

ρ : poids volumique



$\frac{p}{\rho g} + \frac{c^2}{2g} + z = H$

ligne de charge $\Rightarrow$

$\frac{p}{\tau\omega} + h_c = H$ $\quad$ ΔH : perte de charge.

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho C_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho C_2^2 + \Delta p$$

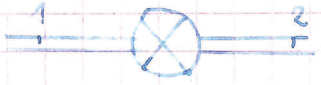
$\mathcal{E}$ amont $\quad$ $\mathcal{E}$ aval $\quad$ perte de charge J/m³ (frottement - chaleur fluide parfait).

en : par ω

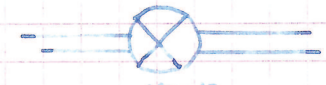
$$H_1 = H_2 + \Delta H$$

perte de charge en mètres.

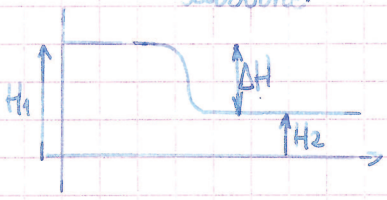
$\mathcal{E}(J/m^3) = \Delta H \tau\omega$

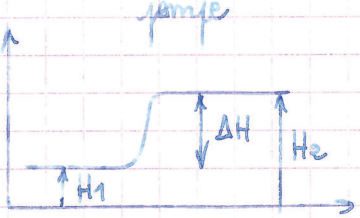


turbine.

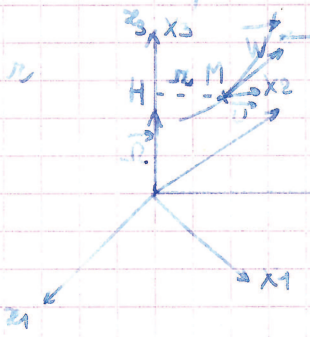


pompe





th de bernoulli dans un repère relatif (en rotation uniforme de vitesse angulaire Ω)



ligne de courant $(O\, x_1\, x_2\, x_3)$

$\begin{cases} (O\, e_1\, e_2\, e_3) & \text{galiléen} \\ (O\, x_1\, x_2\, x_3) & \text{relatif.} \end{cases}$

$\vec{W}$: vitesse relative $(O\, x_1\, x_2\, x_3)$

$\vec{u}$: " " entraînement $(u = \Omega r)$

$$\vec{C} = \vec{u} + \vec{W}$$

absolue $(O\, e_1\, e_2\, e_3)$

$$\vec{a} = \vec{a_e} + \vec{a_r} + \vec{a_c} \quad \leftarrow -2\vec{\Omega} \wedge \vec{W}$$

$$-\vec{\nabla}\left(-\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right) \qquad \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \text{rot}\,\vec{W} \wedge \vec{W} + \vec{\nabla}\frac{W^2}{2}$$

$\vec{\nabla}\left(-\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right)$ écoult permanent

$$-\vec{\nabla}\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p_r = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z)$$

$$\vec{\nabla}\left(-\frac{u^2}{2}\right) + \text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{W} + \vec{\nabla}\frac{W^2}{2} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{W} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{w^2 - u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) + \vec{rot}\,\vec{W} \wedge \vec{W} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{W} = 0$$

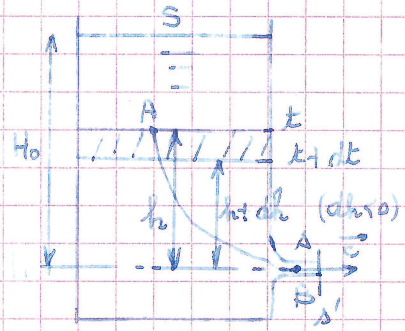
Multiplions scalairement par $\vec{ds}$.

$$\int_1^2 \vec{\nabla}\left(\frac{w^2 - u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) \cdot \vec{ds} + (\vec{rot}\,\vec{W} \wedge \vec{W}) \cdot \vec{ds} + (2\vec{\Omega} \wedge \vec{W}) \cdot \vec{ds} =$$

$$\Rightarrow \frac{w^2 - u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = c^{te} \text{ le long de la ligne de courant}$$

Applications du th de Bernoulli.

I.



On suppose le régime quasi stationnaire.

Bernoulli entre A et B

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho c_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho c_B^2$$

$p_A = p_{atm}$, $p_B = p_{atm}$

$\vec{C_A}$ est très petit devant $\vec{C_B}$: $C_A \ll C_B$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho c^2 = \rho g \underbrace{(z_A - z_B)}_{h}$$

$$\Rightarrow c^2 = 2gh \rightarrow c = \sqrt{2gh}$$

$Q_v = \frac{dv}{dt}$ = débit volumique $= -S\frac{dh}{dt}$ $\quad dh < 0$ or $Q_v > 0$ (cjs) $\rightarrow (-)$

$$Q_v = -S\frac{dh}{dt} = c\,s' = c\,ks \quad (s' = ks)$$

$$\Rightarrow -S\frac{dh}{dt} = ks\sqrt{2gh}$$

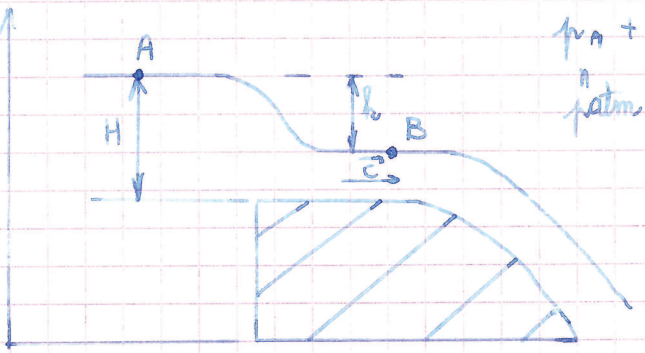
$$dt = \frac{-S}{ks}\frac{dh}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow t = \int_0^T dt = \frac{-S}{ks}\int_{h_0}^{0}\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

$$= \frac{S}{ks\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{S}{ks\sqrt{2g}}\left[2\sqrt{h}\right]_0^{h_0} = \frac{2S\sqrt{h_0}}{ks\sqrt{2g}}$$

$\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{h_0}$

T (temps d'écoulement) = ... $\frac{1}{2}$ débit initial (t = 0).

II -



$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho c_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho c_B^2$

$p_A = p_{atm}$; $\frac{1}{2}\rho c_A^2$ négligeable ; $p_B = p_{atm}$

$\Rightarrow c^2 = 2g(z_A - z_B) = 2gh$

$\Rightarrow c = \sqrt{2gh}$.

Débit volumique : $Q_v = c \cdot S = (H-h)\sqrt{2gh}$.

$S = (H-h) \times 1$? inversure ($\perp$ au plan de la fig.)

H donné

h variable

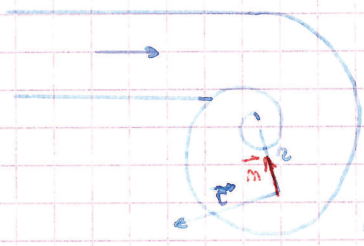
$\frac{dQ_v}{dh} = 0$ (max de Q_v) $\Rightarrow -\sqrt{2gh} + (H-h)\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}} =$

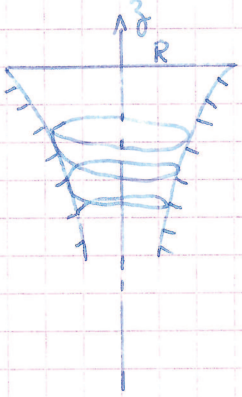
$\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}\left((H-h) - 2h\right) = 0$

$\Rightarrow H - 3h = 0 \rightarrow h = \frac{H}{3}$

$Q_{v\ max} = \frac{2}{3}H\sqrt{2g\frac{H}{3}} = \sqrt{g}\left(\frac{2}{3}H\right)^{3/2}$.

EX :





$c = \frac{K}{r}$

Bernoulli : $\hat{p} + \frac{1}{2}\rho c^2 = cte$ avec $\hat{p} = p + \rho g z$

$\Leftrightarrow \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \rho c \frac{\partial c}{\partial r} = 0$

$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = -\rho \frac{c^2}{R} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}$

$\Rightarrow \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = \frac{\rho c^2}{R} = -\rho c \frac{\partial c}{\partial r}$

$\frac{c}{r} = -\frac{\partial c}{\partial r}$

$\Rightarrow \frac{dc}{c} = -\frac{dr}{r} \rightarrow \ln c = \ln\frac{1}{r} + cte = \ln\frac{K}{r}$

$\ln r$

$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte$ sur surface libre $p = p_{atm}$

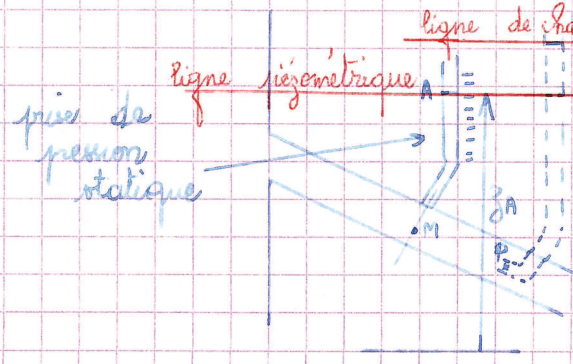
$$p_{atm} + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte$$

$$\rho g z + \frac{v^2}{2} = cte$$

$$\Rightarrow \quad \rho g z + \frac{K^2}{2r^2} = cte \qquad \begin{cases} z = 0 \\ r = R \end{cases} \Rightarrow cte = \frac{K^2}{2R^2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho g z = \frac{K^2}{2R^2} - \frac{K^2}{2r^2} \Rightarrow z = \frac{K^2}{2g}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$

Ex: Prise de pression dans une conduite.



$p = cte$ dans une section dte (ligne de courant rectilignes et //)

$p = cte$ dans fluide en équilibre.

hauteur piézométrique $\frac{p}{\omega}$

en particulier $\frac{p_1}{\omega} = \frac{p_A}{\omega} = \frac{p_{atm} + \rho g z_A}{\omega} = \frac{p_{atm}}{\omega} + z_A$

$$\frac{p_1}{\omega} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_N}{\omega} + \frac{v_N^2}{2g}$$

ligne piézo ds z_A pour les prises de P stat.

pt P : pt d'arrêt ($v_P = 0$)

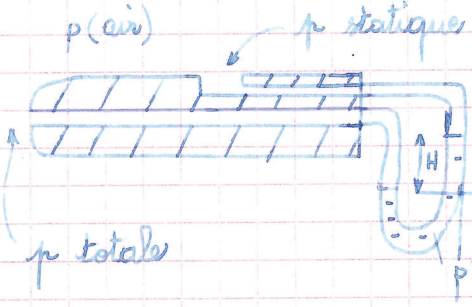
$$p_N + \frac{1}{2}\rho v_N^2 = p_P + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_P^2}_{=0}$$

$$H = \frac{p_N}{\omega} + \frac{v_N^2}{2g} = \frac{p_P}{\omega} \quad (\rho g)$$

H : hauteur de charge ; $\frac{p_N}{\omega}$: hauteur piézométrique

Tube de PITOT (sur avion).

$H\bar{\omega} = \hat{p} + \frac{1}{2}\rho c^2$



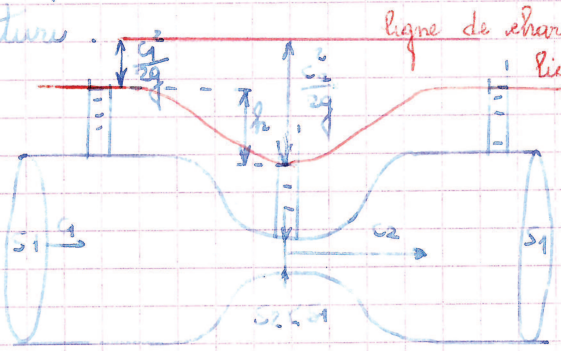
$\Delta p = \frac{1}{2}\rho c^2 = h\rho' g$

$h = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho'}\cdot\frac{c^2}{g}$

air

liquide

EX : Venturi



$S_1 c_1 = S_2 c_2$

(fluide incompressible.)

$$\hat{p}_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = \hat{p}_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 \Rightarrow \frac{\hat{p}_1}{\bar{\omega}} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{\hat{p}_2}{\bar{\omega}} + \frac{c_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{p}_1}{\bar{\omega}} - \frac{\hat{p}_2}{\bar{\omega}} = \frac{1}{2g}(c_2^2 - c_1^2)$$

$\frac{\hat{p}_1}{\bar{\omega}}$: hauteur piézométrique en 1

$\frac{\hat{p}_2}{\bar{\omega}} = h$ piézo en 2

$c_2 > c_1$

Or on a $c_2^2 - c_1^2 = 2gh$

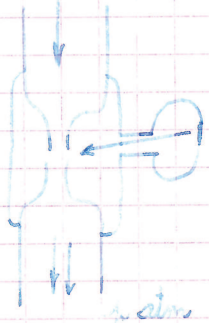
$$c_2^2 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 c_2^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow c_2^2\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) = 2gh$$

$$Q_v = S_1 c_1 = S_2 c_2 = S_2 \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \rightarrow \text{délimitée}$$

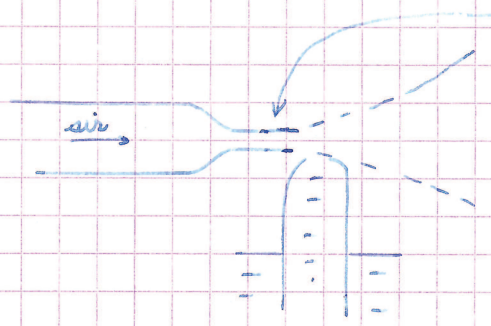
$Q_v = f(\sqrt{h})$

EX : trompe à eau



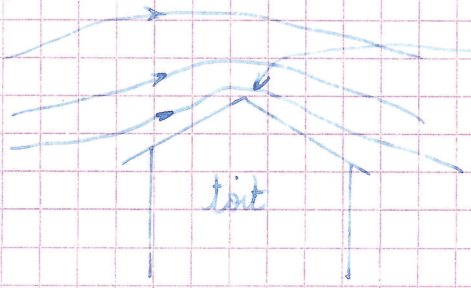
p mini = p max de vide atteinte à l'eau = 1 à 2 cm de Hg

EX



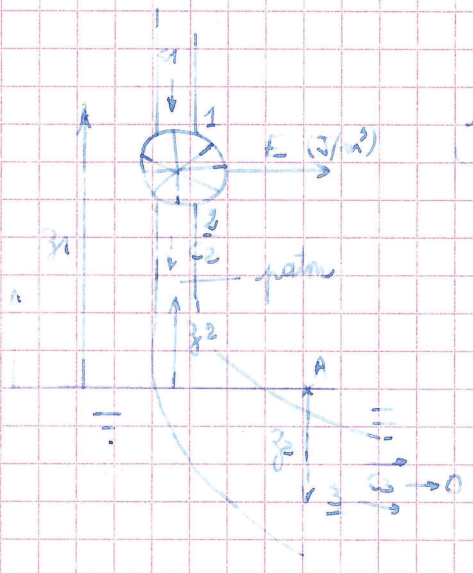
section mini
($p < p_{atm}$)
⇓
(aspiration) → eau monte et pulvérisée.

EX:



zone de dépression (resserrement des lignes de courant)
dépression → aspiration.

EX: diffuseur de turbine



$$\underbrace{p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2}_{\text{énergie totale en amont turbine}} = \underbrace{p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}_{\text{en aval}} + \underbrace{E}_{\text{fourni à la turbine}}$$

répartition hydrostatique de pression. ($\Rightarrow p_2 = p_{atm}$)

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + E' = p_{atm} + E'$$

$$p_2 = p_A = p_{atm} + \rho g z_A$$

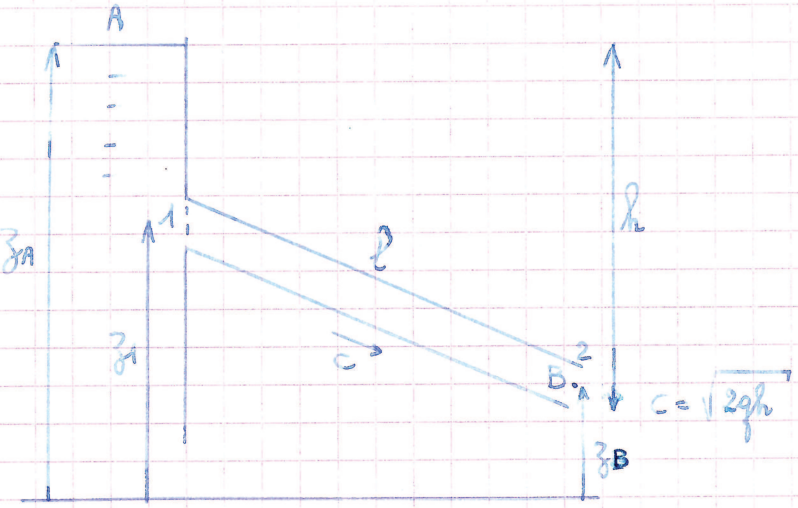
$z_A = 0$

On voit que $E' = E + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

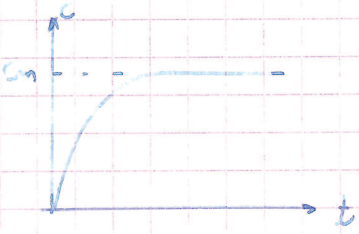
E total

E' utile

EX :



On a



$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\,\vec{ds} + \left[\frac{p}{\rho} + g z + \frac{c^2}{2}\right]_1^2 = 0 \qquad \text{(en régime variable.)}$$

$c = f(t)$ mais indépendant de s $\quad \frac{\partial c}{\partial s} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{dc}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt}\int_1^2 \vec{ds} + \left[\frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{c_2^2}{2}\right] - \left[\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{c_1^2}{2}\right] = 0$$

$$\frac{dc}{dt} \cdot l = \left(\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{c_1^2}{2}\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{c_2^2}{2}\right) =$$

$C_1 = C_2$

$$= \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2)$$

$$\rho l \frac{dc}{dt} = (p_1 - p_2) + \rho g (z_1 - z_2) = p_1 - p_2$$

$p_2 = p_{atm} + \rho g z_B$

On suppose que entre A et 1 régime quasi permanent (section en A très $>$ devant S1)

$$p_{atm} + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v^2 = \underbrace{p_1 + \rho g z_1}_{p'_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$\Rightarrow p'_1 = p_{atm} + \rho g z_A - \frac{1}{2}\rho v^2$$

D'où $\quad \rho l \frac{dv}{dt} = p_{atm} + \rho g z_A - \frac{1}{2}\rho v^2 - (p_{atm} + \rho g z_B)$

$\rightarrow \quad \rho l \frac{du}{dt} = \rho g h - \frac{1}{2}\rho c^2 \rightarrow c(t) ?$

$\Rightarrow \quad dt = \frac{l\,dc}{gh - \frac{c^2}{2}} = \frac{2l\,du}{2gh - c^2}$

$\int_0^t dt = 2l \int_0^c \frac{dc}{2gh - c^2}$ chgt de variable

$\begin{cases} c = \sqrt{2gh}\, u \\ dc = \sqrt{2gh}\, du \end{cases}$

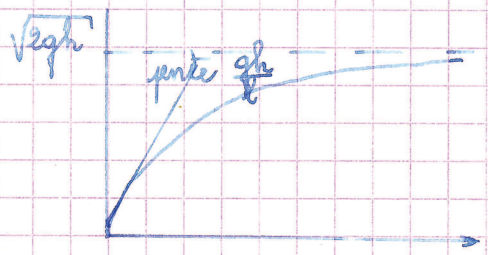
$\rightarrow = 2l \int_0^u \frac{2gh\, du}{2gh \cdot 2gh\, u^2} = \frac{2l}{\sqrt{2gh}} \int_0^u \frac{du}{1-u^2} = \frac{2l}{\sqrt{2gh}} \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right] du$

$\log(1+u) - \log(1-u)$

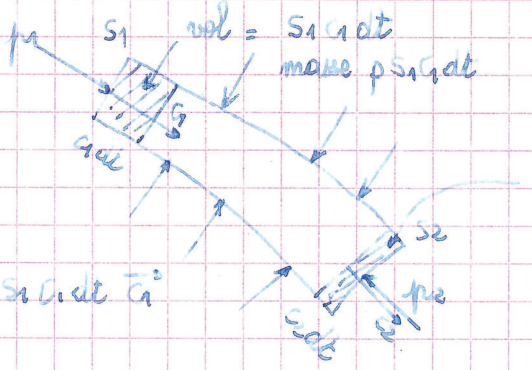
$t = \frac{l}{\sqrt{2gh}} \log \frac{1+u}{1-u} = \frac{l}{\sqrt{2gh}} \log \frac{1 + \frac{c}{\sqrt{2gh}}}{1 - \frac{c}{\sqrt{2gh}}}$

$c \rightarrow \sqrt{2gh} = c_m \rightarrow t = \frac{l}{c_m} \log \frac{c_m + c}{c_m - c} = \log \left(\frac{c_m + c}{c_m - c} \right)^{\frac{l}{c_m}}$

$\rightarrow \quad c = c_m \frac{e^{\frac{c_m}{l} t} - 1}{e^{\frac{c_m}{l} t} + 1}$



th des quantités de mvt (Euler)



vol = $S_1 c_1 dt$

masse $\rho S_1 c_1 dt$

$\frac{d\,m\vec{c}}{dt} = \sum \vec{f}_{ext}$

$S_2 c_2 dt$: vol

masse $\rho S_2 c_2 dt$.

qan^t mvt = $\rho S_1 c_1 dt\, \vec{c}_1$

q^t mvt = $\rho S_2 c_2 dt\, \vec{c}_2$

$\frac{d\,m\vec{c}}{dt} = (\rho S_2 c_2)\, dt\, \vec{c}_2 - (\rho S_1 c_1)\, dt\, \vec{c}_1$

$q_m = \rho S_1 c_1 = \rho S_2 c_2$

$$\rightarrow \quad Q_m (\vec{C_2} - \vec{C_1}) = \vec{P} + \vec{F_p}$$

$\vec{P}$: poids ; $\vec{F_p}$: effort pression.

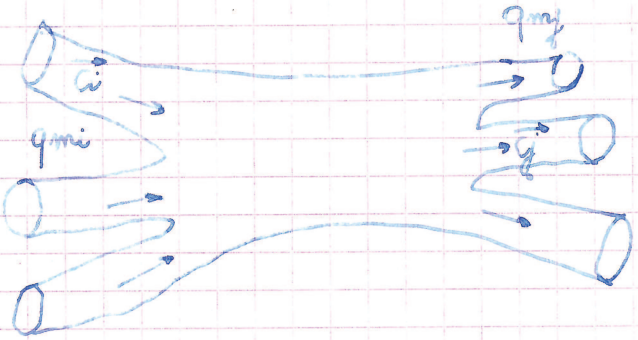
$\begin{cases} Q_m = \rho S_1 C_1 \\ Q_v = S_1 C_1 \end{cases}$

$Q_m \vec{C_2}$ = débit de quantité de mvt sortant par S_2

$-Q_m \vec{C_1}$ = " " entrant/sortant par S_1

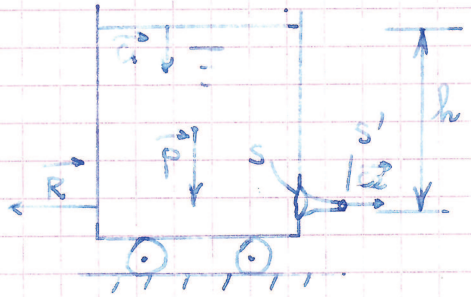
le débit de quantité de mvt sortant de S limitant le tube de courant est égal à la somme des efforts extérieurs apliqués sur le volume limité par S.

2d l'écoulement se fait dans une canalisation les efforts de pression s'exercent sur S_1 et S_2 + les efforts de pression exercé / la canalisation sur le fluide.



$$\sum q_{mj} \vec{C_j} - \sum q_{mi} \vec{C_i} = \sum \vec{F}_{ext} \begin{cases} \vec{P} \\ \vec{F_p} \end{cases}$$

EX :



$C = \sqrt{2gh}$ (déjà vu)

$s' = ks$ section de la veine contractée.

$Q_m (\vec{C_2} - \vec{C_1}) = \vec{P} + \vec{F_p}$ en projection horizontale ($\vec{C_1} = 0$)

$Q_m C = F_p = F$

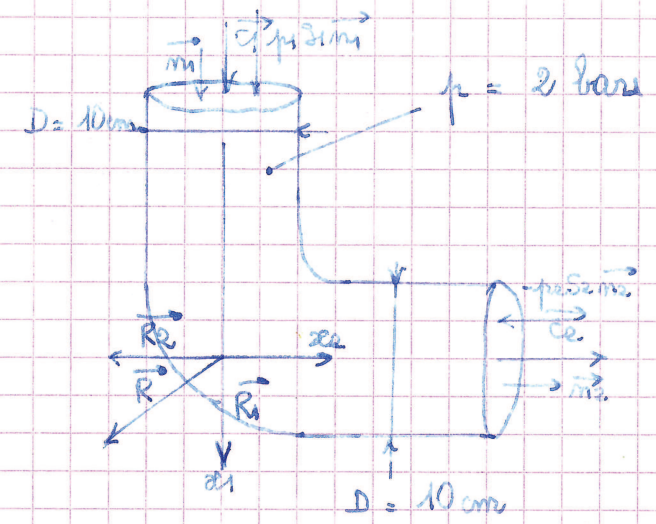
F : force exercée par récipient / fluide.

$\vec{R} = -\vec{F}$ effort exercée / fluide sur récipient. (actions mutuelles)

$\Rightarrow$

$$R = -Q_m C = -\underbrace{\rho S' C}_{Q_m} \quad C = -\rho k s C^2 = -\rho k s \cdot 2gh$$

EX :



$p = 2$ bars

$Q_v = 30\ l/s$

effort exercé / fluide sur tuyau ?

($\vec{m_1}$ dirigé sens écoul.)

Euler $\quad Q_m (\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \vec{P} + \vec{F}_p$

$\vec{P}$ négligé.

$\rightarrow \quad \rho_1 S_1 \vec{m_1} - \rho_2 S_2 \vec{m_2} + \vec{F}$

$\vec{F}$: force exercée par coude / fluide

$(\rho_1 = \rho_2 = \rho)$

$\vec{F} = -\vec{R}$ → par fluide / coude.

$\rightarrow \quad Q_m (\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \rho S_1 \vec{m_1} - \rho S_2 \vec{m_2} - \vec{R}$

En projection sur $\vec{x_1}$ $\quad (\|\vec{c_1}\| = \|\vec{c_2}\| = c)$

$$Q_m c_1 = \rho S_1 - R_1$$

$$\Rightarrow \quad R_1 = -Q_m c + \rho S_1$$

en proj / $\vec{x_2}$ $\quad (S_1 = S_2 = S)$

$$Q_m c = -\rho S - R_2$$

$$R_2 = -\rho S - Q_m c$$

sur $\vec{R}$ $\begin{cases} R_1 & / \vec{x_1} \\ R_2 & / \vec{x_2} \end{cases}$

$$Q_m = \rho Q_v = \underbrace{10^3\ kg/m^3}_{\rho \text{ eau}} \times \underbrace{3 \cdot 10^{-2}}_{Q_v} = 0,3\ m^3/s$$

$$c = \frac{Q_v}{S} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi D^2}{4}} = 3,82\ m/s.$$

$p = 2$ bars $= 2 \cdot 10^5$ Pa

$$\rho S = 1570\ N$$

1ère Session 1987-88

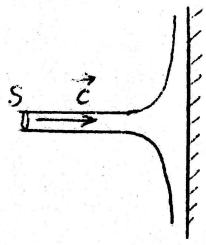
LICENCE DE TECHNOLOGIE

Mécanique des Fluides

durée : 2 heures 30

Une plaque plane P de dimension infinie est placée verticalement devant un jet d'eau (considéré comme un fluide parfait) de section S et de vitesse C, la direction du jet incident étant normale à la plaque.

1°- La plaque P est immobilisée. Calculer la force R_1 exercée par le jet sur la plaque et la puissance du jet.



A.N. $S = 1\ cm^2$ $C = 10\ m.s^{-1}$ $g = 10\ m.s^{-2}$

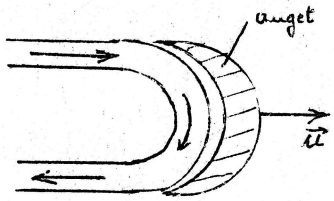
2°- Sous l'action du jet on laisse la plaque se déplacer parallèlement à elle-même avec une vitesse $\vec{u}$ constante.

a- Calculer la nouvelle force R_2 exercée par le jet sur la plaque en mouvement.

b- Calculer le rendement énergétique défini comme le rapport de la puissance développée par la force R_2 sur la puissance du jet incident.

Quelle doit-être la vitesse u pour que le rendement soit maximum? Donner la valeur de ce rendement maximum.

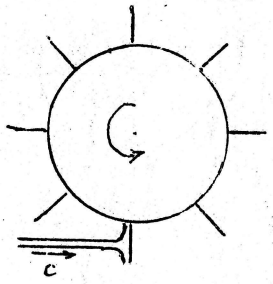
3°- On remplace la plaque par un auget qui se déplace parallèlement au jet incident avec la vitesse u. La forme particulière de l'auget permet de renvoyer le jet dans la même direction que le jet incident mais en sens opposé.



Calculer la force R_3 exercée sur l'auget.

Répondre aux mêmes questions relatives au rendement posées dans le 2° b.

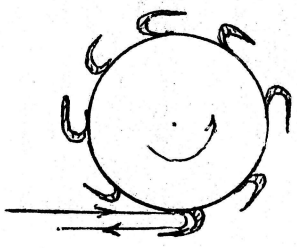
4°- On considère une roue à aubes dont les pâles planes sont soumises successivement au jet incident. Cette disposition particulière permet d'utiliser la totalité du débit massique du jet incident.



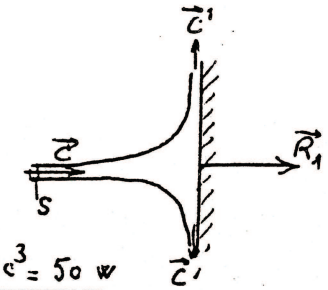
Calculer la force R_4 exercée sur la roue et répondre aux mêmes questions relatives au rendement posées dans le 2° b.

5°- On remplace les aubes planes par des augets creux dont les propriétés sont celles décrites dans le 3°.

Calculer la force R_5 exercée sur la roue et répondre aux mêmes questions relatives au rendement posées dans le 2° b. Dans les conditions de rendement maximum, quelle est la vitesse absolue du jet de retour. Justifier la réponse d'un point de vue énergétique.



Corrigé PB. examen U 2 1° session 1987-88



1) Plaque immobile :

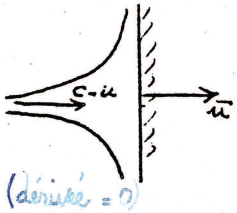
Th. Euler : $Q_m(\vec{c}' - \vec{c}) = \vec{F} = -\vec{R}_1$ en projection sur la normale

au jet : $-Q_m c = -R_1$ $\quad R_1 = \rho S c^2 = 10^3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 = \underline{10\ N}$

($Q_m = \rho S c$)

Puissance du jet (sous forme cinétique) $\underline{P = \frac{1}{2} Q_m c^2 = \frac{1}{2}\rho S c^3 = 50\ W}$

2) Plaque animée d'une vitesse $\vec{u}$.



a. Th. d'Euler / axes liés à la plaque : $R_2 = Q'_m(c-u)$ avec $Q'_m = \rho S(c-u)$

($c-u$: vitesse relative du jet / plaque)

$R_2 = \rho S (c-u)^2$

b. Puissance développée par R_2 : $= R_2 \cdot u = \rho S u (c-u)^2$

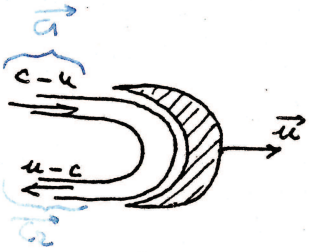
$$\eta = \frac{\rho S u (c-u)^2}{\frac{1}{2}\rho S c^3} = \frac{2u(c-u)^2}{c^3}$$

η_{max} pour $u(c-u)^2$ max. (dérivée = 0)

soit $(c-u)^2 - 2u(c-u) = 0 \Rightarrow (c-u)(c-3u) = 0 \quad u = \frac{c}{3}$ / ($c = u$ correspond à un rendement nul)

$$\eta_{max} = \frac{2 \cdot \frac{c}{3}\left(\frac{2}{3}c\right)^2}{c^3} = \frac{8}{27} = 0{,}296.$$

3) Auget avec jet de retour :



vitesse relative / auget du jet incident : $c-u$

" " / " du jet de retour : $u-c$

$$R_3 = Q_m[(c-u)-(u-c)] = 2Q'_m(c-u) \quad \text{(poids négligé)}$$

($Q'_m = \rho S(c-u)$)

$$R_3 = 2\rho S(c-u)^2$$

$$\eta = \frac{R_3 \cdot u}{\frac{1}{2}\rho S c^3} = \frac{2\rho S(c-u)^2 u}{\frac{1}{2}\rho S c^3} = \frac{4u(c-u)^2}{c^3}$$

η_{max} lorsque $u(c-u)^2$ est max. soit $u = \frac{c}{3}$.

$$\eta_{max} = 2 \times \frac{8}{27} = 0{,}59$$

4) Le débit massique étant toujours inchangé $Q_m = \rho S c$

$$R_4 = Q_m(c-u) = \rho S c(c-u).$$

$$\eta = \frac{R_4 \cdot u}{\frac{1}{2}\rho S c^3} = \frac{\rho S c \cdot u(c-u)}{\frac{1}{2}\rho S c^3}$$

η_{max} lorsque $u(c-u)$ est max.

soit $(c-u) - u = 0 \Rightarrow u = \frac{c}{2}$.

$$\eta_{max} = \frac{2u(c-u)}{c^2} = \frac{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}}{c^2} = 0{,}5$$

5) Auget avec jet de retour.

$$R_5 = 2Q_m(c-u) = 2\rho S c(c-u)$$

$$\eta = \frac{R_5 \cdot u}{\frac{1}{2}\rho S c^3} = \frac{2\rho S c \cdot u(c-u)}{\frac{1}{2}\rho S c^3} = \frac{4u(c-u)}{c^2}$$

η_{max} pour $u(c-u)$ max soit $u = \frac{c}{2}$.

$$\eta_{max} = \frac{4 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}}{c^2} = 1.$$

Vitesse absolue du jet de retour $= \vec{w} + \vec{u} = 2u - c$ (vitesse relative / auget + vitesse de l'auget)

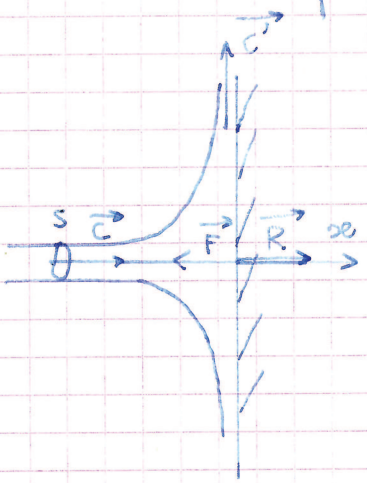
($\vec{w}$: $u - c$; $\vec{u}$: u)

Pour $u = \frac{c}{2}$ la vitesse absolue du jet de retour est nulle

Le rendement étant de 100 %, toute l'énergie du jet a été transférée à la roue, l'énergie cinétique du jet de retour étant nulle.

$R = R_1\sqrt{2} = 2380\ N$ $\quad R_1 = 1684,6\ N$ M+35

EX: Action d'un jet sur un plan



$\vec{Q_m}(\vec{c'} - \vec{c}) = \vec{P} + \vec{F}$

↓ f est / fluide
P = par / le plan / liquide

$\vec{F} = -\vec{R}$ action par jet / plan

proj / $\vec{x}$

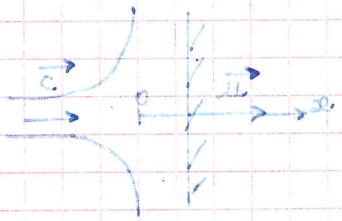
$Q_m(0 - \vec{c}) = -R$

$\vec{c'}$

$\Rightarrow R = Q_m c > 0$ (normal)

$R = \rho \underbrace{Q_v}_{c\cdot S} \cdot c = \rho S c^2$

Si le plan se déplace avec une vitesse u



vitesse relative du jet par rapport au plan $= \vec{c} - \vec{u}$

(axes liés au plan.)

en proj / $\vec{x}$

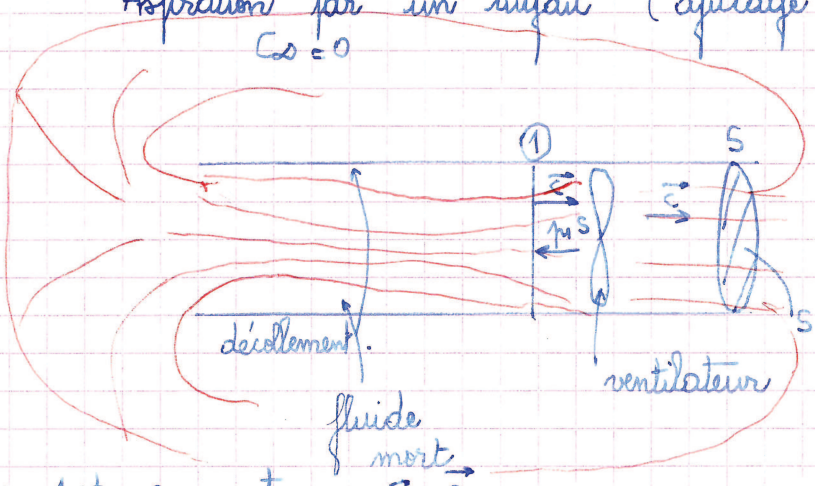
$Q_{m'}(0 - [\vec{c} - \vec{u}]) = -R$

↑ débit massique relatif / au plan.

Or $Q_{m'} = \rho S (c - u)$

$\Rightarrow R' = \rho S (c-u)^2$

Aspiration par un tuyau (ajutage rentrant de BORDA)



entre 1 et ∞ amont

$$Q_m (\vec{C_2} - \vec{C_1}) = \vec{P} + \vec{F_p} \quad \text{(en proj sur axe tuyau.)}$$

$$\rho \underbrace{S C}_{Q_v} (C - \underbrace{0}_{C_\infty}) = -\mu_1 S$$

$$\Rightarrow \rho S C^2 = -\mu_1 S \rightarrow \mu_1 = -\rho C^2 \quad \text{(pression effective)}$$

($p_{atm} = 0$.)

charge $H = \frac{p}{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$; $p = \mu + \rho g z$

A l'∞ $\quad H_\infty = \frac{\mu_\infty}{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{c_\infty^2}{g} = 0$

($\mu_\infty = 0$, $c_\infty = 0$)

$$H_1 = \frac{\mu_1}{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} = \frac{-\rho C^2}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$$

$$H_\infty - H_1 = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} = \text{perte de charge.}$$

$$\Delta H = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} \quad (m)$$

$$\Delta p = \varpi \Delta H = \frac{1}{2}\rho c^2 \quad (J/m^3)$$

perte de charge singulière.

Bernoulli entre (1) et la sortie

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 + E = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c^2$$

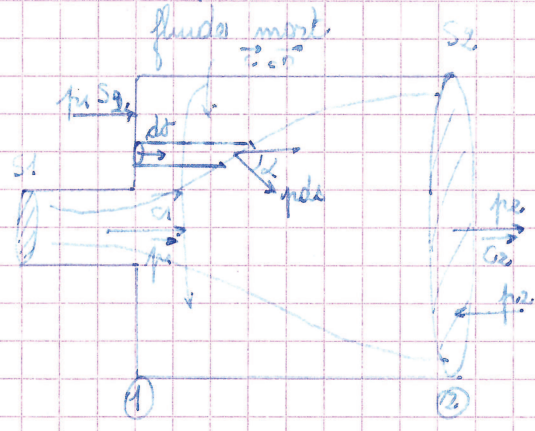
E : énergie fournie par le ventilateur. (J/m^3)

$$\underbrace{E}_{(J/m^3)} = -\mu_1 = +\rho C^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\rho C^2}_{E \text{ fournit au fluide}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho C^2}_{\text{perte de charge singulière (chaleur)}}$$

(1) $P = \rho C^2 \frac{Q_v}{\eta} = \frac{\rho S C^3}{\eta}$

↓ puissance fournie au ventilateur.

EX.



$pds \cos\alpha = dv$

$S_1 C_1 = S_2 C_2$

$\vec{p}_1 = \vec{cte}$ dans S_1

$p_1 = p_1 = cte$ dans S_1.

$Q_m (C_2 - C_1) = p_1 S_2 - p_2 S_2$

$\rho Q_v = Q_m = \rho S_1 C_1 = \rho S_2 C_2$

$\rho S_2 C_2 (C_2 - C_1) = (p_1 - p_2) S_2$

$H_1 = \frac{p_1}{\varpi} + \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{g}$

↑ charge en (1)

en (2) $H_2 = \frac{p_2}{\varpi} + \frac{1}{2} \frac{C_2^2}{g}$

$\Delta H = H_1 - H_2 = \frac{p_1 + p_2}{\varpi} + \frac{1}{2g}(C_2^2 + C_1^2) = \frac{C_2(C_2 + C_1)}{g} + \frac{1}{2g}(C_2^2 + C_1^2)$

$= \frac{(C_1 - C_2)^2}{2g} = \Delta H = \frac{1}{2g} C_2^2 \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)^2 C_2^2$

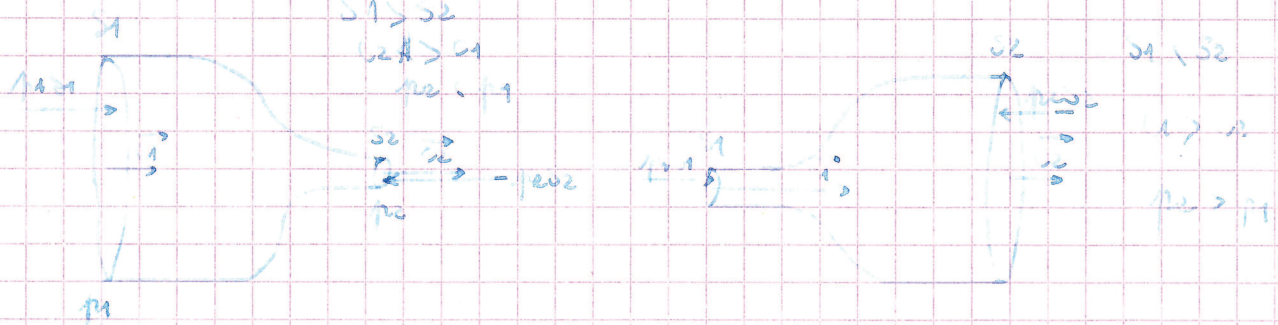
ese précédent $\Delta H = \frac{1}{2g} C^2$

Perte de charge singulière $\Delta H = \frac{\zeta C^2}{2g}$ (ζ zéta) de façon générale

$\Delta H = \frac{1}{2g} C^2$ ($\zeta = 1$)

$\zeta = \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$.

Conduite à rétrécissement ou élargissement progressif.



$Q_v = S_1 c_1 = S_2 c_2$

$$\hat{p}_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = \hat{p}_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2$$

on néglige $\Delta h = \Delta z$

$$\Rightarrow \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2$$

$$Q_m(\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \vec{P} + \vec{\tau p}$$

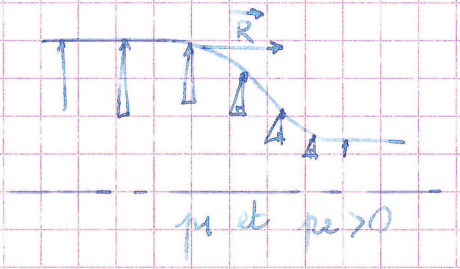
↓ axes

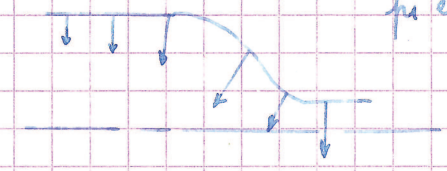
$Q_m(c_2 - c_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 + (-R)$

↓ par tuyère / fluide

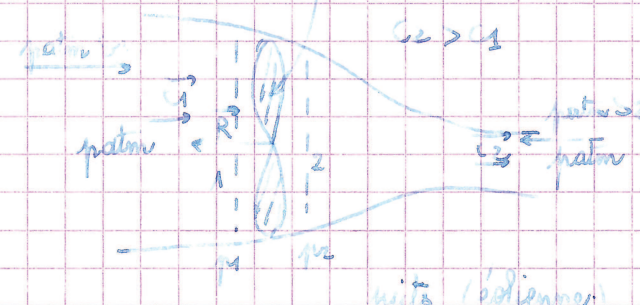
$\rho S_1 c_1 = \rho S_2 c_2$

$$\rightarrow \quad R = S_1\left(p_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2\right) - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2\right) S_2$$





Ex : ventilateur (source énergie)

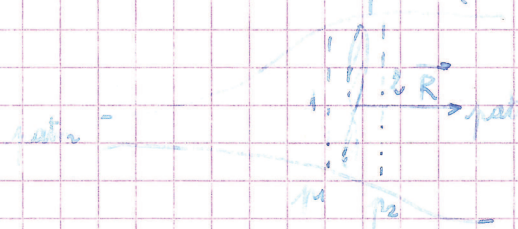


$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c_1^2 + \tau = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c_2^2$$

τ : J/m³

$(\tau > 0)$

puits (éolienne)

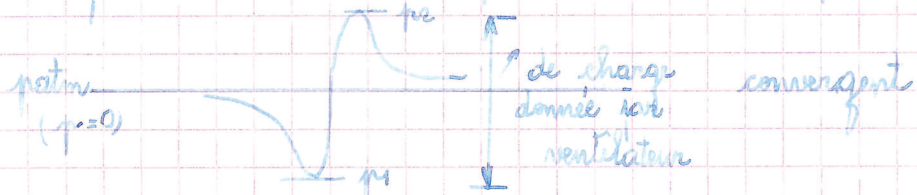


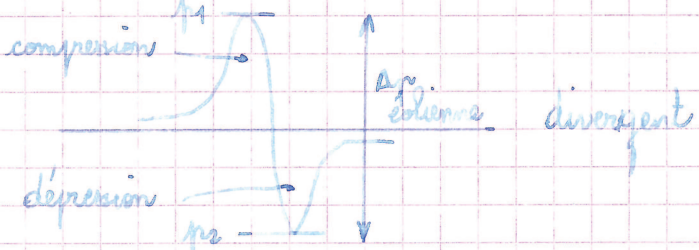
$(\tau < 0)$

$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2$ (entrée éolienne et fluide)

$p_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c_2^2$ (sortie éolienne et fluide)

divergent $c_2 < c_1$ $p_1 - p_2 > 0$ → $p_1 > p_2$





th tuère $Q_m (c_2 - c_1) = -R$

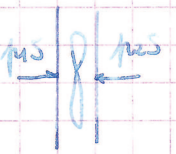
↓

force exercée par le fluide sur l'hélice et la tuyère

E (J/m³) → $P = E \times q_v = R \times C = Q_m (c_2 - c_1) \times$

J/m³ m³/s force vitesse

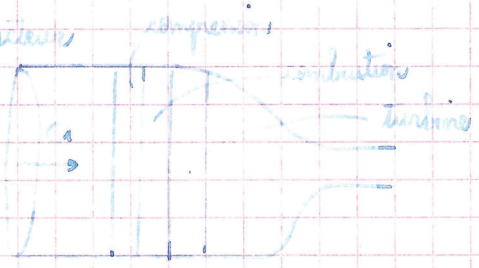
→ $\rho S c$



$R = p_1 S - p_2 S = (p_1 - p_2) S = -\frac{1}{2} \rho (c_1^2 - c_2^2) S$ (sur hélice)

$R = -\rho S c (c_2 - c_1)$ $\quad c = \frac{c_1 + c_2}{2}$

↳ sur la tuyère + hélice.



q_{v1} : débit entrée

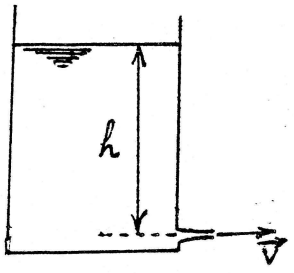
q_{v2} : débit sortie gaz

R : poussée du réacteur.

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

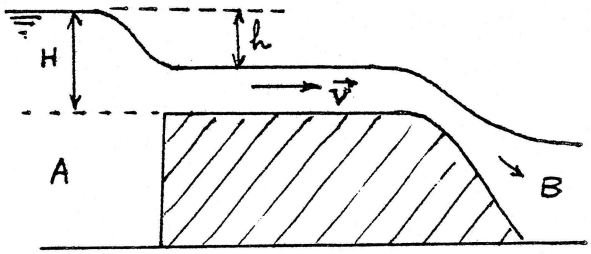
I- Un réservoir de section S rempli d'un liquide de masse volumique ρ est percé d'un trou de section s ($s \ll S$) situé à une distance h en dessous de la surface libre.

1°- En admettant que le régime d'écoulement est quasi-stationnaire, déterminer la vitesse $\vec{V}$ du jet à la sortie du trou.



2°- La veine du jet a une section s'< s. On appelle $k = \frac{s'}{s}$ le coefficient de contraction du jet. Calculer en fonction de h, le débit volumique. En déduire le temps que met le liquide pour s'écouler.

II- Un déversoir à large seuil permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir (A) dans lequel la surface libre est à une hauteur H au-dessus du seuil, vers un réservoir (B). La dénivellation entre la surface libre en amont et le niveau de l'eau au-dessus du seuil est égale à h. On admet qu'au passage du seuil, l'écoulement se fait avec une vitesse uniforme $\vec{V}$. On néglige la vitesse de l'eau en amont.



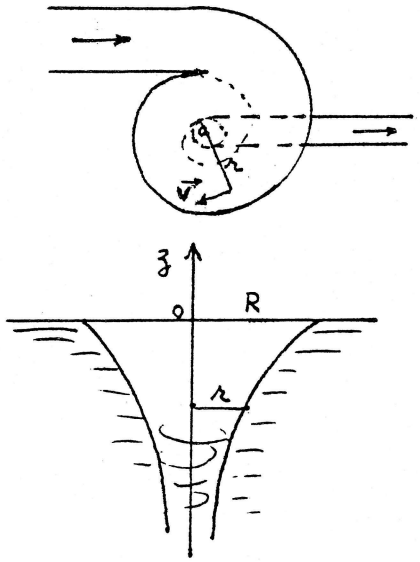
1°- Calculer la vitesse $\vec{V}$ au niveau du seuil.

2°- Déterminer le débit volumique par unité d'envergure. Calculer le débit maximum pour une hauteur H donnée.

III- On considère l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ dans une bâche spirale.

1°- Montrer que la vitesse d'écoulement est inversement proportionnelle à la distance r au centre O de la bâche.

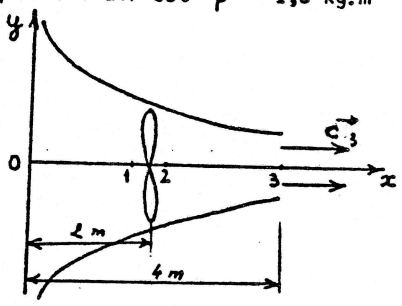
2ºEn utilisant le résultat précédent déterminer l'équation z(r) d'une méridienne limitant la surface libre d'un fluide en écoulement tourbillonnaire tel que sur la surface libre de niveau z = o on a r = R.



DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

On considère une conduite convergente de révolution autour de l'axe Ox et dont la méridienne est représentée par la fonction $y = \sqrt{\frac{2}{x}}$. La longueur de la conduite est de 4 m. Un ventilateur, disposé au centre évacue l'air à la vitesse $c_3 = 10\ m.s^{-1}$. L'ensemble est situé dans l'air à la pression atmosphérique prise comme origine des pressions.
On néglige les variations d'altitude dans la conduite. La vitesse de l'air en amont de la conduite est nulle.

La masse ~~Le poids~~ volumique de l'air est $\rho = 1{,}3\ kg.m^{-3}$ $\quad g = 10\ m.s^{-2}$



1°- Calculer la pression aux points 1 et 2 situés respectivement juste en amont et en aval du ventilateur.

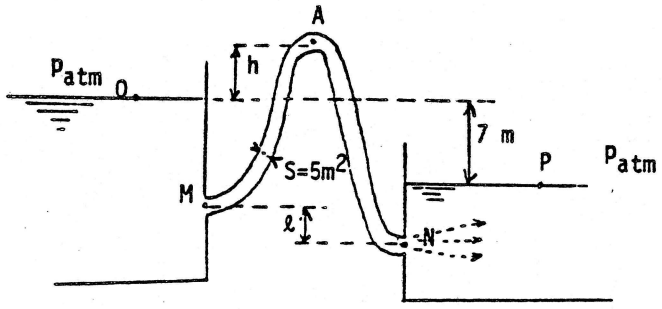
2°- Etablir la loi de variation $p(x)$ de 0 en 1 et de 2 en 3.

3°- Tracer la ligne piézométrique et la ligne de charge le long du convergent.

4°- Déterminer la direction, le sens et l'intensité de la force exercée sur l'hélice et la puissance que l'on doit lui fournir par son fonctionnement.

5°- Déterminer les forces exercées par l'air sur les deux parties de la conduite, situées l'une en amont, l'autre en aval du ventilateur. Conclusion.

Un siphon évacuateur de crue a la forme donnée sur la figure. On suppose le fluide parfait.



1°- Calculer la vitesse et le débit dans le siphon. (On admettra que la répartition des pressions entre N et P correspond à celle de l'équilibre hydrostatique entre ces deux points).

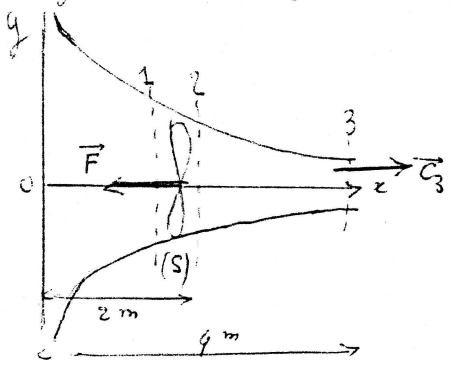
2°- En négligeant les effets dus à la courbure du siphon, calculer la valeur maximale de h à partir de laquelle le siphon se désamorce, sachant que p_s est la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de fonctionnement.

Application numérique dans le cas ou p_s est négligeable devant la pression atmosphérique.

3°- Déterminer, en fonction de ℓ , la composante horizontale des efforts exercés par l'eau sur le siphon en fonctionnement. Que dire de la composante verticale ?

Pression atmosphérique = 1 bar $\quad g = 10\ m.s^{-2}$

Corrigé du convergent



$y = \sqrt{\frac{2}{x}}$ S.C = Ck $S \cdot y^2 = \frac{1}{x}$

$\frac{C}{x} = Ck = \frac{C_3}{4}$ $\underline{C = 2{,}5x}$

$C_1 = \frac{C_3}{2} = 5\ m.s^{-1}$

$C_2 = C_1 = 5\ m.s^{-1}$

S en 1 et en 2 $= \pi y^2 = \pi\ m^2$

$C_3 = 10\ m.s^{-1}$
$\rho = 1{,}3\ kg.m^{-3}$
$g = 10\ m.s^{-2}$

1) ~~p_{atm}~~ $+ \frac{1}{2}\rho C_0^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho C_1^2 \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{2}\rho C_1^2 = -\frac{1}{8}\rho C_3^2 = \underline{-16{,}25\ N.m^{-2}}$

$p_2 + \frac{1}{2}\rho C_2^2 = $ ~~p_{atm}~~ $+ \frac{1}{2}\rho C_3^2 \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}\rho(C_3^2 - C_2^2) = \frac{1}{2}\rho\left(C_3^2 - \frac{C_3^2}{4}\right) = \frac{3}{8}\rho C_3^2 = \underline{48{,}75\ N.m^{-2}}$

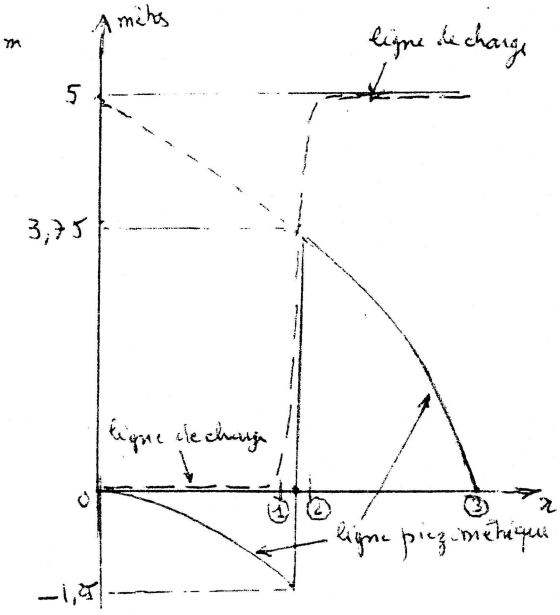
2) Entre 0 et 1 : $p = -\frac{1}{2}\rho C^2 = -\frac{1}{32}\rho C_3^2 \cdot x^2 = -4{,}0625\, x^2$ (parabole)

Entre 2 et 3 : $p = \frac{1}{2}\rho(C_3^2 - C^2) = \frac{1}{2}\rho\left(C_3^2 - \frac{C_3^2}{16}x^2\right) = 65\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$ (parabole)

à noter que $\frac{\partial p}{\partial x}$ est de même

3) Hauteur piezométrique $h_p = \frac{p}{\omega}$ en 1 : $h_p = -\frac{16{,}25}{1{,}3 \times 10} = -1{,}25\ m$

en 2 $h_p = \frac{48{,}75}{1{,}3 \times 10} = 3{,}75\ m$



Hauteur de charge $H = h_p + \frac{C^2}{2g}$

de 0 à 1 : $H = H_0 = 0$

de 2 à 3 : $H = H_3 = \frac{C_3^2}{2g} = 5\ m$

4) $F = (p_2 - p_1)\cdot S = \left(\frac{3}{8}\rho C_3^2 + \frac{1}{8}\rho C_3^2\right) S = \frac{\pi}{2}\rho C_3^2 = 204{,}2\ N$

$P = F \times C_1 = 204{,}2 \times 5 = 1021\ W = 1{,}02\ kW$

5) Th. d'Euler entre 0 et 1 ; en projection sur Ox :

$\rho_m (C_1 - 0) = F_1 + \frac{\pi}{8}\rho C_3^2$ ← force de pression sur S.

$S_3 = \frac{\pi}{2}$ $\rho S_3 C_3$ $\frac{C_3}{2}$

$F_1 = \frac{\pi}{4}\rho C_3^2 - \frac{\pi}{8}\rho C_3^2 = \frac{\pi}{8}\rho C_3^2$ $\underline{R_1 = -F_1 = -\frac{\pi}{8}\rho C_3^2 = -51\ N}$

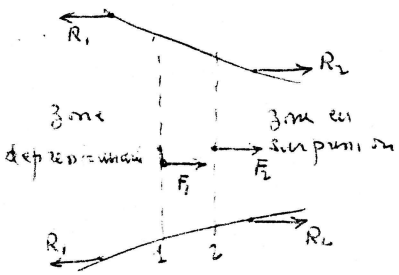
Th. d'Euler entre 2 et 3, en projection sur Ox :

$\rho_m (C_3 - C_2) = F_2 + \frac{3}{8}\pi\rho C_3^2$

$\frac{\pi}{2}\rho S_3$ $\frac{C_3}{2}$

$F_2 = \frac{\pi}{4}\rho C_3^2 - \frac{3}{8}\pi\rho C_3^2 = -\frac{\pi}{8}\rho C_3^2$

$\underline{R_2 = -F_2 = 51\ N}$



$R_1 + R_2 = 0$ — Conclusion : la résultante des forces exercées sur le convergent est nulle, seule la force F est exercée sur le bâti.

N.B. On peut aussi calculer directement les forces exercées sur la conduite

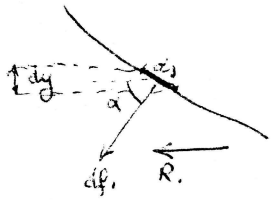
$df_1 = p\, dS = p \cdot 2\pi y\, ds$

de 0 à 1 $(df_1)_x = p \cdot 2\pi y\, ds \cos\alpha = p \cdot 2\pi y\, dy$ avec $p = -\frac{1}{2}\rho C^2$ et $C = \frac{C_3}{4}x$

$(df_1)_x = -\pi\rho C_3^2 \cdot \frac{x^2}{16} y\, dy$ avec $x^2 = \frac{4}{y^4}$

$R_1 = -\frac{\pi}{4}\rho C_3^2 \int_1^\infty \frac{dy}{y^3} = \frac{\pi}{4}\rho C_3^2 \left[\frac{1}{2y^2}\right]_1^\infty = -\frac{\pi}{8}\rho C_3^2 = -51\ N$

idem pour R_2



1) Volume de la salle : $V = L \cdot l \cdot H = 12 \times 10 \times 3 = 360\ m^3$

Débit $Q_v = \frac{V}{t} = \frac{360\ m^3}{3600\ s} = 10^{-1}\ m^3\ s^{-1}$

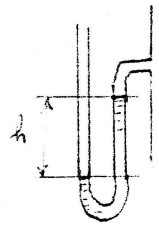
Surface de l'ouverture A : $10^{-1} \times 10^{-2} = 10^{-3}\ m^2$

$c_1 = \frac{Q_v}{S} = \frac{10^{-1}}{10^{-3}} = \underline{10^2\ m.s^{-1}}$

2) Bernoulli entre l'atm. et la veine à l'entrée

$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c_0^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho c_1^2$ $\quad p_1 = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho c_1^2 = 10^5 - \frac{1}{2}\,1{,}3 \cdot 10^4 = \underline{0{,}935 \cdot 10^5\ Pa}$

$p_{atm} - p_1 = h\,\rho_{H_2O}\,g = 0{,}65 \cdot 10^4$ $\quad \underline{h_1 = 0{,}65\ m}$



$\frac{p_1}{\rho^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_0^\gamma}$ $\quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1,4}$ $\quad \left.\begin{array}{l} p_1 = \rho \frac{R}{M} T_1 \\ p_2 = \rho_0 \frac{R}{M} T_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{T_0}{T_1}$

$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1,4} \cdot \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{1,4}$ $\quad \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}}$ $\quad \frac{T_1}{T_0} = (0{,}935)^{\frac{0,4}{1,4}}$

$T_0 = 290\ K$

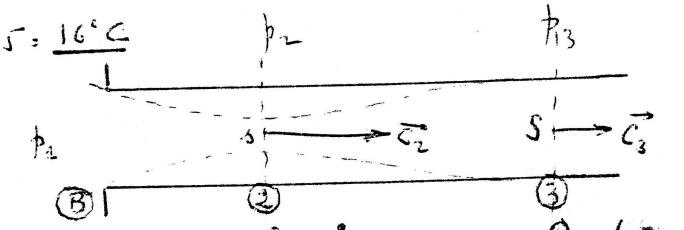
$T_1 = 284{,}5\ K = \underline{11{,}5\ °C}$

3) E. cinétique / kg $= \frac{1}{2}c_1^2 = 5000\ J \xrightarrow{90\%} 4{,}5\ kJ$

Augmentation de température $\Delta T = \frac{4{,}5\ kJ}{c} = \underline{4{,}5°}$

Température nulle de l'air : $11{,}5 + 4{,}5 = \underline{16°C}$

4) $\Delta p = \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2\right) - \left(p_3 + \frac{1}{2}\rho c_3^2\right)$



Th. Euler appliqué au fluide entre 2 et 3

$\rho S c_3 \left(c_3 - c_2\right) = S\left(p_2 - p_3\right)$

$p_2 - p_3 = \rho c_3 (c_3 - c_2)$

$\Delta p = \rho c_3 (c_3 - c_2) + \frac{1}{2}\rho\left(c_2^2 - c_3^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(c_2 - c_3\right)^2$

$\underline{\Delta p = 46{,}8\ J.m^{-3}}$

$c_2 = \frac{Q_v}{S} = \frac{200}{3\pi}$ $\quad c_3 = \frac{Q_v}{S} = \frac{40}{\pi}$

$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 10^{-2}}{4}$ $\quad S = 0{,}6\,S = \frac{3\pi}{2} \cdot 10^{-3}$

5) $p_3 + \frac{1}{2}\rho c_3^2 + E = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c_3^2 \Rightarrow E = -p_3$ (si pression était prise en valeur effective $p_{atm} = 0$)

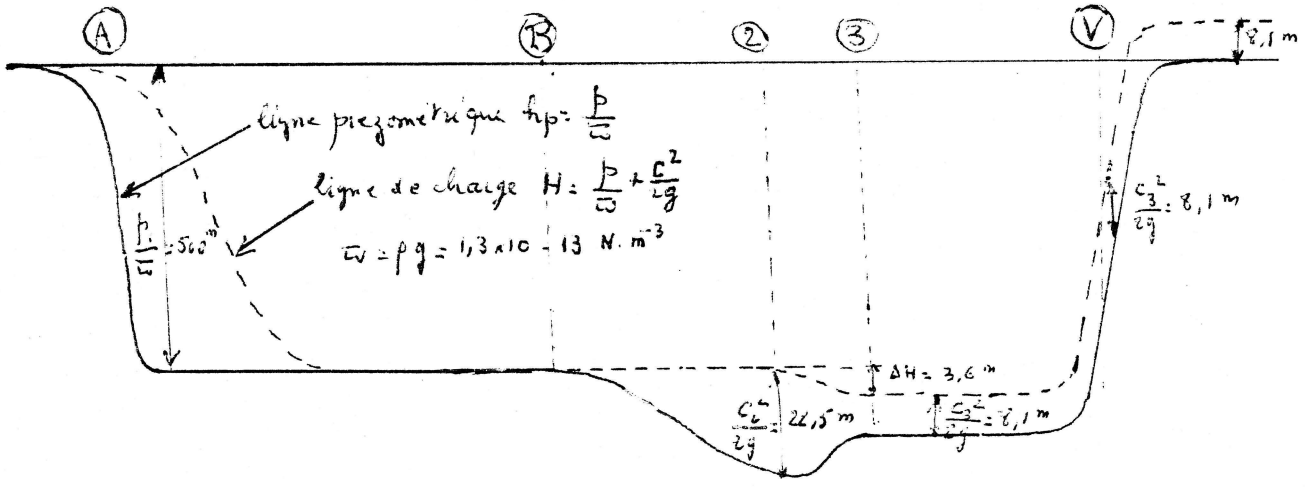
E : énergie fournie par la réchauffeur ($en\ J.m^{-3}$)

$p_2 - \Delta p = p_3 + \frac{1}{2}\rho c_3^2 \Rightarrow -p_3 = \frac{1}{2}\rho c_3^2 + \Delta p - p_2 = \frac{1}{2}\,1{,}3 \cdot \frac{1600}{\pi^2} + 46{,}8 + \frac{1}{2}\,1{,}3\,10^4 = 6652\ J.m^{-3}$

Par sec. $P = Q_v \cdot 6652 = 665{,}2\ W$ fournie par le réchauffeur au fluide

Puissance fournie au réchauffeur : $P' = \frac{P}{0{,}8} = \underline{831{,}5\ W}$

6)



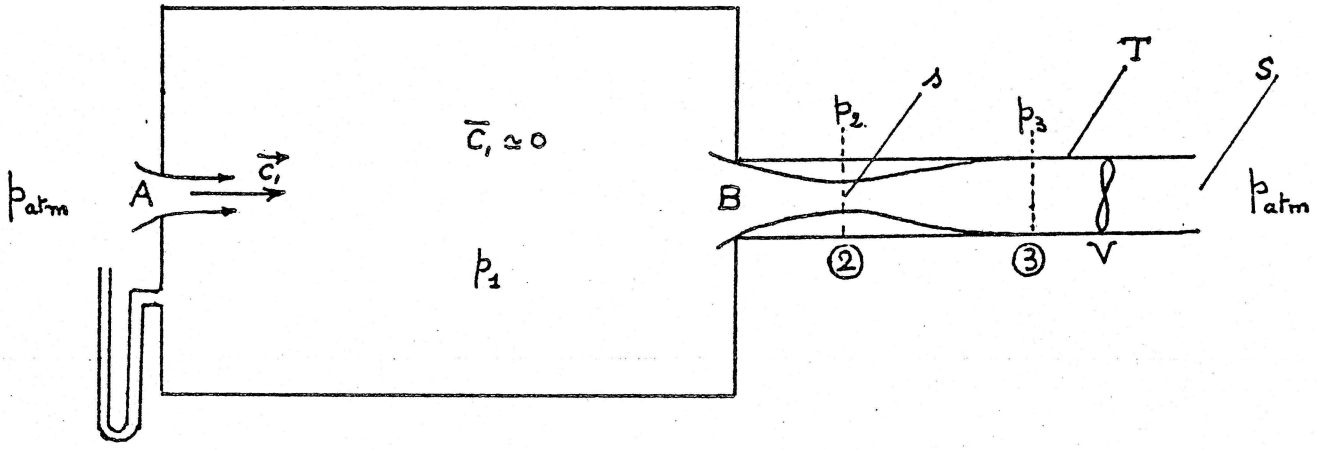
2° Session
1985-1986

LICENCE DE TECHNOLOGIE DE CONSTRUCTION

U2 - Mécanique des Fluides

On étudie le système d'aération d'une salle (dimensions: L = 12 m, l = 10 m, H = 3 m) dont on veut renouveler entièrement son volume d'air toutes les heures. A cet effet, un tuyau d'aspiration (T) cylindrique de diamètre D = 10 cm est branché en B dans la paroi de la pièce. Un ventilateur (V) placé dans le tuyau assure l'aspiration de l'air vers l'extérieur. Afin de permettre la circulation d'air, une ouverture rectangulaire (A) de 10 cm de longueur sur 1 cm de large est pratiquée dans une paroi. On néglige les variations des cotes verticales dans le mouvement du fluide ainsi que sa viscosité. L'air extérieur est à la pression $P_{atm} = 10^5$ Pa et à la température $T_0 = 17°C$.

La masse volumique de l'air est $\rho = 1{,}3$ kg.m^{-3} $g = 10$ m.s^{-2}.



1°- Calculer la vitesse C_1 avec laquelle l'air entre dans la pièce par l'ouverture A. On néglige la contraction de la veine à l'entrée.

2°- Calculer la pression p_1 existant dans la pièce. Quelle serait la dénivellation h d'un manomètre à eau mis en communication avec l'air de la pièce ? Préciser le sens de cette dénivellation.

En supposant que la variation de pression se fait adiabatiquement suivant la loi de Laplace ($p/\rho^{1,4}$ = cte), déterminer la température de l'air de la pièce.

3°- Le jet d'air entrant par l'ouverture A crée dans la pièce des turbulences de telle sorte que la vitesse moyenne $\overline{C_1}$ dans la pièce peut être considérée comme nulle. Calculer la variation de température de l'air de la pièce en admettant que 90 % de l'énergie cinétique de l'air se transforme en chaleur par suite des frottements turbulents (les 10 % restant se retrouvant sous forme d'énergie turbulente). La chaleur massique de l'air est de 1 KJoule par kg et par degré.

En déduire la température réelle de l'air de la pièce.

4°- A l'entrée du tuyau d'aspiration T, la veine d'air présente un décollement et une contraction (section s en 2) avant de reprendre (en 3) la section S de la conduite. Le coefficient de contraction de la veine défini par le rapport $\frac{s}{S}$ est égal à 0,6. On admet que la perte de charge singulière Δp du à cet effet se situe entre les sections 2 et 3.

Calculer Δp exprimé en J.m^{-3}.

5°- Calculer la puissance qu'il faut fournir au ventilateur pour assurer le fonctionnement du dispositif sachant que son rendement est de 0,8.

6°- Tracer la ligne piezométrique et la ligne de charge effectives le long de l'installation en précisant la valeur numérique des différentes hauteurs (on ne respectera pas forcément l'échelle des grandeurs).

$C_1 = 0 \qquad R = Q_m\, C_2$

$P = R \times C_1 = Q_m (C_2 - C_1)\, C_1$

↑ utile fournie par réacteur.

P' fournie par le réacteur au fluide sous forme cinétique.

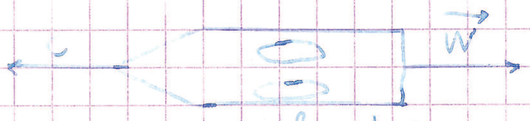
$$P' = \frac{1}{2} Q_m (C_2^2 - C_1^2)$$

$$\eta = \frac{P}{P'} = \frac{2C_1}{C_1 + C_2} = \frac{2}{1 + \frac{C_2}{C_1}}$$

$\eta = 0 \qquad C_1 = 0$

$C_1 \to C_2 \to \eta = 1$

<u>EX:</u>



$\vec{W}$: vitesse éjection gaz / à la fusée

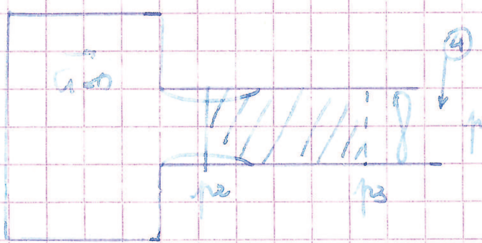
th Euler $Q_m (\vec{C_2} - \vec{C_1}) = -\vec{R}$

$\vec{C_2} \to \vec{W}$, $\vec{C_1} \to \vec{0}$

Axes liés à la fusée $Q_m (\vec{W} - \vec{0}) = -\vec{R}$

$$\vec{R} = -Q_m \vec{W}$$

<u>EX:</u>



$\Delta p = (\varpi / m^3) \to \Delta H = \frac{\Delta p}{\varpi}$

$t_2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho\, c_2^2 \qquad t_3 = p_3 + \frac{1}{2} \rho\, c_3^2$ (en amont ventilateur)

$\Delta p = t_2 - t_1$ en aval ventilateur $t_4 = p_4 + \frac{1}{2} \rho\, c_4^2$

$Q_m (c_3 - c_2) = p_2 - p_3$

th ... t amont + t ventilateur = t aval

$t_3 + t = t_4$

en 1 : $E_1 = p_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2$
en 3 : $E_3 = p_3 + \frac{1}{2}\rho c_3^2$

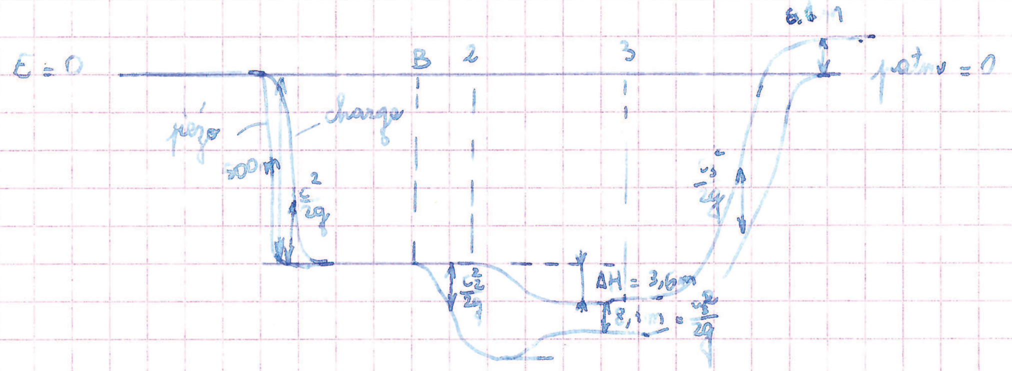
$E_1 - \Delta p = E_3$ — perte charge entre 1 et 3

$$p_1 - \Delta p = p_3 + \frac{1}{2}\rho c_3^2$$

$$E = -p_3 = 6652\ J/m^3$$

$$P = Q_v E = S c_3 E$$

$$P' = \frac{P}{\eta = 0{,}8} = \frac{P}{\eta}$$



$E\ J/m^3 = p + \frac{1}{2}\rho c^2$

$H = \frac{p}{\varpi} + \frac{c^2}{2g}$ et $h_p = \frac{p}{\varpi}$

à l'amont $c(\infty) = 0$, $p_{atm} = 0$ } confondu avec $E = 0$

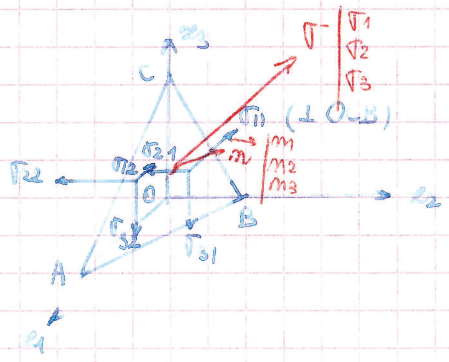
$p_1 = -\frac{1}{2}\rho c_1^2 = \frac{1}{2}\ 1{,}3 \cdot 10^{4}$ $\quad \frac{p_1}{\varpi} = -\frac{1}{2}\frac{1{,}3 \cdot 10^{4}}{1{,}3 \times 10} = -500\ m$

$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c_3^2$

IV - Dynamique des fluides visqueux.

1) Tenseur des contraintes.

$dv = \frac{1}{6} dx_1\, dx_2\, dx_3$ (3e ordre) f de volume (3e ordre)



σ_{ij} → face ⊥ à x_j
↓
proj sur l'axe i

En projection sur (Ox_1) : $-\Sigma_{11}\,dS_1 - \Sigma_{12}\,dS_2 - \Sigma_{13}\,dS_3 + \Sigma_1\,dS + \int \text{volume} = dm\,\vec{a}$

(dS_1 : (OBC), dS_2 : (OAC), dS_3 : (OAB), dS : (ABC) — 2° ordre ; volume : 3e ordre, négligé)

D'où :

$$\Sigma_1\,dS = \Sigma_{11}\,dS_1 + \Sigma_{12}\,dS_2 + \Sigma_{13}\,dS_3$$

, d'où $\longrightarrow$ $\Sigma_1 = \Sigma_{11}\underbrace{\frac{dS_1}{dS}}_{\vec{n_1}} + \Sigma_{12}\underbrace{\frac{dS_2}{dS}}_{\vec{n_2}} + \Sigma_{13}\underbrace{\frac{dS_3}{dS}}_{\vec{n_3}}$

$\Rightarrow$ $\vec{\Sigma_1} = \Sigma_{11}\vec{n_1} + \Sigma_{12}\vec{n_2} + \Sigma_{13}\vec{n_3}$

de même $\vec{\Sigma_2} = \Sigma_{21}\vec{n_1} + \Sigma_{22}\vec{n_2} + \Sigma_{23}\vec{n_3}$

$\vec{\Sigma_3} = \Sigma_{31}\vec{n_1} + \Sigma_{32}\vec{n_2} + \Sigma_{33}\vec{n_3}$

pour un fluide parfait, $\Sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$

$\Sigma_{11} = -p = \Sigma_{22} = \Sigma_{33}$.

$\vec{\Sigma} = \Sigma\,\vec{n}$

↓ tenseur des contraintes

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix} = (\Sigma_{ij})$$

Il existe des axes principaux alors

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 \end{pmatrix}$$

état de contraintes sphériques si $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \Sigma_{33} = -p$

$\vec{\Sigma} = -p\,\vec{n}$ $\longrightarrow$ fluide parfait.

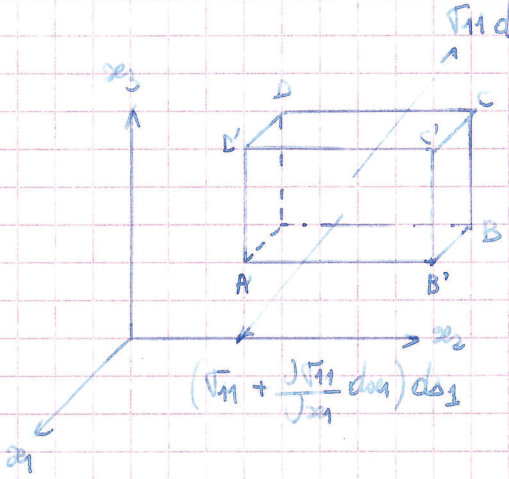
$$\Sigma = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_{11}+p & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}+p & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33}+p \end{pmatrix}$$

matrice identité I

τ_{ij} : tenseur des contraintes visqueuses

$\longrightarrow$ $\Sigma = -p\,I + \tau_{ij}$

résultante des forces exercées sur les faces d'un volume de fluide parallélépipédique.



$$\rightarrow = \left(\frac{\partial \Pi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi_{13}}{\partial x_3}\right) dv.$$

pour vol = 1

$$\rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\partial \Pi_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Pi_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Pi_{13}}{\partial x_3} \\ \pi_2 = \dfrac{\partial \Pi_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Pi_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Pi_{23}}{\partial x_3} \\ \pi_3 = \dfrac{\partial \Pi_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Pi_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Pi_{33}}{\partial x_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\pi} = \vec{\nabla}\,\vec{\Pi}$$

or $\Pi = -p_\mu (I) + \tau_\mu$

$$\vec{\pi} = -\vec{\nabla} p_\mu + \vec{\nabla}\,\vec{\tau}_\mu$$

(pour $\mu = 1$)

$$\frac{\vec{\pi}}{\rho} = \vec{f} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p_\mu + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\,\vec{\tau}_\mu$$

forces de pression ; viscosité.

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \Gamma_A \cdot \vec{OI} = \Gamma \vec{OI}$$

translation ; rotation ; déformation.

divergence

$\vec{\omega}$: $\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\vec{v} \cdot \vec{OI}$

si fluide incompressible div $\vec{C} = \vec{0}$

→ déformation → f de frottement (viscosité)

$T_\mu = 2\mu T_S$

$\bar{\bar{t}}$ tenseur déformation

$\bar{\bar{f}}$ tenseur de viscosité

coef viscosité dynamique

$$T_S = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \tau_{11} + p = 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \tau_{12} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) \\ \tau_{13} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$

3) Equations fondamentales de la dynamique des fluides visqueux.

$dm = \rho d\tau$; $d\vec{\Gamma} p\, d\tau = \rho \vec{f}\, d\tau + \vec{T}\, ds$

f de volume (m=1) ; f de surface.

$$\iiint_V d\vec{\Gamma} p\, d\tau = \iiint_{V,\tau} \rho \vec{f}\, d\tau + \iint_S \vec{T}\, ds$$

$\vec{T} \begin{vmatrix} n \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix}$

Projection sur Ox_1 :

$$\iiint_V d\Gamma_1 p\, d\tau = \iiint_{V,\tau} \rho x_1\, d\tau + \iint_S (\tau_{11} n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3)\, ds$$

équation différentielle :

$$\iiint_V d\Gamma_1 p\, d\tau = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\tau}\, d\tau$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}\right) d\tau$$

$$\rightarrow \quad a_1 \rho \, dV = \rho X_1 \, dV + \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \right) dV .$$

$$\rightarrow \quad a_1 \rho = \rho X_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + 2\mu \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$+ \mu \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 c_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right)$$

$$a_1 \rho = \rho X_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_3^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + \frac{\partial c_3}{\partial x_3} \right)$$

$\operatorname{div} \vec{c} = 0$ si incompressible.

$$\rightarrow \quad a_2 \rho = \rho X_2 - \dots$$

$$\vec{a} \rho = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \mu \vec{\Delta c}$$

$\vec{\Delta c}$: laplacien.

si $m = 1$:

$$\vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{\mu}{\rho} \vec{\Delta c}$$

$\frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique.

$$\rightarrow \quad \vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\Delta c}$$

$\vec{f}$: vol. ; $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$: pesan. ; $\nu \vec{\Delta c}$: viscosité.

dans le champ de pesanteur $\vec{f} = \vec{g} = -\vec{\nabla}(g z)$

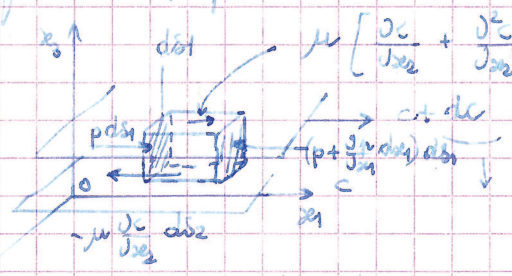
$$\vec{a} = -\vec{\nabla}(g z) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\Delta c}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (p + \rho g z) + \nu = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \hat{p} + \nu \vec{\Delta c}$$

$\hat{p}$; fluide parfait

$$\vec{\Delta c} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_3^2} \\ \\ - \quad - \end{array} \right.$$

4) signification physique du terme $\vec{\nabla}\Delta\vec{C}$



$C = f(x_2)$

$\Rightarrow dC = \frac{\partial C}{\partial x_2}dx_2$

$dS_1 = dx_2\,dx_3$ supposons $\frac{\partial C}{\partial x_2} > 0$

plus $\frac{\partial C}{\partial x_2}$ ↗ plus f ↗.

$\hat{p}$: 1ère ligne de courant rectiligne

↓ force de pesanteur équilibre la force de pression (suivant $0x_2$)

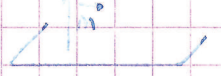
Suivant $0x_1$: $-\frac{\partial p}{\partial x_1}dx_1\,\underbrace{dS_1}_{dx_2dx_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}\,\underbrace{dx_1}_{d\tau}$

$\mu\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}dx_2\,\underbrace{dS_2}_{dx_1dx_3} = \mu\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}\,d\tau$

$d\tau = \rho\,d\tau'$ $(m=1)$

$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}$ $\quad \begin{cases} C = C_1 \\ C_2 = C_3 = 0 \end{cases}$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$



$f = -\mu\frac{\partial C}{\partial x_2}$

si $\frac{\partial C}{\partial x_2} > 0 \Rightarrow f <$ freinage.

$\frac{\partial C}{\partial x_2} < 0 \Rightarrow f >$ entraînement.

5) Unité de viscosité

μ : viscosité cinématique $\mu = \frac{f}{\frac{\partial C}{\partial x_2}} = \frac{M\,L^{-1}\,T^{-2}}{L^{-1}\,T^{-1}} = M\,L^{-1}\,T^{-1}$

MKSA : $kg\,m^{-1}\,s^{-1}$: Poiseuille (Pl)

CGS : $1\,P = \frac{1\,g}{1\,cm\cdot 1\,s} = \frac{10^{-3}\,kg}{10^{-2}\,m\cdot 1\,s} = \frac{1}{10}$ Poise (P)

eau $\mu = 10^{-3}$ Pl $= 10^{-2}$ Po

air (CNTP) $\mu = 18 \cdot 10^{-5}$ Po $= 18 \cdot 10^{-6}$ Pl

huile lubrification μ 10^{-2} à 1,2 Pl (0,1 Po → 12 Po)

gaz $\mu(T)$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \cdot \frac{1 + \frac{C}{T_0}}{1 + \frac{C}{T}} \qquad T_0 = 273\,K \text{ (sutherland)}$$

$\mu \nearrow T \nearrow$

liquide $\frac{\mu}{\mu_0} = e^{\left(\frac{T_0}{T}\right)^m}$ $m = f$(nature liquide) Walter, $\mu \searrow T \nearrow$

$\mu(P) \rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} = a^{\left(\frac{P}{P_0} - 1\right)}$ huile $a = 1{,}003$ $\mu = 101$ Po

$\downarrow$ 100

$\frac{\mu}{\mu_0} = (1{,}003)^{100} = 1{,}3$ viscosité ↗ de 30%.

$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2 T^{-1}$: $m^2 s^{-1}$ (MKS)

↑ viscosité cinématique

CGS $\frac{1\,m^2}{1\,s} = 10^4$ Stokes $= 1\,m^2/s$.

eau $\nu = 10^{-2}$ St $= 10^{-6}\,m^2/s$

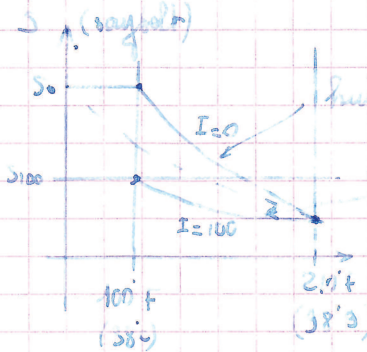
air $\nu = 14 \cdot 10^{-6}$ St $= 14 \cdot 10^{-6}\,m^2/s$

Industriellement Engler, Redwood, Saybolt
UK USA

ν temps écoulé $\begin{cases} t \text{ eau} \\ t \text{ fluide} \end{cases}$

SAE. society of Automobile engeneers.

Indices de viscosité.



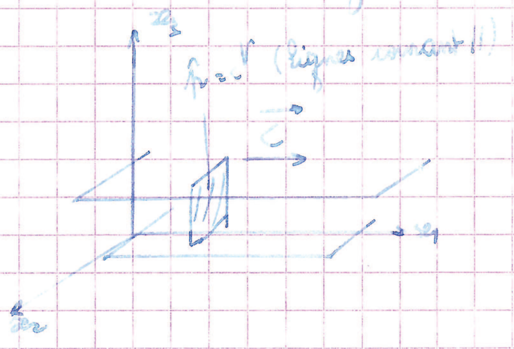
huile naphténique (très sensible à T°)

huile paraffinique (μ peu sensible à T°)

$I = \frac{So - S}{So - S100} \times 100$

6) Écoulements plans laminaires

$c = f(x_2)$



- fluide incompressible
- écoul^t permanent
- dans le champ de pesanteur
- lignes de courant rectilignes et //

$$\begin{cases} c_1 = c \\ c_2 = c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p} + \nu\Delta\vec{c} = 0$$

ρ (uniforme)

$\Delta \vec{c} \to \nu \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_1} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\rho}\frac{d\hat{p}}{dx_1} + \nu\frac{d^2c}{dx_2^2} = 0$$

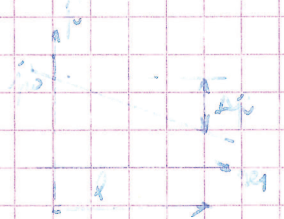
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{d\hat{p}}{dx_1} = \nu\frac{d^2c}{dx_2^2} \iff \underbrace{\frac{d\hat{p}}{dx_1}}_{f(x_1)} = \underbrace{\mu\frac{d^2c}{dx_2^2}}_{g(x_2)} = -a$$

égalité ssi c^{te}

$\dfrac{d\hat{p}}{dx_1} < 0$ (car dépl^t vers la dte) $\to a > 0$

$$\frac{d\hat{p}}{dx_1} = -a \to \hat{p} = -ax_1 + \hat{p}_0$$

$$\hat{p} = -ax_1 + \hat{p}_0$$



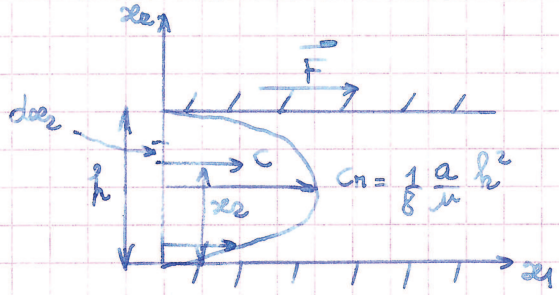
$\Delta\hat{p} = -al$

$$\frac{d^2c}{dx_2^2} = -\frac{a}{\mu} \Rightarrow \frac{dc}{dx_2} = -\frac{a}{\mu}x_2 + b$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}\frac{a}{\mu}x_2^2 + bx_2 + d$$

$\Rightarrow$ variation parabolique [illegible] $c = \dfrac{[illegible]}{[illegible]}$ b et d avec conditions aux limites

a) cas de l'écoulement entre 2 plans // fixes.



règle d'adhérence : vitesse du fluide / paroi = vitesse de la paroi

$x_{e_2} = 0 \quad c = 0 \rightarrow d = 0$

$x_{e_2} = h \quad c = 0 \rightarrow 0 = -\frac{1}{2}\frac{a}{\mu}h + b \rightarrow b = \frac{ah}{2\mu}$

$\rightarrow c = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}(h x_{e_2} - x_{e_2}^2) \qquad \frac{dc}{dx_{e_2}} = 0 \Rightarrow c_{MAXI} \Rightarrow x_e = \frac{h}{2}$

$\rightarrow c_{MAXI} = \frac{1}{8}\frac{a}{\mu}h^2$

$a = \frac{\Delta \hat{p}}{l}$ $\Delta \hat{p}$: perte de charge pour une longueur l

↑ perte de charge / unité de longueur.

$f = -\mu \frac{\partial c}{\partial n} S \rightarrow$ ici $f = -\mu \frac{\partial c}{\partial x_{e_2}} S$

Avant

$\frac{\partial c}{\partial x_{e_2}} = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}(h - 2x_{e_2}) = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}(h - 2h) = -\frac{1}{2}\frac{ah}{\mu}$

$\rightarrow f = \frac{ah}{2} S$

$Q_v = ?$

$dQ_v = c\,ds = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}(h x_{e_2} - x_{e_2}^2)\,dx_{e_2}$

$dx_{e_2}\vec{x}_{e_2} = d\vec{x}_{e_2}$

↓ enverqure 1

$Q_v = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}\int_0^h (h x_{e_2} - x_{e_2}^2)\,dx_{e_2} = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}\left(\frac{h x_{e_2}^2}{2} - \frac{x_{e_2}^3}{3}\right)_0^h = \frac{1}{12}\frac{a}{\mu}h^3 = \frac{\Delta \hat{p}}{12\mu l}h^3$

$\rightarrow \Delta \hat{p} = \frac{12\mu l Q_v}{h^3}$

$\vec{C} \cdot \frac{Q_v}{S}$ or $S = h\vec{y}_{e_3} \cdot h \rightarrow C = \frac{Q_v}{h}$

↓ 1

vitesse moyenne

$\rightarrow \Delta \hat{p} = \frac{12\mu l h C}{h^2} = \frac{12\mu l C}{h}$

$\Delta H = \frac{1}{2g} \xi \bar{c}^2$ (perte de charge singulière.)

$\Downarrow$ $\Delta p_v = \tau_0 \Delta H = \frac{1}{2} \xi \rho \bar{c}^2 = \frac{1}{2} \lambda \rho \frac{l}{h} \bar{c}^2$

$\tau_0 \rightarrow \rho g$; λ lambda

il faut $\frac{12 \mu l \bar{c}}{h^2} = \frac{1}{2} \lambda \rho \frac{l}{h} \bar{c}^2 \Rightarrow \lambda = \frac{24 \mu}{h \bar{c} \rho}$

$\lambda = \frac{24}{\left(\frac{h \bar{c}}{\nu}\right)}$ avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ $\lambda = \frac{24}{Re}$

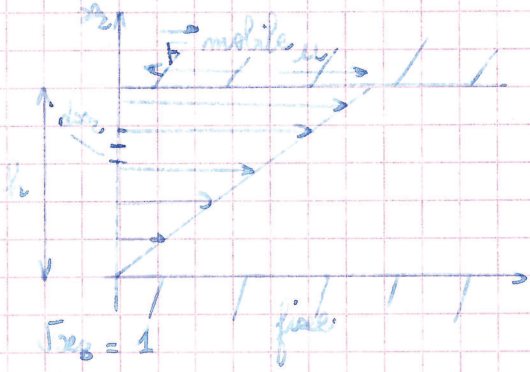
ν cinémat ; nombre de Reynolds

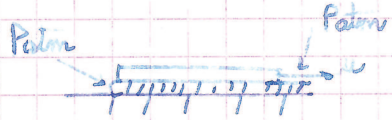
$Re = \frac{h \bar{c}}{\nu} = \frac{L L T^{-1}}{L^2 T^{-1}} = 1$ → sans dimension.

Le régime est laminaire si $Re < 1000$.

si $Re > 1000$ régime turbulent.

2) Cas d'un écoult entre 1 plan fixe et un mobile.





$\downarrow$ manque $c = -\frac{1}{2} \frac{a}{\mu} x_2^2 + b x_2 + d$ $a = 0$ $a = \frac{\Delta p_v}{l}$

$d = 0$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow c = b x_2$ si $x_2 = h_2$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right) \rightarrow b = \frac{v}{h_2}$

$\rightarrow c = \frac{v}{h_2} x_2$; $dS = dx_2 \int x_3 = dx_2$

$\rightarrow q_v = \int_0^{h_2} c \, dx_2 = \frac{v}{h_2} \int_0^{h_2} x_2 \, dx_2 = \frac{1}{2} \frac{v h_2^2}{h_2} = \frac{v h_2}{2}$

$\vec{f}$ sur la plaque mobile

$f = -\mu \frac{\partial c}{\partial x_2} = -\mu \frac{v}{h_2}$

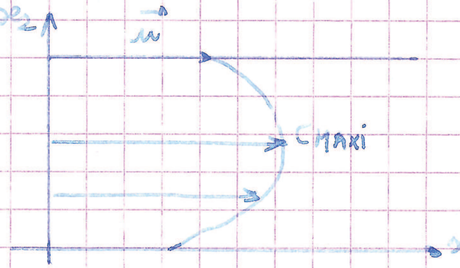
3) 1 plan mobile + plan fixe $\Delta p_v \neq 0$

$c = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p_v}{l} x_2^2 + b x_2 + d \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow d = 0$.

$x_2 = h \quad c = u$

$\rightarrow \quad u = -\frac{1}{2}\frac{a}{\mu}h^2 + bh \quad \rightarrow \quad b = \frac{u}{h} + \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}h$

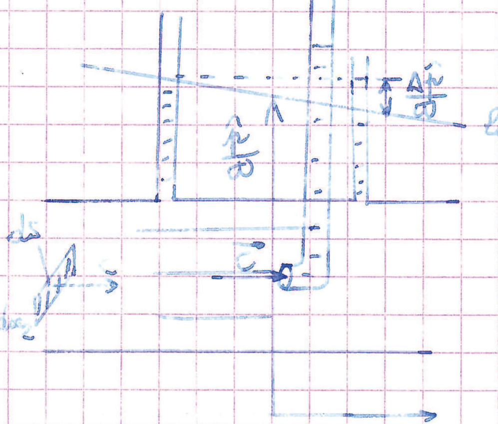
$$c = -\frac{1}{2}\frac{a}{\mu}x_2^2 + \left(\frac{u}{h} + \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}h\right)x_2$$



$\frac{dc}{dx_2} = 0 \rightarrow x_2 = \frac{h}{2} + \frac{\mu}{ah}u$

$$Q_v = \int_0^h c\,dx_2 = \int_0^h \left(-\frac{1}{2}\frac{a}{\mu}x_2^2 + \left(\frac{u}{h} + \frac{ah}{2\mu}\right)x_2\right)dx_2$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{a}{\mu}h^3 + \left(\frac{u}{h} + \frac{ah}{2\mu}\right)\frac{h^2}{2} = \frac{1}{12}\frac{a}{\mu}h^3 + \frac{uh}{2}$$



$c = f(x_2) \rightarrow$ hauteur de charge moyenne

$$H = \frac{\hat{p}}{\varpi} + \frac{c^2}{2g}$$

↑ piézo

donc $\bar{H} = \frac{\hat{p}}{\varpi} + \frac{\alpha\bar{c}^2}{2g} \qquad \bar{c} = \frac{Q_v}{S}$

↑ moyenne

$E_{c/V} = \hat{p} + \frac{1}{2}\rho c^2 = p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho c^2$

débit d'énergie à travers ds $= \left(\hat{p} + \frac{1}{2}\rho c^2\right) c \times ds$

($c \times ds$: débit par unité de temps)

$\rightarrow$ débit total $= \iint_S \left(\hat{p} + \frac{1}{2}\rho c^2\right) c\,ds =$

$= \left(\hat{p} + \frac{1}{2}\alpha\rho\bar{c}^2\right)\bar{c}\cdot S$

(énergie moyenne)

$\iint \hat{p}\,c\,ds + \iint \frac{1}{2}\rho c^3\,ds = \hat{p}\,\bar{c}\,S + \frac{1}{2}\alpha\rho\bar{c}^3 S$

$\Rightarrow \iint c^3\,ds = \alpha\bar{c}^3 S$

calcul de α dans le cas (i) [2 plans fixes].

$c = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu}(h x_2 - x_2^2)$; $ds = dx_2 dx_3$ $(\int dx_3 = 1)$

$$\rightarrow \int \frac{1}{\rho}\frac{a^3}{\mu^3}(h x_2 - x_2^2)^3 dx_2 = \alpha \bar{c}^3 S = (\iint c^3 ds)$$

$$Q_M = \frac{1}{12}\frac{a}{\mu} h^3 \; ; \; \bar{c} = \frac{1}{12}\frac{a}{\mu} h^2$$

$$\int \frac{1}{\rho}\frac{a^3}{\mu^3}(h x_2 - x_2^2)^3 dx_2 = \alpha \frac{1}{(12)^3}\frac{a^3}{\mu^3} h^n \cdot h$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho}\int (h^3 x_2^3 - 3h^2 x_2^4 + 3h x_2^5 - x_2^6)\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{h^3 x_2^4}{4} - \frac{3h^2 x_2^5}{5} + \frac{3h x_2^6}{6} - \frac{x_2^7}{7}\right]_0^h = \frac{1}{\rho}\left[\frac{h^7}{4} - \frac{3h^7}{5} + \frac{h^7}{2} - \frac{h^7}{7}\right]$$

$$= \frac{h^7}{\rho}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \frac{h^7}{\rho \times 140} = \frac{\alpha}{(12)^3} h^7$$

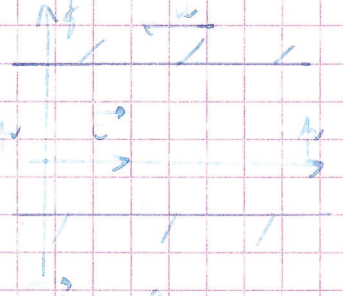
$$\Rightarrow \alpha = \frac{(12)^3}{2 \times 140} = \frac{54}{35} > 1$$

En régime laminaire l'énergie d'un fluide est :

$$E = T + \frac{1}{2}\alpha \rho c^2 \quad \text{ou} \quad T = \frac{\tau_w}{\rho D} + \frac{\alpha \bar{c}^2}{2g}$$

En régime turbulent $T = \frac{\tau_w}{\rho D} + \frac{\bar{c}^2}{2g}$

Ex.



éq de fluide visqueux.

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{c}$$

(lignes de courant à $v = f(\xi) = 0$)

$\rightarrow \vec{\nabla} p = \rho \Delta \vec{c}$

éq de mouvement $\rightarrow$ dans celles

$$\vec{\nabla} p = \mu \Delta \vec{c}$$

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 c}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 c}{dy^2} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{l}$$

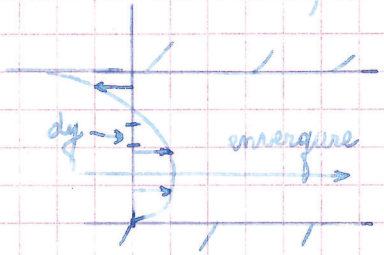
$$\rightarrow \frac{dc}{dy} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{l} y + s \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{l} y^2 + s y + cte$$

conditions aux limites

$y=0 \quad c=0 \rightarrow d=0$

$y=e \quad c=-w \rightarrow b = -\frac{w}{e} + \frac{1}{2}\frac{\Delta p e}{l\mu}$

$\rightarrow c = -\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{l\mu} y^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta p e}{l\mu} - \frac{w}{e}\right) y \rightarrow$ parabole



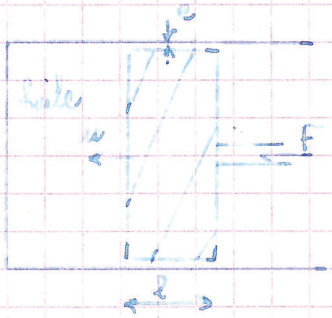
$\frac{dc}{dy}(y)$ tq $c=0$ $\begin{cases} y=0 & c=0 \\ y_0 & c=1 \end{cases} \rightarrow y_0 = e - \frac{2l\mu - w}{2\Delta p}$

On a $ds = dy \times 1$ (énergie)

$dQ_v = c\,ds = c\,dy \rightarrow Q_v = \int_0^e v\,dy = \int \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{l\mu} y^2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta p e}{l\mu} y - \frac{w}{2} y\right) dy = \left[-\frac{1}{6}\frac{\Delta p}{l\mu} y^3 + \frac{1}{4}\frac{\Delta p e}{l\mu} y^2 - \frac{w}{2} y^2\right]_0^e$

$Q_v = \frac{1}{12}\frac{\Delta p e^3}{l\mu} - \frac{we}{2}$ / énergie unité.

E.X :



$e \ll l$

$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2}$

On a $Q_v = \frac{1}{12}\frac{\Delta p e^3}{l\mu} - \frac{we}{2}$

ici $Q_v = \left(\frac{1}{12}\frac{\Delta p e^3}{l\mu} - \frac{we}{2}\right) 2\pi R = w = w\pi R^2$

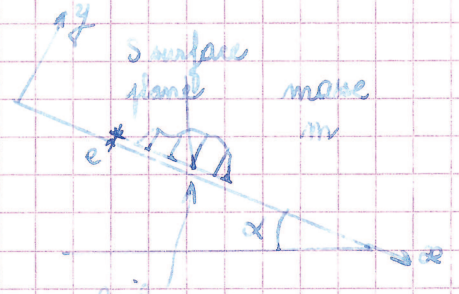
(énergie 1 ; énergie de l'écoulement ⊥ F)

$\rightarrow w = \frac{F e^3}{6\mu l \pi R^2 (R+l)} \simeq \frac{F e^3}{6\mu l \pi R^3}$

ΣF_{ext}

AN : $v = 5{,}3$ cm/s.

EX.



$z=0$ $\frac{dz}{dt} = 0$ (condition limite)

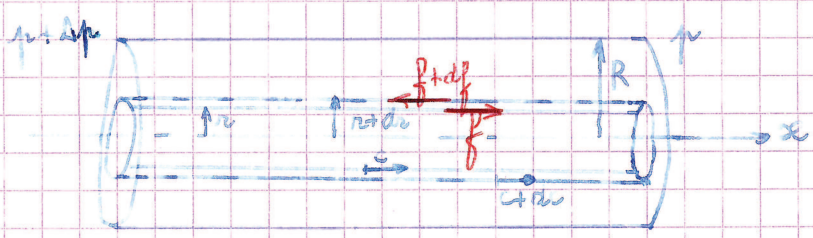
1) équation du mvt.

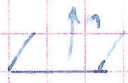
2) Intégration de l'équation

→ tracer $\frac{dz}{dt} = f(t)$

→ tracer $z(t)$

Écoulement dans une conduite cylindrique.





f donnée par/dans : $= -\mu \frac{dv}{dr} \cdot S$

$f - \mu \frac{dv}{dr} \cdot S$

$v \nearrow$ lorsque $r \searrow$ donc $\frac{dv}{dr} < 0$

force s'exerçant sur le cylindre de rayon r : $= -\mu \frac{dv}{dr} 2\pi r l > 0$

force s'exerçant sur le cylindre de rayon $r+dr$:

$= \mu \left[\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right] 2\pi l (r+dr)$

+ vers dessus, dessus.

variation de $\frac{dv}{dr}$ ($r \to r+dr$).

Au final : force résultante $= 2\pi r \mu \left[\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right] l \, dr \times \frac{1}{2\pi r l dr}$

exercée sur le volume

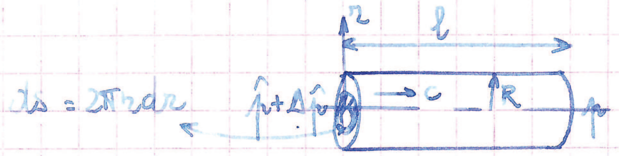
par unité de volume : $\mu \left[\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right]$

$\frac{\eta}{\rho} \left[\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right]$.

$\vec{f_v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\Delta} \vec{v}$

$= 0 \left[\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right]$

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left[\frac{d^2c}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dc}{dr}\right] = -a = \frac{-\Delta p}{\ell}$$ ← perte de charge pour l'unité longueur.



avec $a = \frac{\Delta p}{\ell}$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dc}{dr}\right) = \frac{-a}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dc}{dr}\right) = \frac{-a}{\mu}r \Rightarrow r\frac{dc}{dr} = -\frac{1}{2}\frac{a}{\mu}r^2 + b$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dr} = -\frac{1}{2}\frac{a}{\mu}r + \frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{4}\frac{a}{\mu}r^2 + b\log r + d$$

$r = 0 \quad \log 0 = -\infty$

→ $c = -\infty$ sur l'axe → impossible ⇒ il faut $b = 0$.

↳ $c = -\frac{1}{4}\frac{a}{\mu}r^2 + d$

condition d'adhérence sur la paroi $\begin{cases} r = R \\ c = 0 \end{cases}$ → $0 = -\frac{1}{4}\frac{a}{\mu}R^2 + d$

D'où $c = \frac{1}{4}\frac{a}{\mu}(R^2 - r^2) = \frac{1}{4}\frac{\Delta p}{\mu\ell}(R^2 - r^2) = c$

sur l'axe $c_{max} = \frac{1}{4}\frac{\Delta p}{\mu\ell}R^2$

$$Q_v = \iint c\, ds = \int_0^R 2\pi r c\, dr = 2\pi\int_0^R \frac{1}{4}\frac{\Delta p}{\ell\mu}(R^2 - r^2)\, r\, dr$$

($ds = 2\pi r\, dr$)

$$Q_v = \frac{\pi}{2}\frac{\Delta p}{\ell\mu}\int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = \frac{\pi}{2}\frac{\Delta p}{\ell\mu}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi\,\Delta p\,R^4}{8\,\ell\,\mu}$$

Inversement

or $\bar{c} = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_v}{\pi R^2} \rightarrow Q_v = \pi R^2\bar{c}$

$$\Delta p = \frac{8\ell\mu Q_v}{\pi R^4} \Longrightarrow \Delta p = \frac{8\pi\ell\mu R^2\bar{c}}{\pi R^4} = \frac{8\ell\mu\bar{c}}{R^2}$$

Entre 2 plans $\Delta p = \frac{1}{2}\lambda\rho\frac{\ell}{D}\bar{c}^2$ et $\lambda = \frac{64}{Re}$ $Re < 2000$ (régime laminaire)

perte de charge singulière $\Delta p = \frac{1}{2}\xi\rho\bar{c}^2$

→ $\Delta p = \frac{8\ell\mu\bar{c}}{R^2} = \frac{1}{2}\lambda\rho\frac{\ell}{D}\bar{c}^2$ [illegible] pour.

Dans une tuyau $\Delta p_f = \frac{1}{2} \lambda \rho \frac{L}{D} \bar{v}^2$ $Re < 2000$ (régime laminaire). M+S

D'où $\frac{8 L \mu \bar{v}}{R^2} = \frac{1}{2} \lambda \rho \frac{L}{D} \bar{v}^2$

$= \frac{D^2}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{64 \mu}{D \rho \bar{v}} = \frac{64}{D \bar{v} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)} \leftarrow \nu$ $= \frac{64}{\left(\frac{D \bar{v}}{\nu}\right)}$ → nbre sans dimension

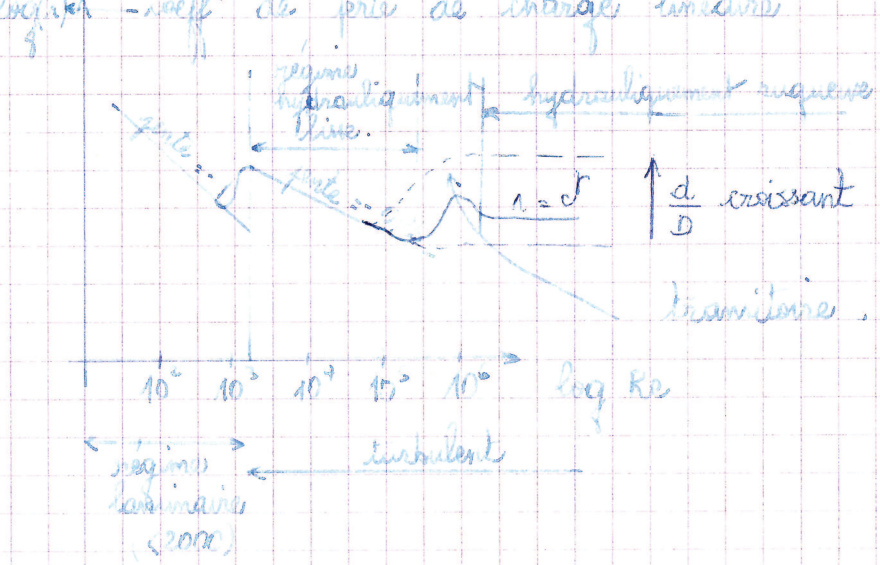
$\Rightarrow \lambda = \frac{64}{Re}$

Valable seulement en régime laminaire

Ecoulement en régime turbulent

les Δp_f (plans et tuyau) valable mais λ différent.

$\log \lambda$ - coeff de perte de charge linéaire



$\lambda = \frac{64}{Re} \rightarrow \log \lambda = \log 64 - \log Re$

droite $Y = A - X$ (pente < -1)

$-0,25$

$\lambda = f(\frac{\varepsilon}{D}, Re)$ loi de Blasius.

rugosité $= \frac{\varepsilon}{D}$ ← dimension du grain de la paroi

→ ρ constante.

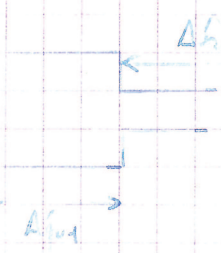
charge $= p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$ (énergie) → en laminaire.

$\bar{v} = v + f \rho g + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$ → en turbulent.

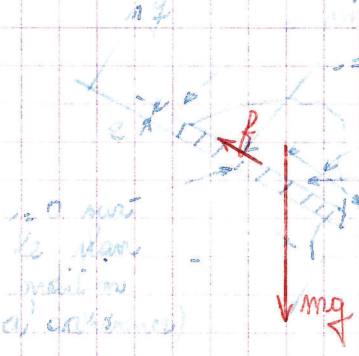
$\bar{v} = v + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$ (Bernoulli)

$\bar{v} \rightarrow v \rightarrow \bar{v} = v$ $\quad h_1 = h_2$

$\Rightarrow h_1 - h_2 = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 - \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \rho (\bar{v}^2 - \bar{v}^2) = \frac{1}{2} \rho (\bar{v} + \bar{v})(\bar{v} - \bar{v})$



Ex :



$\Rightarrow \quad x_e = \frac{\varepsilon}{a} + C' e^{-at}$

$\Rightarrow$ sol gle $\quad x_e = \frac{\varepsilon}{a} + C' e^{-at} + \frac{b}{a} t$

$x_e = 0$
$t = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\varepsilon}{a} + C' + \frac{b}{a} \underbrace{t}_{0} \quad \rightarrow \quad C' = -\frac{\varepsilon}{a}$

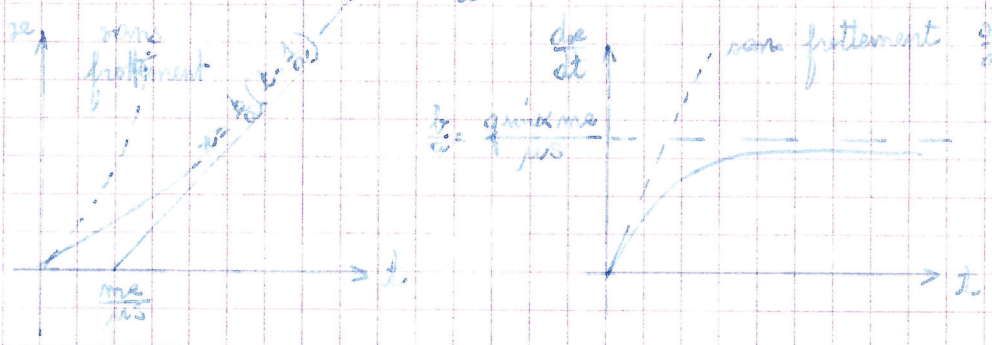
$\rightarrow \quad x_e = \frac{\varepsilon}{a} - \frac{\varepsilon}{a} e^{-at} + \frac{b}{a} t$

$\dot{x}_e = -\frac{\varepsilon}{a} \times (-a) e^{-at} + \frac{b}{a}$

$t = 0 \quad C = -\frac{b}{a}$

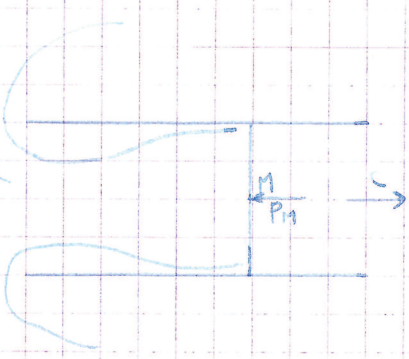
$\rightarrow \quad x_e = \frac{b}{a^2} (-1 + e^{-at}) + \frac{b}{a} t$

apd $t \rightarrow \infty \quad x_e \rightarrow -\frac{b}{a^2} + \frac{b}{a} t = \frac{b}{a} (t - \frac{1}{a})$



EX :

$v_\infty = 0$
$p_\infty = p_{atm}$



charge : $H = \frac{p}{\omega} + z + \frac{c^2}{2g}$

à l'∞ : $H_\infty = \frac{p_{atm}}{\omega} + \frac{c_\infty^2}{2g} = 0$

p efflux → $p_{atm} = 0$

$H_M = \frac{p_M}{\omega} + \frac{c^2}{2g}$ → $\Delta H = H_\infty - H_M = 0 - \frac{p_M}{\omega} - \frac{c^2}{2g}$

tout le volume de fluide y compris dans le tuyau jusqu'en M.

th Euler $Q_m (\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \sum \vec{f}$

en proj / axe du tube : $Q_m (c - c_\infty) = -p_M \cdot S$

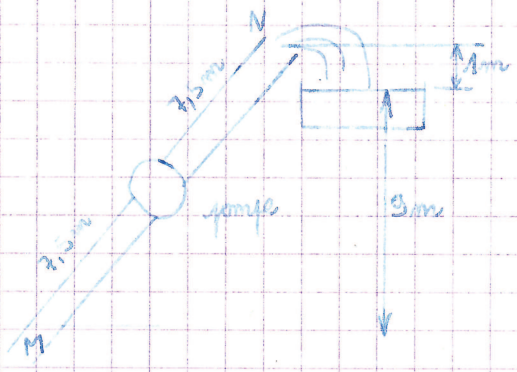
$\Rightarrow \rho S c^2 = -p_M S$

$\Rightarrow p_M = -\rho c^2$ (dépression)

$\Delta H = -\frac{p_M}{\rho g} - \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{2g}$ (en m)

Δp (J/m^3) $= \Delta H \omega = \frac{1}{2} \rho c^2$ (énergie cinétique par unité de volume)

EX :



$c = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_v}{\frac{\pi D^2}{4}} = 1,433$ m/s $D = 0,2$

$Q_v = 2,1$ m³/min $= \frac{2,1}{60} = 0,035$ m³ s⁻¹.

Fluide parfait

th Bernoulli entre M et N :

$\frac{p_M}{\omega} + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2 + E = \frac{p_N}{\omega} + \rho g z_N + \frac{1}{2} \rho v_N^2$

$p_M = p_{atm}$; $v_M = v_{tuyau}$; E pompe ; $p_N = p_{atm}$; $z_N = 1$ m ; $z_M = 0$; $v_N = 0$

$\Rightarrow E = \rho g z_N + \frac{1}{2} \rho v_M^2 = 10^3 \times 10 \times 1 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times \left(\frac{2,1}{60}\right)^2 = 1,0123 \cdot 10^4$ J/m³

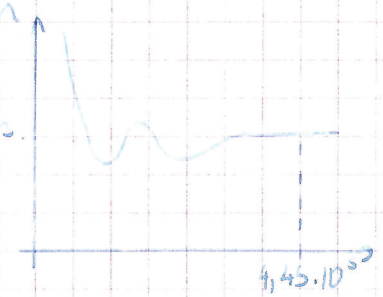
fourni à la pompe $P' = \frac{P}{\eta} = \frac{4 \times 10^3}{\eta} = 7220\,W = 4{,}7\,kW = 6{,}4\,ch$

$1\,ch = 736\,W$

On tient compte de la viscosité maintenant.

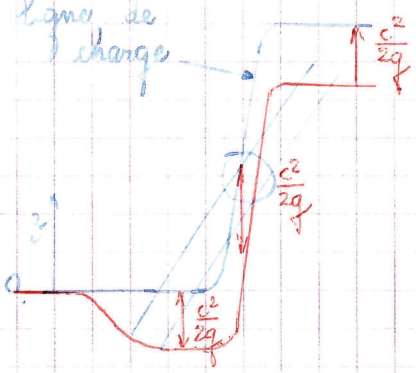
$\nu = 10^{-6}\ m^2/s$

$Re = \frac{v D}{\nu} = \frac{4{,}456 \times 0{,}1}{10^{-6}} = 4{,}456 \cdot 10^5$



$\lambda = \lambda^{te}$ (régime turbulent : hydrauliquement rugueux)

perte de charge singulière $\Delta H =$



$H_0 = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = 0$ } hauteur de charge $H = \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$

hauteur piézométrique $H_p = \frac{p}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + z$

$H - H_p = \frac{v^2}{2g}$

$H_N = \frac{p_{atm}}{\rho g} + z_N$

Bernoulli entre 0 et N.

$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0 - \Delta H_{0,1} - \Delta H_{1N} = \frac{p_N}{\rho g} + \frac{v_N^2}{2g} + z_N$

$\frac{p'}{\rho g} - \Delta H_{0,1} - \Delta H_{1N} = z_N + \frac{v^2}{2g}$

$v = \sqrt{2g \times \frac{\dots}{\dots}} \Rightarrow t = \frac{\dots}{v}$

UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE

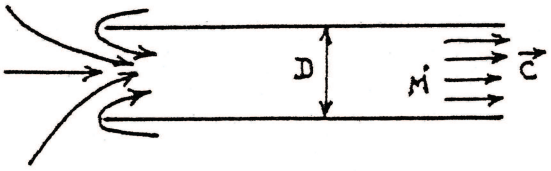
SESSION DE SEPTEMBRE 1987

LICENCE DE TECHNOLOGIE DE CONSTRUCTION ET GENIE MECANIQUE

U 2 - EPREUVE DE MECANIQUE DES FLUIDES

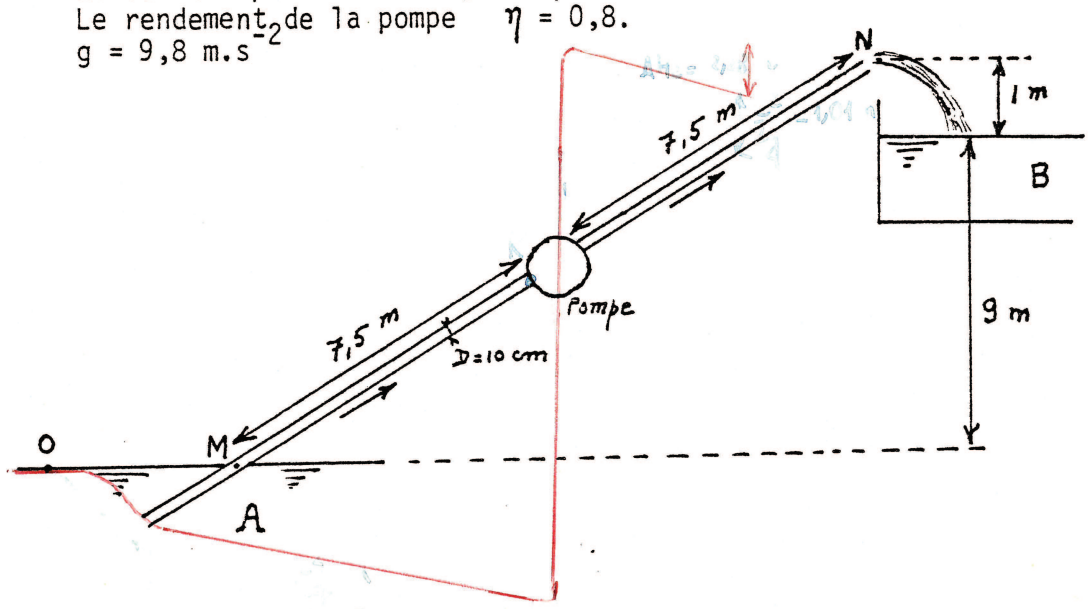
Durée : 2 h30

I - Montrer que l'aspiration d'un fluide par une conduite cylindrique (ajutage rentrant de Borda) s'accompagne d'une perte de charge singulière équivalente à l'énergie cinétique du fluide.



II - Une station de pompage puise de l'eau dans un bassin A et alimente un bac dont l'eau est à un niveau de 9 m au-dessus de celui de A. L'installation comporte une pompe placée au milieu d'une conduite de 15 m de long, de section circulaire de diamètre D = 10 cm, la sortie (en N) se faisant librement à 1 m au-dessus du niveau de l'eau B.

Le débit imposé est de 2,1 m^3 par minute.
Le rendement de la pompe $\eta = 0,8$.
$g = 9,8\ m.s^{-2}$



1) Dans l'hypothèse d'un fluide parfait, en négligeant toute perte de charge, calculer la puissance qu'il faut fournir à la pompe pour obtenir le débit de 2,1 m3. mn^{-1} .

Tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique (en valeurs efficaces) de O (surface libre de A) à N.

2) On tient compte maintenant de la viscosité de l'eau ($\nu = 10^{-6}$ M K S) Calculer le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement et en déduire le coefficient de perte de charge linéaire Λ à l'aide de la courbe $\Lambda = f(R_e)$. Préciser la nature de l'écoulement.

3) On admet que la perte de charge singulière due à l'aspiration se situe entre l'entrée du tuyau et le point M et qu'elle est égale à la valeur donnée dans I (on négligera la perte de charge régulière dans cette partie de la conduite).

.../...

Calculer la perte de charge globale (en $J.m^{-3}$ et en hauteur de charge) pour l'ensemble de la conduite.

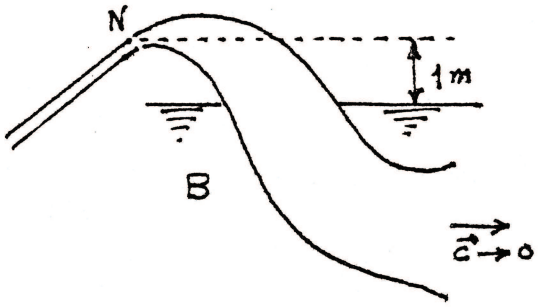
En déduire la puissance à fournir à la pompe pour obtenir le débit imposé.

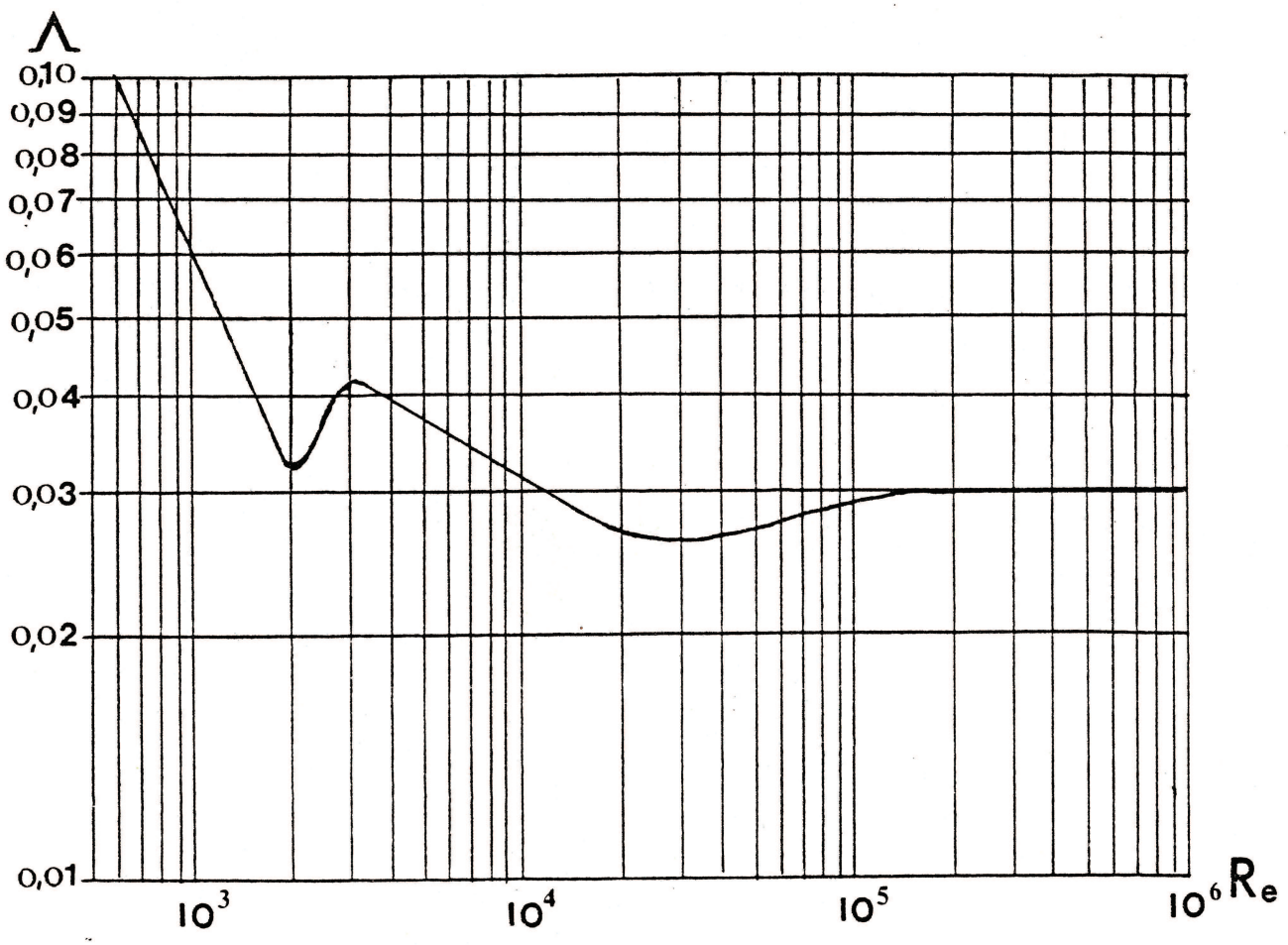
4) Tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique efficaces de O à N.

A quel endroit de la conduite la pression est-elle la plus faible ? Vérifier si en ce point, il y a ou non cavitation, c'est à dire apparition de vapeur d'eau.

La pression maximale de vapeur d'eau à la température ambiante est de $2.\ 10^3$Pa. La pression atmosphérique $p_{atm} = 10^5$ Pa.

5) On modifie le dispositif en plaçant à la sortie N un diffuseur divergent plongeant dans l'eau du bac B. Quel est le gain (en %) ainsi obtenu sur la consommation d'énergie de la pompe (le débit restant inchangé) ?





$$\frac{P_h}{\varpi Q_v} - \Delta H_{0M} - \Delta H_{MN} = z_N + \frac{c^2}{2g}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \lambda \rho \frac{l}{D} c^2 \qquad (l = 15\,m)$$

$$\Delta H_{MN} = \frac{\Delta p}{\varpi} = \frac{\lambda}{2g} \frac{l}{D} c^2 = 4{,}56\,m$$

$$\longrightarrow P = 7103\,W = 7{,}1\,kW = 9{,}7\,CV.$$

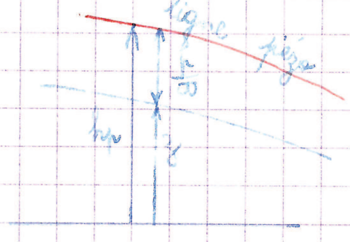
$$\Delta H_1 = \frac{\Delta H_{MN}}{2} = \frac{4{,}56}{2} = 2{,}28\,m = \frac{\lambda}{2g} \frac{l_1}{D} c^2 \qquad (l_1 = 7{,}5\,m)$$

(voir feuille)

$$h_{piézo} = \frac{p}{\varpi} + z \longrightarrow \frac{p}{\varpi} = h_p - z$$

ligne charge

(différence entre hauteur piézo et côte du pt)



en K p_K est minimale $\quad h_K = \frac{p_K}{\varpi} + z_K$ (z_K = 5 m)

$$h_K = -1 - 2{,}28 - 1 = -4{,}28\,m$$

Donc $p_K = (h_K - z_K)\,\varpi = (-4{,}28 - 5) \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 = -90944\,Pa$ (efficace)

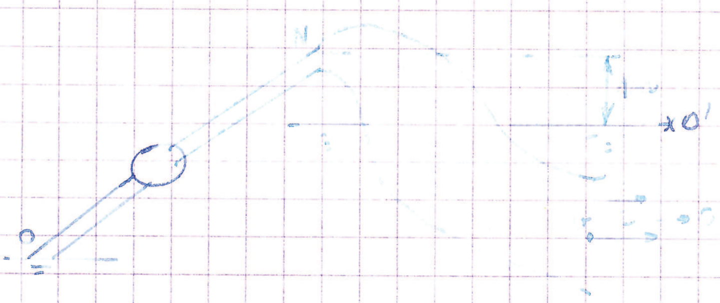
en valeur absolue $\quad p_K = p_{atm} - 90944$

$$= 10^5 - 0{,}90944 \cdot 10^5 = 9056\,Pa$$

p_{maxi} de vapeur saturante = 2000 Pa.

il y a cavitation si $p \leq p$ max de vapeur saturante.

ici pas de cavitation.



il y a ... entre O et O'. ... énergie fournie pompe $= \frac{\eta P}{Q_v \varpi}$

$$\frac{p_0}{\varpi} + z_0 + \frac{c_0^2}{2g} + \frac{E}{\varpi} - \Delta H = \frac{p_{0'}}{\varpi} + z_{0'} + \frac{c_{0'}^2}{2g}$$

charge en O $\qquad$ perte de charge $(\Delta H_{0M} + \Delta H_{MN})$ $\quad$ 2,5 m

$P = \underset{J/m^3}{E} \times Q_v$ — P fournie au fluide

$P' = \dfrac{P}{\eta}$ (fournie au moteur)

$\Rightarrow P = \eta P'$ & $p_G = p_{atm} + \rho g (z_0 - z_G)$

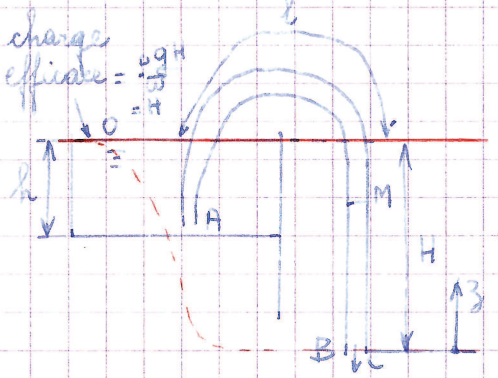
$z_0' = z_G + z_0 - z_0'$

$\dfrac{\eta P'}{Q_v \varpi} = \Delta H + z_0' = 14{,}57\ m$ (avec diffuseur)

sans diffuseur $\dfrac{\eta P}{Q_v \varpi} = 16{,}57\ m$

différence relative $= \dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{16{,}57 - 14{,}57}{16{,}57} = 12\ \%$

EX: charge efficace $= \dfrac{\rho g H}{\varpi} = H$



supposons que le liquide vienne en M

th Bernoulli entre O et M (z en [illegible] pour signes > 0)

$p_{atm} + g\rho z_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_M + g\rho z_M + \frac{1}{2}\rho v^2$

(p_M = p_{atm})

$g\rho H = g\rho z_M + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{écoulement} \Rightarrow\ > 0}$

$\Rightarrow \rho g H - \rho g z_M > 0 \Rightarrow z_M < H$ (condition amorçage du syphon)

th Bernoulli entre O et B

$p_{atm} + \rho g H + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2$ (en B)

$\Rightarrow$ [illegible] $\sqrt{2gH}$ (A)

$Q_v =$ [illegible] $\sqrt{2 \times 9{,}8 \times}$ [illegible] $= 0{,}$[illegible]$\cdot 10^{-}$[illegible] m^3/s.

charge en O : $\dfrac{p_{atm}}{\varpi} + z_0 + \dfrac{v^2}{2g} = H = 6\ m$ (en rouge)

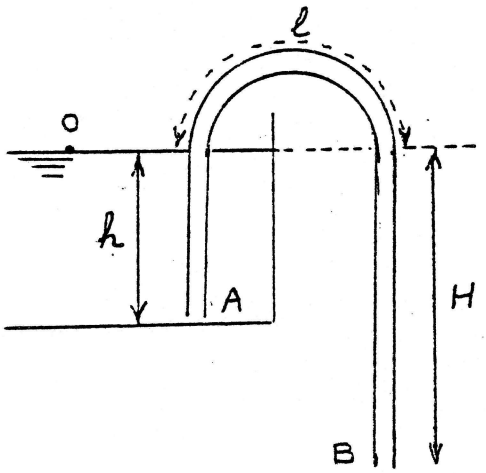
$h_M = H - \dfrac{v^2}{2g}$ or, avec (A) $H = \dfrac{v^2}{2g}$

[illegible]

MECANIQUE DES FLUIDES

ETUDE D'UN SIPHON

Un tuyau de section circulaire S=6 cm² plonge en A au fond d'un bassin contenant de l'eau sur une hauteur constante h = 4 m, l'autre extrémité B débouchant dans l'air à une distance H = 6m au-dessous du niveau de la surface libre. La partie de la canalisation se trouvant au-dessus de ce niveau a une longueur l = 3 m.



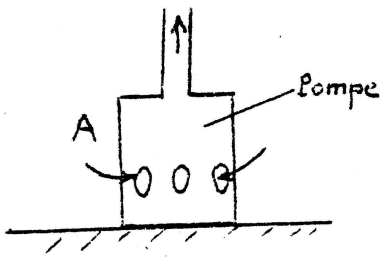
1) A quel niveau l'eau doit-elle être aspirée par l'embouchure B pour que le siphon s'amorce ?

2) Le siphon étant amorcé, calculer le débit d'évacuation en négligeant toute perte de charge dans l'écoulement.
Tracer la ligne de charge et la ligne piezométrique entre O (surface libre où la vitesse est nulle) et B.

3) On tient compte maintenant de la perte de charge dans la conduite, le coefficient de perte de charge linéaire $\Lambda = 0{,}02$ dans les conditions de l'écoulement. A la perte de charge régulière dans le siphon s'ajoute une perte de charge singulière à l'entrée A qui est équivalente à l'énergie cinétique du fluide. Calculer le débit volumique réel.

Tracer la ligne de charge et la ligne piezométrique entre O et B.

4) Dans le but de porter le débit à 3 litres par seconde, on place en A une pompe immergée dont le rendement est de 0,8.
Quelle doit-être la puissance fournie à la pompe pour obtenir le débit souhaité ?



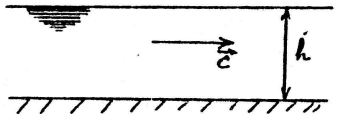
$g = 9{,}8\ m.s^{-2}$

LICENCE DE TECHNOLOGIE DE CONSTRUCTION

U2 - MECANIQUE DES FLUIDES

On considère un écoulement permanent dans un canal dont le profil est rectangulaire ayant une largeur ℓ et contenant de l'eau sur une profondeur h. On admettra que ℓ est suffisamment grand devant h pour pouvoir négliger l'influence des parois latérales.

I- On suppose tout d'abord le fond du canal (ou radier) horizontal. L'eau considérée comme un fluide parfait s'écoule avec la vitesse uniforme $\vec{c}$.



Quels sont les niveaux atteints par l'eau dans des tubes de pression statique et totale placés dans le courant ?

En déduire la position de la ligne piézométrique et de la ligne de charge de l'écoulement.

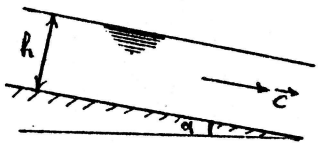
II- Le fond du canal est maintenant incliné d'un petit angle α avec l'horizontale (on écrira sin $\alpha \simeq \alpha$ et cos $\alpha \simeq 1$).

1°-Si le fluide était parfait, quelle serait la position de la ligne piézométrique et de la ligne de charge ? Montrer que la vitesse $\vec{c}$, ainsi que la hauteur h varierait le long du canal en admettant que la cote de la surface libre décroît dans le sens de l'écoulement.

2°-En réalité, le fluide est visqueux et il y a perte de charge le long de l'écoulement.

a- On admet, dans une première approximation, que la vitesse $\vec{c}$ est uniforme dans la section et constante tout le long de l'écoulement ainsi que la hauteur h.

Que devient, dans ces conditions, la position de la ligne de charge ?



A quelle forme d'énergie est emprunté le travail dépensé sous forme de frottements ? La perte de charge se retrouvant sous forme de chaleur, calculer l'élévation de température de l'eau au bout d'un parcours d'un kilomètre ($\alpha = 0{,}1$ rd et $g = 10\ m.s^{-2}$).

On désigne par H_s la hauteur de la ligne de charge comptée à partir du radier (appelée aussi hauteur de charge spécifique).

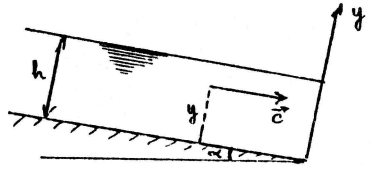
- Pour un débit volumique Q_v donné à travers la section du canal, étudier les variations de H_s en fonction de h. Calculer en particulier la grandeur h correspondant à la valeur minimale de H_s. Tracer la courbe représentative de H_s en fonction de h. Montrer que, pour une hauteur H_s donnée, il existe deux valeurs possibles de h correspondant à deux régimes différents d'écoulement.

- Pour une valeur donnée de H_s, déterminer la variation du débit Q_v en fonction de h. Calculer la valeur de h pour que le débit soit maximal. Calculer la valeur maximale du débit pour $H_s = 15$ cm et $\ell = 1$ m.

b- En fait, la vitesse n'est pas constante dans une section donnée. En supposant l'écoulement laminaire, déterminer, pour une pente α donnée et une hauteur h constante, la loi de variation de la vitesse c en fonction de la cote y, comptée à partir du radier.

La viscosité cinématique de l'eau est υ et on admettra que la vitesse est maximale sur la surface libre.

Déterminer le débit volumique Q_v et en déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.



N.B. On prendra dans tout le problème la pression atmosphérique comme origine des pressions.

Toutes les questions peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

ligne piézo (en pointillé)

perte de charge singulière : $\Delta p = \frac{1}{2} \rho v^2$ (J/m³) (en A)

perte de charge régulière : $\Delta p = \frac{1}{2} \rho \lambda \frac{h+l+H}{D} v^2$

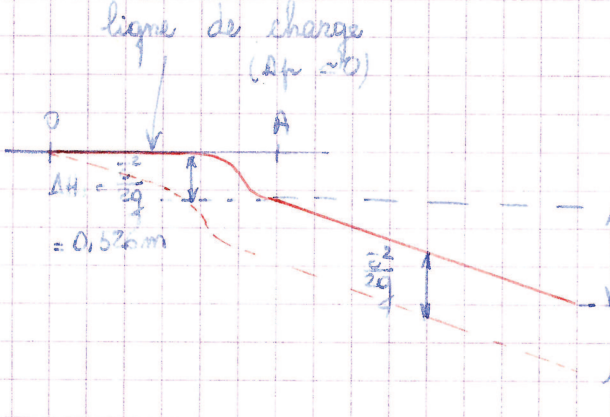
Bernoulli généralisé entre O et B

$$\underbrace{p_{atm} + \rho g H + \frac{1}{2} \rho v_0^2}_{\text{énergie en O (J/m³)}} - \underbrace{\frac{1}{2} \rho \lambda \frac{h+l+H}{D} v^2 - \frac{1}{2} \rho v^2}_{\text{pertes énergie (J/m³)}} = \underbrace{p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_B^2}_{\text{énergie en B}}$$

z = 0

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2 g H}{2 + \lambda \frac{h+l+H}{D}} \Rightarrow v = 3,21 \text{ m/s}$$

$$Q_v = S v = 6 \cdot 10^{-4} \times 3,21 = 1,926 \text{ m}^3/\text{s}$$



4)

$Q_v = 3 \text{ l/s} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

th Bernoulli généralisé entre O et M

$$p_{atm} + \rho g H + \frac{1}{2} \rho v_0^2 - \frac{1}{2} \rho \lambda \frac{l+h+H}{D} v^2 - \frac{1}{2} \rho v^2 + E = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2$$

E (J/m³) : puissance fournie à la pompe. " au fluide : η_p ; apportée par pompe

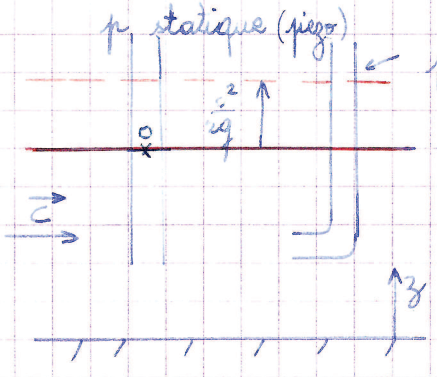
$$E = \frac{P \eta}{Q_v}$$

$$E = \frac{0,8 P}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{800}{3} \text{ J} \Rightarrow P = 314 \text{ W}$$

$v = \frac{Q_v}{S} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-4}}$

$= 5 \text{ m s}^{-1}$

EX :



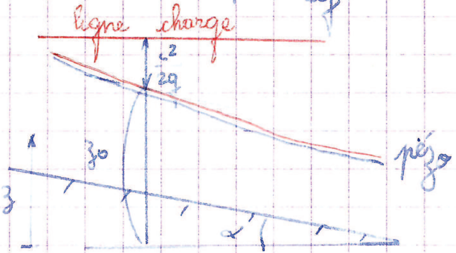
$$h_p = \frac{\hat{p}}{\varpi} = \frac{p + \rho g z}{\rho g} = \frac{p}{\varpi} + z$$

en O $p_0 = p_{atm} + \rho g h$

$h_p = h$ → ligne piézo (rouge)
($p = p_{atm} = 0$) et $z = h$

hauteur piézo

$H = h_p + \frac{c^2}{2g}$ → hauteur de charge (pointillé)

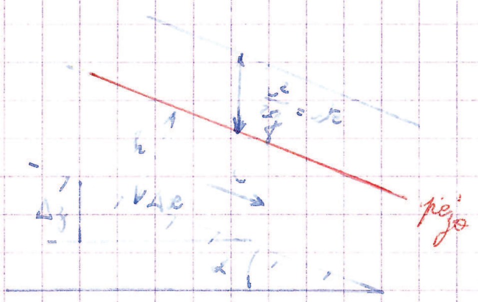


$$H = z_0 + \frac{c^2}{2g} = c^{te} \text{ (fluide parfait)}$$

($z_0 = h_p$)

$z_0 = \sin\alpha \nearrow = c^{te}$

$h \searrow \Rightarrow h \searrow$ et $c \nearrow$



$E = E_p + E_c$ (par m^3)

$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho c^2$

En reste c^{te} elle est empruntée à l'énergie potentielle

$\Delta y = \Delta z \cdot \Delta x \sin\alpha = \Delta x \cdot \alpha$

dénivellation pour un parcours Δx

par m^3 : $\rho g \Delta z = \rho g \alpha \Delta x = \Delta W$ → dépensé sous forme de [illegible]

ΔW fourni par le poids ρg — perte de charge

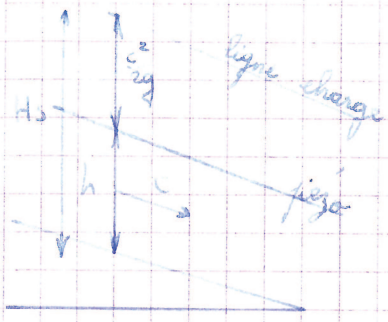
$\Delta x = 1000 m$

$\Delta z = 1/1000$ [illegible] $= 10^{-1} m$ → $W = \rho g \cdot 100 = 10^6$ J/m³

1 calorie → $\Delta T = 1°$ — 1 m³ d'eau.

1 calorie = 4,18 J

[illegible] $= \frac{10^6}{4,2}$ [illegible] $\frac{10^6}{4,2 \cdot 10^6} = 0°$ [illegible]



$H_s = h + \frac{v^2}{2g}$ $\quad H_s(Q_v)$?

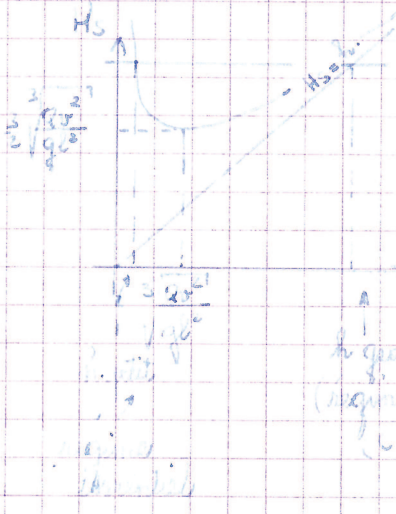
$Q_v = S v = hl v \rightarrow v = \frac{Q_v}{hl}$

hl → longueur canal

Entrée d'eau

donc $H_s = h + \frac{Q_v^2}{2g h^2 l^2}$ $\quad (h \to \infty \to H_s \to h)$

$(h \to 0 \quad H_s \to \infty)$



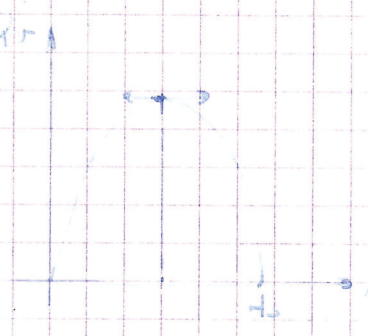
$\Rightarrow \frac{dH_s}{dh} = 1 - \frac{Q_v^2}{2g l^2 h^3} = 0$

$\Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{Q_v^2}{g l^2}}$

pour H_s donné Q_v ?

$Q_v^2 = 2g l^2 h^2 (H_s - h)$

$Q_v = hl \sqrt{2g (H_s - h)}$



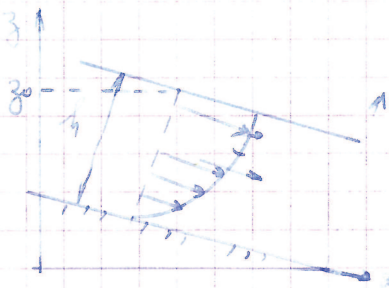
$\frac{dQ_v}{dh} = l \sqrt{2g (H_s - h)} - \frac{hl\, g}{\sqrt{2g (H_s - h)}}$

$= \frac{2g (H_s - h) - gh}{\sqrt{2g (H_s - h)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2H_s - 2h - h = 0$

$\Rightarrow h_c = \frac{2}{3} H_s$

Q_v max $= \frac{2}{3} g l^2 h_c^2$ $\quad H_s = (1,5)\, h_c$

$\Rightarrow Q_v = 0,385\, g l^2 h_c^2$



$$\vec{\omega} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p} + \vec{g}$$

le long d'une ligne de courant

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p} = \vec{g}$$

$$\frac{d\hat{p}}{dx} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial y^2} = f(x) \text{ seulement.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d\hat{p}}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = U^{te}$$

$\hat{p} = u^{te}$ dans une section parmi lignes de courant

sur la surface $\hat{p} = p_{atm} + \rho g z_0$

$$d\hat{p} = \rho g \, dz_0 \quad \text{or} \quad dz_0 = -v\,dx$$

$$\Rightarrow d\hat{p} = -\rho g v \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{p}}{dx} = -\rho g v \Rightarrow k = -\rho g v$$

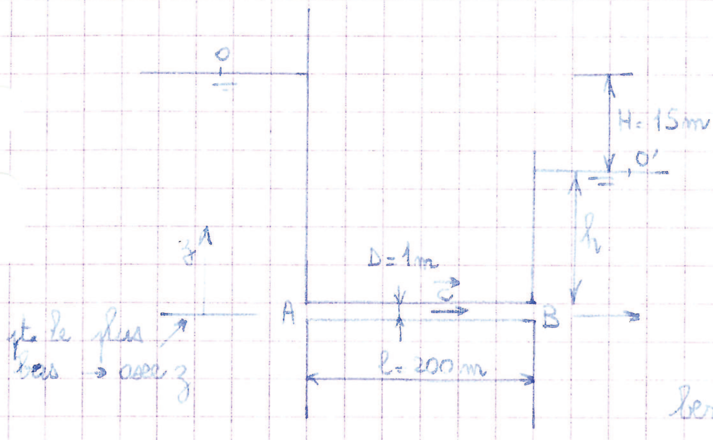
$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g v}{\mu} \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g v}{\mu} y + C$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{2}\frac{\rho g v}{\mu} y^2 + Cy + D$$

conditions aux limites : $y = 0 \Rightarrow u = 0$; $y = h \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0$ (interface)

$$\Rightarrow u = \frac{\rho g v}{\mu}\left(hy - \frac{1}{2}y^2\right)$$

Ex :



1) fluide parfait

débit d'évacuation ?

répartition de pression entre sortie et surface libre = pression d'équilibre = pression hydrostatique.

Bernoulli pas entre 0 et 0' (vitesse nulle) ni 0 et A (pas encore de vitesse) donc entre 0 et B

$c_0 = 0$ et $c_{0'} = 0$

th de Bernoulli entre 0 et B (2d il y a écoul^t seulement)

$$p_0 + \rho g (H + h) + \frac{1}{2} \rho c_0^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho c^2$$

p_0 → patm

p_B → $p_{0'} + \rho g h$ (patm ; p hydrostatique)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho c^2 = \rho g H \Rightarrow c^2 = 2 g H \Rightarrow c = \sqrt{2 g H} = \sqrt{2 \times 10 \times 15} = 17,3 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow Q_V = S c = \frac{\pi D^2}{4} \times c = 13,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

2) fluide visqueux avec $\lambda = 1,8 \cdot 10^{-2}$.

c ? Q_V = ?

perte de charge entre A et B

$$p_{atm} + \rho g (H + h) - \Delta p = \underbrace{p_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2} \rho c^2}_{p_B}$$

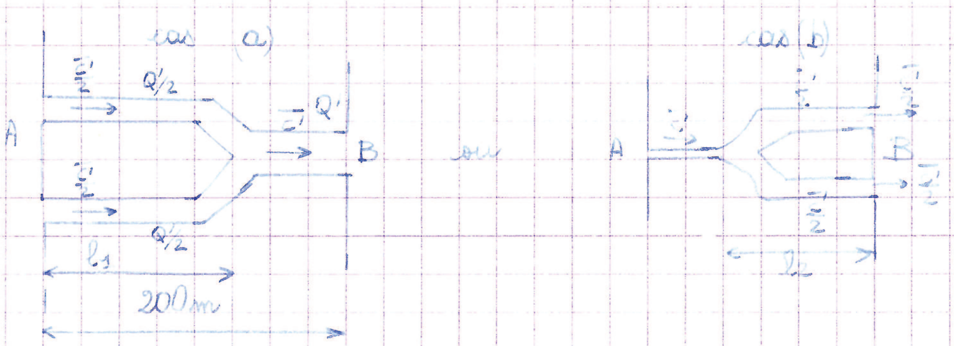
Δp → perte charge ... que si régime laminaire

$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g}$

or $\Delta p = \frac{1}{2} \rho \lambda \frac{l}{D} c^2$

$\Rightarrow$ [illegible] $\Rightarrow c = \sqrt{\frac{2 g H}{1 + \lambda \frac{l}{D}}} = 8$ m/s $\Rightarrow Q_V = S c = \frac{\pi D^2}{4} \times c = 6,28 \text{ m}^3/\text{s}$

[illegible]



$Q_V' = S\bar{v}' \Rightarrow \bar{v}' = \dfrac{8}{\frac{\pi D^2}{4}} = 10,186\ m/s$

th. Bernoulli entre O et B

cas (a) $\quad p_{atm} + \rho g (H + h) - \Delta p_1 = p_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \bar{v}'^2$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho\lambda\frac{\ell_1}{D}\left(\frac{\bar{v}'}{2}\right)^2}_{\Delta p \text{ sur } \ell_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho\lambda\frac{(\ell-\ell_1)}{D}\bar{v}'^2}_{\Delta p \text{ sur } (\ell-\ell_1)}$$

$\Rightarrow \quad \bar{v}' = \sqrt{\dfrac{2gH}{1+\frac{\lambda}{D}\left(\ell - \frac{3\ell_1}{4}\right)}} = 10,186\ m/s \rightarrow \ell_1 = 122,$ [illegible] m.

cas b)

$p_{atm} + \rho g (H + h) - \Delta p_2 = p_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\bar{v}'}{2}\right)^2$ [illegible]

$$\frac{1}{2}\rho\lambda\frac{(\ell-\ell_2)}{D}\bar{v}'^2 + \frac{1}{2}\rho\lambda\frac{\ell_2}{D}\left(\frac{\bar{v}'}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow \quad \bar{v}' = \sqrt{\dfrac{2gH}{\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{D}\left(\ell - \frac{3\ell_2}{4}\right)}} = 10,186\ m/s$

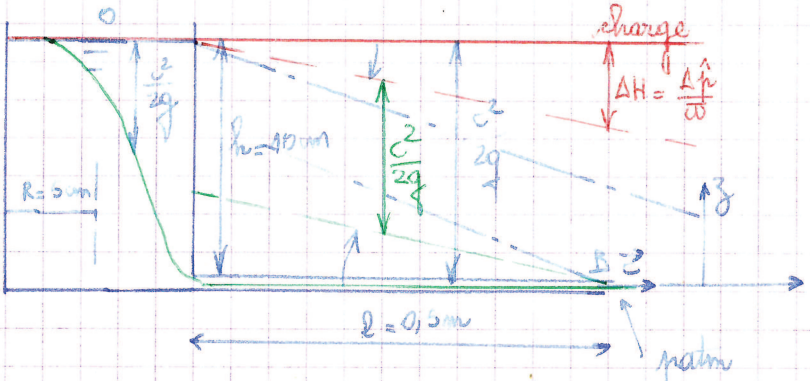
$\rightarrow \ell_2 = 7$[illegible] m

cas a) longueur tuyaux = [illegible] = [illegible] = 2[illegible] m

cas b) longueur tuyaux = $\ell + \ell_2$ = 2[illegible] [illegible]

[illegible]

EX :



fluide parfait ⇒ pas de pertes de charge.

→ ligne charge et piézo horizontale

ligne de charge et piézo

$$H = \frac{p}{\omega} + \frac{c^2}{2g} = \frac{p}{\omega} + z + \frac{c^2}{2g}$$

$$h_p = \frac{p}{\omega} + z$$

H = cte en 0 : $H = \frac{p_{atm}}{\omega} + h + \frac{c^2}{2g}$ (en pression efficace.)

($\frac{p_{atm}}{\omega} = 0$, $\frac{c^2}{2g} = 0$)

→ H = h

$h_p = \frac{p}{\omega} + z$ → dans le tube $h_p = \frac{p_{atm}}{\omega} + 0 = 0$ ($\frac{p_{atm}}{\omega} = 0$)

Bernoulli entre 0 et B

$p_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \cdot 0^2 = p_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho c^2$

$h = c^2$ sans perte de charge

h_p < c^2 avec perte de charge.

$p_0 + \rho g z_0 = p_1 + \rho g z_1$ or $z = 0$ → $p_0 = p_1$

→ $c = \sqrt{2gh} = 1{,}41\,m/s$.

$l = 0{,}5\,m$ = 2 min 53 s.

$\nu = 10^{-6}\,m^2 s^{-1}$

$H = \frac{p}{\omega} + \frac{c^2}{2g}$ $p = 0$ → $H = \frac{c^2}{2g}$

$\Delta p = \frac{1}{2}\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho \frac{c^2}{4}$

$\frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2g} - \frac{\Delta p}{\omega}$ → perte de charge

si viscosité ↗ → ds tourment (trait mixte fin.)

$\vec{v}$?

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \lambda \frac{L}{D} v^2$$

$$h = \Delta H + \frac{v^2}{2g} = \frac{\Delta p}{\omega} + \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{g} \frac{L}{D} v^2 + \frac{v^2}{2g}$$

laminaire → $\lambda = \frac{64}{Re}$ $\quad Re = \frac{vD}{\nu}$

$$\rightarrow h = \frac{8 \nu L v}{R^2 g} + \frac{v^2}{2g}$$

$$\rightarrow v^2 + \frac{8\nu L}{R^2} v - hg = 0 \rightarrow v = -\frac{4\nu L}{R^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4\nu L}{R^2}\right)^2 + hg}$$

$v = -2 \pm \sqrt{5}$ → $v = \sqrt{5} - 2$

$v = -\sqrt{5} - 2$ pas possible v.

$\Rightarrow v = 0{,}2334 \text{ m/s}$.

$Re = \frac{v \cdot 2r}{\nu} = \frac{0{,}2334 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 472 < 2000$.

MECANIQUE DES FLUIDES
Formulaire

I- STATIQUE

Equation générale : $\rho\vec{F} - \vec{\nabla}p = \vec{0}$ ($\vec{F}$: force de volume par unité de masse)

Dans le champ de pesanteur ($\vec{F} = \vec{g}$) $\hat{p} = p + \rho g z = Cte$.

Dans un repère relatif : $\vec{F} = \vec{g} - \vec{\alpha}_e$ ($\vec{\alpha}_e$: accélération d'entraînement).

II- CINEMATIQUE

Equation de continuité : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{c}) = 0$. Ecoulement permanent $\text{div}(\rho\vec{c}) = 0$.

Ecoulement permanent d'un fluide incompressible : $\text{div}\ \vec{c} = 0$.

Pour un tube de courant $\rho\, c\, S = Cte$, $c\, S = Cte$ si le fluide est incompressible

$$\vec{\alpha} = (\vec{rot}\ \vec{c} \wedge \vec{c}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla} c^2 + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}$$

Ecoulement irrotationnel ($\vec{rot}\ \vec{c} = 0$) : $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} c^2 + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}$

" " et permanent $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} c^2$

Ecoulement à potentiel des vitesses $\vec{c} = \vec{\nabla}\Phi$ $\quad \vec{rot}\ \vec{C} = 0$ $\quad \Delta\Phi = 0$

Fonction de courant Ψ : $\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ $\quad \Delta\Psi = 0$

III- DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

Equation générale : $\vec{\alpha} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$

Dans le champ de pesanteur $\vec{\alpha} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p}$ $\begin{cases} \frac{\partial \hat{p}}{\partial s} = -\rho c \frac{\partial c}{\partial s} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -\frac{\rho c^2}{\mathcal{R}} \end{cases}$

Théorème de Bernoulli

Ecoulement non permanent $\int_1^2 \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \cdot \vec{ds} + \left[\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z\right]_1^2 = 0$

Ecoulement permanent $\quad p + \rho g z + \frac{1}{2}\cdot \rho c^2 = cte$

Ecoulement relatif (repère en rotation) $\quad \frac{w^2 - u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = Cte$ (w = vitesse relative, u = vitesse d'entraînement)

Théorème des quantités de mouvement :

Pour un tube de courant : $Q_m(\vec{c}_2 - \vec{c}_1) = \vec{P} + \vec{F}_p$ $\begin{cases} \vec{P} : \text{force de volume (poids)} \\ \vec{F}_p : \iint -p.\vec{n}\, ds \text{ (force de pression)} \end{cases}$

Pour des conduites en dérivation : $\sum Q_{mj}\vec{c}_j - \sum Q_{mi}\vec{c}_i = \vec{P} + \vec{F}_p$

Hauteur piézométrique : $\frac{\hat{p}}{\varpi} = \frac{p}{\varpi} + z$

Hauteur de charge : $H = \frac{\hat{p}}{\varpi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{g}$

Perte de charge singulière : $\Delta H = \zeta\frac{c^2}{2g}$ (ζ: coefficient de perte de charge singulière)

IV- DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLES

Equation générale : $\vec{\alpha} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\vec{\Delta c}$

Dans le champ de pesanteur : $\vec{\alpha} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p} + \nu\vec{\Delta c}$

Régime laminaire : force de frottement par unité de surface $f = -\mu\frac{\partial c}{\partial n}$

Nombre de Reynolds : $\mathcal{R}_e = \frac{D\bar{c}}{\nu}$

Perte de charge (en Joule/m^3) : $\Delta\hat{p} = \frac{1}{2}\Lambda\rho\frac{\ell}{D}\bar{c}^2$ ou $\Delta H = \frac{\Delta\hat{p}}{\varpi}$ (en mètre)

Hauteur de charge moyenne : $\bar{H} = \frac{\hat{p}}{\varpi} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\bar{c}^2}{g}$ (en régime laminaire)

Entre deux plans parallèles $\Lambda = \frac{24}{\mathcal{R}_e}$ en régime laminaire ($\mathcal{R}_e < 1000$)

Dans une conduite cylindrique $\Lambda = \frac{64}{\mathcal{R}_e}$ en régime laminaire ($\mathcal{R}_e < 2000$)

$\Lambda = (100\,\mathcal{R}_e)^{-1/4}$ en régime turbulent et hydrauliquement lisse

$\Lambda = Cte$ en régime turbulent et hydrauliquement rugueux.

CHAP I STATIQUE DES FLUIDES

Mercredi 9-10-88

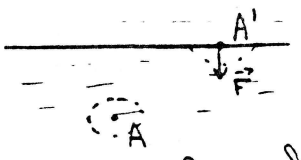
Définition des fluides

Milieu continu qui est peut se déformer sous l'act de forces très faibles.
(liquide et gaz font parti de ce milieu)

Ex verre : liquide fortement visqueux
ou encore goudron...

Gaz : ρ est beaucoup plus faible
Il occupe tout le volume
facilement compressible

Liquides :
ont une plus gde concentration moléculaire



On considère un molécule A.
des forces d'attract agissent sur A
Par raison de sym. cette molécule est à l'équilibre

Pour la molécule A' : la force $\vec{F}$ est dirigée vers le bas, cette particule est maintenue à l'équilibre.

Pour les gaz les molécules st beaucoup plus indépendants.

Au dessus du point [T° critique] critique il n'y a plus lieu de distinguer les liquides et les gaz car les propriétés se rapprochent.

Donc : fluide : sans distinct entre liquide et gaz

2 - Force de volume et force de surface

On considère un volume V (V) Force int ≡ 0

Force de volume

La force agit sur l'ensemble de la masse de V.
C'est le pesanteur qui agit sur l'ensemble est le poids.
Ds le repère relatif il ft ajouter la force d'inertie et de coriolis d'entraine!

On considère un élt de surface ΔS on appelle force de surface qui limite le volume ds gd la force de pression.

3 - Fluide parfait et réel (visqueux)

Si on considère 2 particules qui glissent l'une sur l'autre.
S'il y a glissement sans frottement des différentes parties du fluide la force de surface est ⊥ à la surface S.

S'il y a glissement avec frottement ou frottt de risquosité, il y a force de frott qui n'est plus normale mais inclinée car il y a une composante tangentielle

4 - Pression en 1 point d'un fluide

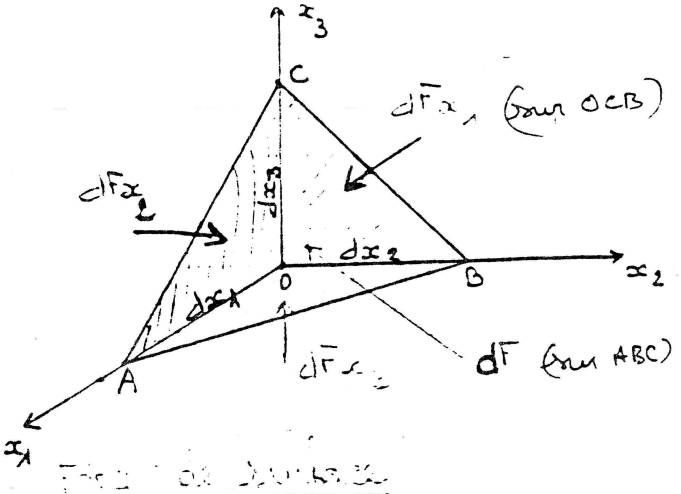


Fig 1 : Cas d'équilibre

On regarde les forces qui agissent sur ce tétraèdre.

On regarde la force de volume

Volume : $\frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3$

la force de volume = 3e ordre

$m = \rho dv$

poids : $mg = g \rho dv$ (3e ordre)

la viscosité n'intervient que s'il y a mvt relatif.

dF, dF_{x_1}, dF_{x_2}, dF_{x_3} sont les 4 forces sur le tétraèdre.

on projette sur Ox_1 : $dF_{x_1} - dF \cos\alpha = 0$ → car en équilibre

α : normale à ABC avec Ox_1. $(\vec{dF}, \vec{Ox_1})$

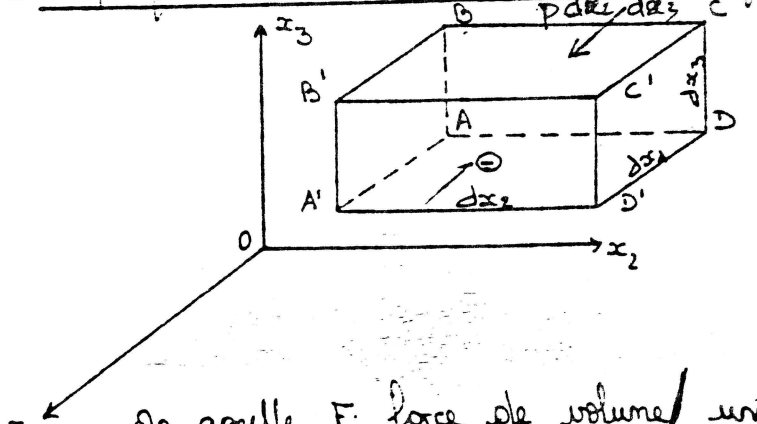
Surface OCB = $\frac{1}{2} \underbrace{dx_3 dx_2}$ 2e ordre. or $\cos\alpha = \frac{dS_{x_1}}{dS}$ dS : ABC dS_{x_1} : OCB

$\cos\alpha = \frac{dF_{x_1}}{dF}$

$$\frac{dF_{x_1}}{dS_{x_1}} = \frac{dF}{dS} = \frac{dF_{x_2}}{dS_{x_2}} = \frac{dF_{x_3}}{dS_{x_3}} = p.$$

la pression p est ct sur tout l'ensemble du tétraèdre.
Lorsque dx_1, dx_2, dx_3 tendent vers 0 alors p → pression en 0.
d'où pression en 1 pt du fluide. indépendant de la direction

5 - Eqs fondamentale de la statique des fluides



On appelle F: force de volume/ unité de masse (ou par kg)

F a trois composantes $\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}$

Soumettons la face ABCD à M de coordonnée (x_1, x_2, x_3)
Cette face est soumise à une force de pression : $p\, dx_2\, dx_3$

Sur la face A'B'C'D' on a cette force de pression : $\ominus \left(p + \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2\, dx_3$
$\frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1$ = variat de la pression lorsque x_1 varie de dx_1
$\ominus$ car la force de pression est dirigée vers les axes Ox_1 négatifs.

$$\left.\begin{array}{l} p\, dx_2\, dx_3 \\ -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2\, dx_3 \end{array}\right\} - \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3 + \rho X_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0 \quad \text{car en équi}$$

$\rho X_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ il ft multiplier par le volume $dx_1\, dx_2\, dx_3$.

Force par unité de volume : $\rho \vec{F}$ $\left\{\begin{array}{l} \rho X_1 \\ \rho X_2 \\ \rho X_3 \end{array}\right.$ $\rho \vec{F} d\tau$ $\left|\begin{array}{l} \rho X_1 d\tau \\ \rho X_2 d\tau \\ \rho X_3 d\tau \end{array}\right.$ $d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3$

$$= 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho X_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \rho X_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \rho X_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \end{array}\right. \quad \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P = \vec{0} \text{ ou encore ou encore} \quad \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p = \vec{0} \\ \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{0} \end{array}}$$

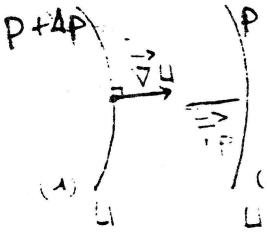
$\vec{F}$: force de volume / unité de masse (kg) $\left.\right\}$ $\vec{F}$ et $-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$ se font équilibre
$-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$ = force de pression / kg

Cas particulier

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel (U) en maths : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U = -\vec{\nabla} U$

$$-\rho \vec{\nabla} U - \vec{\nabla} p = 0.$$

On peut définir des surfaces équipotentielles U.

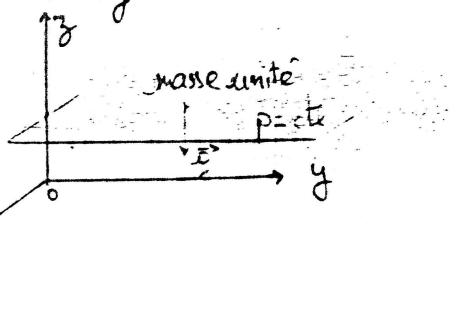


$\vec{\nabla} U \perp$ à la surface est dirigé vers potentiel croissant
$\vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} U$.
la pression augmente de (2) à (1)
Surface équipotentielle = isobare.

-6- Application au cas d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur [ρ = cte]

$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \vec{0}$ (*) $\vec{F}$ est la force de pesanteur $\vec{g}$.

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \\ \partial p / \partial x_3 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{array}\right.$$



On considère une masse unité. La force qui agit est $\vec{g}$

S'écrit : $\begin{cases} 0 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ 0 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

ça veut dire que la pression ne varie pas en fct de x et y donc p est constant dans un plan horizontale (1ère loi hydrostatique)

$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ en intégrant on a $p = -\rho g z + ct$ ou encore $p + \rho g z = ct$ (2)

on appelle $\hat{p} = p + \rho g z$ la pression motrice (2ème loi)

$\hat{p}$ reste ct ds tt le fluide en équilibre $\hat{p} = ct$.

En utilisant maintenant $\vec{g} = -\vec{\nabla}(U) = -\vec{\nabla}(gz)$.
car $\vec{F} = \vec{g}$ et que $\vec{F}$ dérive d'un pot $= -\vec{\nabla}(U)$.

$\vec{g} = -\vec{\nabla}(U) = -\vec{\nabla}(gz)$

$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$

$\vec{\nabla} p + \rho \vec{\nabla}(U) = \vec{0}$.

$\vec{\nabla} p + \rho \vec{\nabla}(gz) = \vec{0}$

Si fluide incompressible ρ est ct.

$\vec{\nabla}(p + \rho g z) = \vec{0}$

$\vec{\nabla}(p + \underbrace{\rho g z}_{= ct}) = \vec{0}$ car $= 0$ on retrouve bien (2)

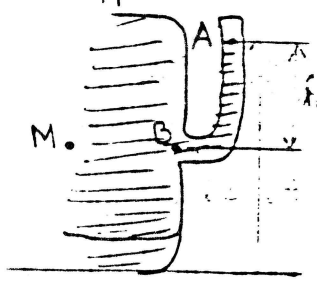
$p = \frac{F_{(N)}}{S_{(m^2)}} = \frac{F \times L}{S \times L} = \frac{W_{(J)}}{V_{(m^3)}}$

p : énergie potentielle de pression / m^3

$\rho g z$: énergie potentielle de pesanteur / m^3

$\hat{p} = ct$ peut se traduire par énergie pot. totale, elle est ct ds tt le fluide

7- Applicat à la mesure d'une pression par un manomètre à liquide



le liquide s'élève d'une hauteur h
la pression en M et égale à la pression en B

$p_M = p_B$ $p + \rho g z = \hat{p}$

$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$ car $\hat{p}$ est ct ds tt le volume

$p_M = p_B = p_A + \rho g (z_A - z_B)$

$p_M = p_B = p_A + \rho g h$
(1) + (2)

la pression en M = pression atmosphérique + pression absolue
(1) + (2)

la pression effective = $p_B - p_{atm} = \rho g h$.

on peut diviser tte ces parties par le poids volumique $\rho g = \varpi$

$$\frac{p_{effective}}{\varpi} = \frac{p_B}{\varpi} - \frac{p_{atm}}{\varpi} = h.$$

exc: si $h = 2m$ on a $\frac{p_{eff}}{\varpi} = 2m$.

Mercredi 16.10.

-8- Unités de pression

C'est une force sur surface $p = \frac{F}{S} = \frac{N}{m^2}$ (MKS) ou Pascal
on utilise aussi cgs $p = \frac{F}{S} = \frac{dyn}{cm^2}$

$1N = \underbrace{1\,kg/m^2}_{MKS} = \underbrace{10^3\,g \times 10^2\,cm/s^2}_{cgs.} = 10^5\,dyn.$

$1\,N/m^2 = \frac{10^5\,dyn}{10^4\,cm^2} = 10\,baryes$ (système cgs).

On utilise $1\,bar = 10^6\,baryes$
$1\,mb = 10^{-3}\,bar = 10^3\,baryes.$

1 mm Hg (Torr : nom de l'Italien qui l'a inventé)
$1\,mm\,Hg = \underbrace{h \times \rho \times g}_{cgs} = 0,1\,cm \times 13,6\,g/cm^3 \times 981\,cm/s^2$
$= 1334\,baryes = 1,334\,mbar.$

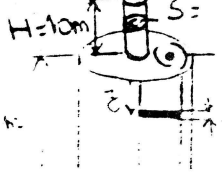
la pression atmosphérique normale (correspond à 760 mm Hg)
=
mm de mercure.
=
$1,334\,mb \times 760 \approx 1,013\,mb = 101300\,P \simeq 1\,bar.$

$10^5\,N/m^2 = 10^6\,baryes = 1\,bar.$
Il faut surtout retenir $1\,bar = 10^5$ Pascal.
$p_{atm} \simeq 1\,bar.$

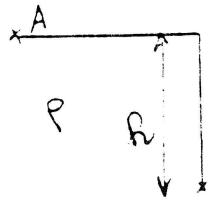
(1 mb = 1 hPa)

Application

1) On se suppose de calculer la force de pression appliquée sur une douve de longueur 10cm. (douve = planche)



s qu'on se pose est ce que cette force appliquée sur les planchi
uniforme ?
rend 2 points A et B



$P_B - P_A = h \rho g$.

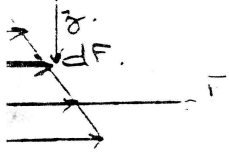
augmente au fur et à mesure qu'on descend dans le liquide
considère que la pression est uniforme sur une petite surface
$= p \cdot ds$
remplace p par z.
$= 0$ pr $z = 0$
$\rho g z + \rho atm$ avec $\rho atm = 0$. $dF = P ds$ avec ds de la dou

$= \rho g z\, l\, dz \Rightarrow F = \rho g l \int_c^h z\, dz = \frac{1}{2} \rho g l h^2$ $\boxed{F = \frac{1}{2} \rho g l h^2}$

eul numérique : eau $\rho = 10^3 kg/m^3$ $g = 10 m/s^2$ $l = 10^{-1} m$ $h = 1$.

$F = \frac{1}{2} 10^3 \times 10 \times 10^{-1} \times 1 = 500 N \simeq 50 kg$.

a douve est faite à résister à un poids de 50 kg.
étant donné que les forces de pression est de cette forme



on demande le lieu de la force F.

Σ des moments partiels = Σ des moments résultants.

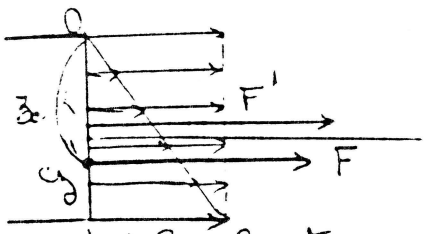
$F \times z_c = \int z\, dF. \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho g l h^2 \times z = \int_c^h \rho g l z^2 dz = \frac{h^3}{3}$.

$\boxed{z_c = \frac{2}{3} h}$.

Si c'est uniforme F est au milieu de la douve

1' (suite de l'application).

On ajoute un tube qu'on remplit d'eau
cette volume $= H \times s = 10m \times 10^{-4} m^2 = 10^{-3} m^3 = 1$ litre
Tout dépend jusqu'à maintenant de la hauteur seulement
qui donne la force et son point d'application ?
a pression atm n'est plus égale à 0.
la pression au (•) est égale à $H \rho g + \rho atm$
= cte $\underbrace{p_A + \rho g z_A}_{\Delta p\ (1)} = \underbrace{p_B + \rho g z_B}_{\Delta p\ (2)}$. En appliquant ceci sur le tube on trouve qu'au point (•) $p = \rho g H$
on augmente d'un Δp en (1) on augmente de Δp en (2)
es fluides transmettent intégralement les pressions.
ne il faut ajouter une pression uniforme $= H \rho g = F'$.



$F' = H \rho g \times S$ S surface de la douve

$F' = H \rho g R l = 10 \times 10^3 \times 10 \times 1 \times 0,1$

$R = F + F' = 500N + 10000 = 10500N = 10,5kN$

C'est la hauteur d'eau qui compte mais pas de la quantité de liquide.

C'est cette force qui a exercé un poids de 1 tonne sur la douve

le r... au centre de F.

R plus près de F' que de F.

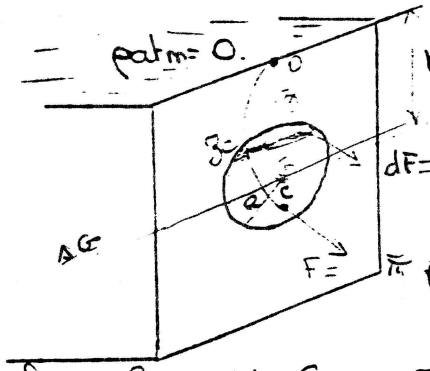
QB : calcul du point d'application de R.

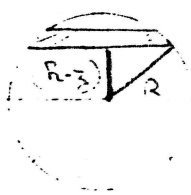
$F \times z_c + F' \frac{R}{2} = R z_p$ avec F' sup connu à distance $\frac{R}{2}$.

$M_O^E F + M_O^E F'$

$\frac{1}{2} \rho g l R^2 + H \rho g R l \quad \Rightarrow z_p = \frac{2/3 R + H}{1 + \frac{2H}{R}}$

Considérons un récipient et une vanne circulaire de rayon r. et h la profondeur à laquelle se trouve le centre de masse de la vanne.





$h \uparrow \quad \pi R^2 \uparrow$

la plus simple : $F = \rho g \int z \, ds = \rho g (z_G \cdot S) = \pi \rho g h R^2$

$\int z ds$ c'est ... cas le calcul de z_G tel que $\int z \, dF = M z_G$

S ou H c'est pareil.

Recherche du point d'application.

$\int z dF = \int z_c F.$

$\rho g \int z^2 ds = z_c \times \pi \rho g h R^2$

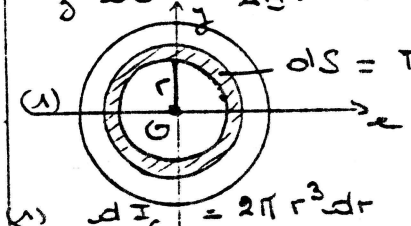
$\frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 h^3 = z_c \pi h R^2$

$\Rightarrow \boxed{z_c = h + \frac{R^2}{4h}}$

$I_{Ac} = I_{Do} + S h^2$ non calculé

$\int z^2 ds = \int_0^R z^2 \, 2\pi z \, dz = \left| 2\pi \frac{z^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$

$z^2 ds = I_{Do}$. Mt d'inertie 0.



(1) $dI_G = 2\pi r^3 dr$ (1) / à l'axe

$I_G = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$

(2) / aux 2 axes xx' et yy'.

$I_{Gx} + I_{Gy} = I_G$

$dS = 2\pi r\,dr$

$dv = z\,dS = 2\pi z r\,dr = 2\pi\left(\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 + c\right) r\,dr$

$v_A = \pi R^2 h = 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 + c\right) dr = 2\pi\left[\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\frac{R^4}{4} + c\frac{R^2}{2}\right]$

$\Rightarrow \boxed{c = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}}$ d'où $\boxed{z = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g}}$ éq du 2e d° (3)

donc c'est une parabole d'axe Oz.

p° trouver la pression on remplace z par sa valeur dans (1):

$\Rightarrow p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g\left(\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 + h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) + cte$.

p° $z = (2)$ on trouve $p = 0$.

d'où la valeur de $p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g(h - z) - \frac{1}{4}\rho\omega^2 R^2$.

en B: $z = (3)$ on remplace r par R. donc on trouve h.

$\Rightarrow z_{max} = h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$: $z = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}R^2 = h + \frac{1}{4}\frac{\omega^2 R^2}{g}$.

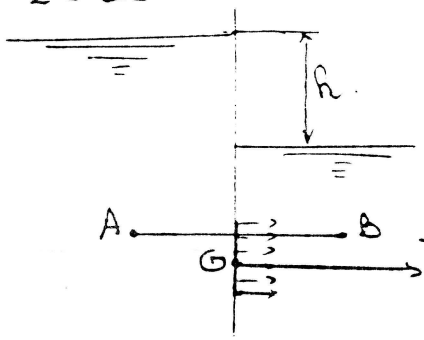
en A: $r = 0 \Rightarrow z_{min} = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$.

Valeur de la pression : p° $r = R$. on obtient une équ en z.

et elle est de la forme : sur le pourtour.

sur le fond du récipient $z = 0$. sur le fond.

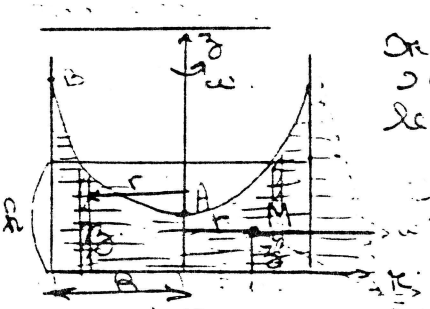
Si on a à faire à une vanne noyée càd le liquide est de 2 côtés



$$\left.\begin{aligned} p_A &= p_{atm} + \rho_0 g z_A \\ p_B &= p_{atm} + \rho_0 g z_B \end{aligned}\right\} \quad p_A - p_B = \rho g (z_A - z_B)$$

$$p = p_A - p_B = \rho_0 g h$$

$$\vec{F} = p \cdot S = \rho_0 g h \pi R^2$$



On a un récipient cylindrique.
On fait tourner ce récipient avec une vitesse ω le liquide prend la forme (•).

1) déterminer la forme mathématique de cette liquide

2) déterminer la pression en fct de r et z.

On considère le système en équilibre / récipient.
On peut des axes relatifs au récipient
L'eq fondamentale de la statique nous donne.

(1) $\rho \vec{r} - \nabla \vec{p} = \vec{0}$

force de volume / unité de masse $\begin{cases} \text{pesanteur } (\vec{g}) \\ \text{force d'inertie (centrifuge) } r\omega^2 \vec{r}. \end{cases}$

(1) on projette (1) sur les 2 axes $\vec{r}$ et $\vec{z}$.
on cherche la fct $p(r, z)$
Ds l'intégrale on a une cte obtenue en disant que le volume est cte. $V = \pi R^2 R$.
c'est à partir de $\pi R^2 R$ qu'on obtient la cte.

23.10.85

En projet sur $O\vec{z}$: $-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

En projet sur $O\vec{r}$: $\rho \omega^2 r - \frac{\partial p}{\partial r} = 0$.

$\nabla \vec{p} \mid \partial p/\partial z \; \vec{z}$
$\partial p/\partial r$.

$$dp = \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial r} dr.$$

$$dp = -\rho g \, dz + \rho \omega^2 r \, dr.$$

(1) $p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + cte$. → surface isobare càd pression = cte correspondent à $\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z = cte$.

on obtient $\boxed{z = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2 + C.}$ (2)

Pr déf il fct dire que le volume initial $\pi R^2 H = cte$.

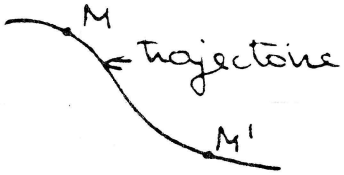
on décompose ce volume en petits elts de hauteur z

CHAP II **CINÉMATIQUE**

23.10.85

I) Description du mouvement

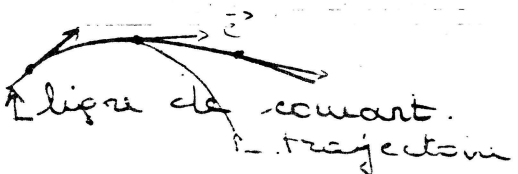
M particule de fluide de coordonnées M (x_1, x_2, x_3, t) au temps t
ou M (x_1, x_2, x_3) à t.
elle se déplace au cour du temps
M' (x'_1, x'_2, x'_3) à t.



x_1 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, t)$
x_2 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, t)$
x_3 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, t)$
} variable de Lagrange → la + logique et la + compliquée.

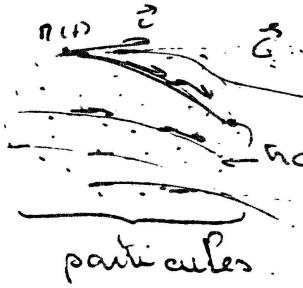
Variable d'Euler

M (x_1, x_2, x_3)
Considérons la vitesse $\vec{c}$ à cette instant.

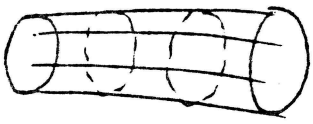


$\vec{c}$ | c_1 (x_1, x_2, x_3, t)
c_2 ( )
c_3 ( )
} variable d'Euler

$\vec{c}$: fct de l'endroit où l'on se trouve.
lignes de courant : vecteurs vitesses sont tgts en chq point.
En régime non permanent : lignes de courant sont ≠ trajectoires.
En régime permanent : les lignes de courant et trajectoires et réciproquement.

Ex : eau : 

Tube de courant : c'est l'ensemble de ligne de courant qui s'appuie sur la ligne fermée.



au pt D la trajectoire et la ligne de courant sont tgtes.

En régime permanent on supprime t donc $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Eqn de ligne de courant | $\frac{dx_1}{c_1} = \frac{dx_2}{c_2} = \frac{dx_3}{c_3}$ $\Leftrightarrow$ $d\vec{s} \parallel \vec{c}$.

ça signifie que si on prend un elt. $d\vec{s}$ | dx_1, dx_2, dx_3 $\xrightarrow{ds}$.

$\vec{c} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} c_1 = \frac{dx_1}{dt} \\ c_2 = \frac{dx_2}{dt} \end{cases}$

si régime variable $\vec{c}(x_1, x_2, x_3, t)$
ligne de courant ≠ trajectoire

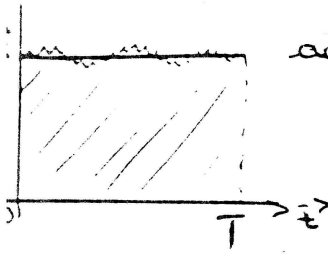
Ecoulements particuliers

Ds le temps

Ecoult permanent : $\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = \vec{0}$

Prenons un régime permanent : $\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = \vec{0}$.

Ca veut dire que la vitesse est constante. vitesse pulsé cste (semi-permanent)

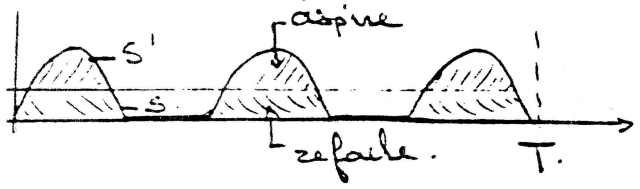


au pt M. ça pt être permanent en moyenne.

$\bar{c}$: est la valeur moyenne.

$\bar{c}.T = \int_0^T c\,dt \Rightarrow \bar{c} = \frac{1}{T}\int_0^T c\,dt$.

ex. pompe hydraulic. (à la sortie ...).



on appelle ça mvt semi permanent

qu'on pt définir la vitesse moyenne $\bar{c}$.

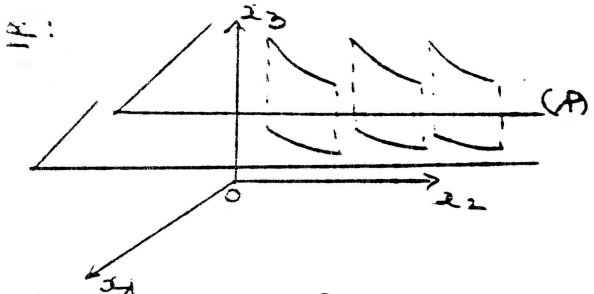
et que $S' = S$.

Ds l'espace.

Ecoulement bidimensionnel

Est qd au lieu d'avoir 3 variables on a 2.

ex :

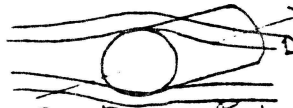


Si on a un écoult plan // à Ox_1x_2 $\vec{c}(x_1, x_2)$

Si on déduit un écoulement en translatant (1) on a.

(2) $\frac{dx_1}{c_1} = \frac{dx_2}{c_2}$ car $\frac{\partial \vec{c}}{\partial x_3} = \vec{0}$.

Autre cas : Ecoult autour d'un cylindre.

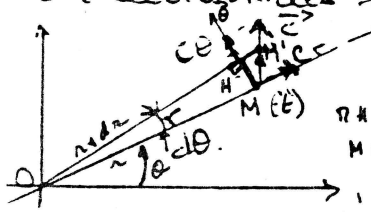


Ligne de courant.

En translatant on a un écoult plan bidimensionnel suivant axes -

La qqsé : que devient l'éqn (2).

En coordonnées cartésiennes



Au point M la vitesse $\vec{c}$ est quelconque

M se déplace à l'instant $t + dt$. $\vec{i} \cdot \vec{n}$

M à t M' à $(t + dt)$., $\vec{MM'} = d\vec{s}$, $\vec{c} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

en coo polaires $\vec{c}(r, \theta)$

$d\vec{s}$ | dr sur $\vec{Or}$
$r\,d\theta$. sur direct ⊥ $\vec{Or}$.

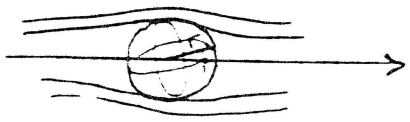
$\vec{c}$ | $c_r = dr/dt$
$c_\theta = r\,d\theta/dt$.

on a $\frac{dr}{v_\theta} = \frac{1}{r}\frac{dr}{v_\theta}$ | égd des lignes de courant en coord polaires

Autre cas Ecoult de fluide autour d'un obst

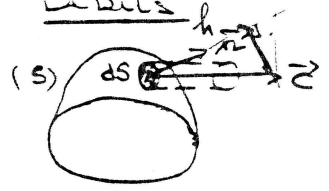
Qd on a un écoult de fluide autour d'un obst.

ex



on a intérêt à travailler en coord sphériques (r, θ).
En tournant on trouve tjs le même

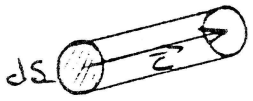
3) Débits



Considérons une surface S qui s'appuie sur une ligne fermée.
$\vec{n}$ normale orientée à l'extérieur.
En ce point $\vec{v}$ est quelconque.

Quel est le volume qui traverse dans dS / unité de tps ?

Le volume écoulé à travers dS pdt un tps unité. ⇒ $\boxed{dQ_v = \vec{v}.\vec{n}.dS}$



$\boxed{Q_v = \iint_S \vec{v}.\vec{n}.dS}$ débit volumique à travers S.

peut être < 0 si $>$
flux de $\vec{v}$ à travers S

$dv = ds.h$
$= ds.\vec{v}.\vec{n}.dt$
$v = \vec{v}.\vec{n}.dt\,ds$

Si c'est un fluide qui rentre on a un débit < 0.

Masse : on a un débit massique.

$dQ_m = \rho\, dQ_v = \rho\, \vec{v}.\vec{n}.dS.$

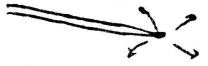
$\boxed{Q_m = \iint_S \rho\, \vec{v}.\vec{n}\, dS.}$

Q_m : débit massique.

masse = vol. × ρ

Source de courant

Considérons un tuyau où s'écoule le fluide dont l'extrémité du tuyau est petit et équivalent à un point.



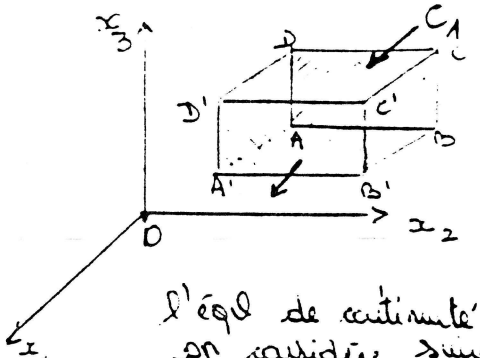
C'est une source de courant (1)

Puit de courant.

on aspire (c'est le contraire de (1) .

4) Equation de continuité

6.11.85



$\vec{c} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}$

l'éqn de continuité traduit le principe de la conservation de la masse
on considère suivant $O\vec{x_1}$:
Quel est le flux du solide à travers la face ABCD
Sur la face ABCD : le vecteur vitesse est c_1
La vitesse de fluide ne fait intervenir que c_1
le volume qui traverse cette face pdt un tps dt est : $V_1 = c_1\, dx_2\, dx_3\, dt$
la masse (solide) $M_1 = \rho c_1\, dx_2\, dx_3\, dt$.

la face A'B'C'D' : la masse qui la traverse (sortie) $M_2 = \left[\rho c_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho c_1)\, dx_1\right] dx_2\, dx_3\, dt$

$-M_1 + M_2 = \frac{\partial(\rho c_1)}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt$. $\quad dx_1\, dx_2\, dx_3 = dV$.

On peut faire aussi pr les autres faces donc au total

$$\left[\frac{\partial(\rho c_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho c_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho c_3)}{\partial x_3}\right] dv\, dt. = \operatorname{div}(\rho \vec{c})$$

qui est la masse du fluide qui est sorti de dV pdt dt.

On sup que la masse a varié. $dm = \rho\, dV$.
Sa variation est de : $\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv\, dt$ pdt un tps dt.
(variation de la masse / vol) vol dt

S'il y a conservation de la masse alors (3) + (4) $= 0$.

donc $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{c}) = 0}$ forme éle

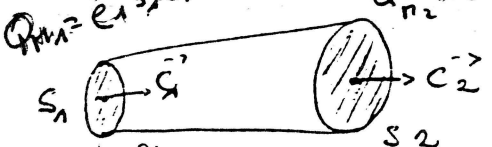
Cas particuliers

- Ecoulement permanent on sait que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ceci $\Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{c}) = 0$
- Si écoulement permanent et fluide incompressible : on pt sortir ρ. alors
  θ : coef de dilat cubique. $\operatorname{div} \vec{c} = 0$. ou $\theta = \operatorname{div} \vec{c} = 0$
- Si $\theta = 0$ le fluide est incompressible.

$\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + \frac{\partial c_3}{\partial x_3} = 0\right)$

Tout ceci se simplifie ds le cas particulier suivant.

Tube de courant



c_1 vitesse d'entrée du tube
$\vec{c_2}$: vitesse de sortie du tube
débit massique de ce tube $Q_{m1} = Q_{m2}$

↳ l'int. du tube il n'y a aucune source de courant ni puit de

le débit massique à travers m_1 est $Q_{m_1} = \rho_1 \underbrace{S_1 c_1}_{Q_{v_1}}$

" à travers m_2 est $Q_{m_2} = \rho_2 S_2 c_2$

si pas de source ou de puit de comaux

la continuité de la masse on a $Q_{m_1} = Q_{m_2}$

$\rho S_1 c_1 = \rho_2 S_2 c_2$ d'une manière plus $\boxed{\rho S c = \text{cte}}$ expression de la continuité

Si de plus ρ est cte càd fluide incompressible on a $\boxed{Sc = \text{cte}}$ débit volumique

5) Champ de vitesse

$d\vec{c} \begin{vmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ dc_3 \end{vmatrix}$

En un pt O la vitesse est $\vec{c_0}$

Quelle est la vitesse en un pt M ?

Alors $\vec{c} = \vec{c_0} + d\vec{c}$.

Il faut calculer $d\vec{c}$?

$\vec{c}(x_1, x_2, x_3, t)$ dépend de t si régime non permanent.

$$dc_1 = \frac{\partial c_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial c_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial c_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial c_1}{\partial t} dt.$$

On considère un régime permanent càd indépendant du tps.

Donc $\frac{\partial c_1}{\partial t} dt = 0$. et en continuant on a $dc_3 = \ldots, dc_2 = \ldots$

$$dc_2 = \frac{\partial c_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial c_2}{\partial x_3} dx_3.$$

$$dc_3 = \frac{\partial c_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial c_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial c_3}{\partial x_3} dx_3.$$

Si on appelle T le tenseur. $T = \begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1} & \frac{\partial c_1}{\partial x_2} & \frac{\partial c_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial c_2}{\partial x_1} & \frac{\partial c_2}{\partial x_2} & \frac{\partial c_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial c_3}{\partial x_1} & \frac{\partial c_3}{\partial x_2} & \frac{\partial c_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$ $\vec{OH} \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix}$

$T = \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$.

On voit que $d\vec{c}$ peut être mis sous la forme

$\boxed{d\vec{c} = T \cdot \vec{OH}}$ disant que $T = \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$ ← ligne, ↑ colonne.

On remarque que le terme $\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} - \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right)$

$T = T_a + T_s$

T_a : tenseur asymétrique car si on change i en j ça change de signe

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} - \frac{\partial c_j}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} - \frac{\partial c_i}{\partial x_j}\right)$$

T_s : tenseur symétrique. parce que si on remplace i en j ça ne change rien.

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} - \frac{\partial c_j}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial c_j}{\partial x_i} - \frac{\partial c_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\vec{C} = \vec{C_0} + Ta.\vec{OM} + T_j.\vec{OM}$$

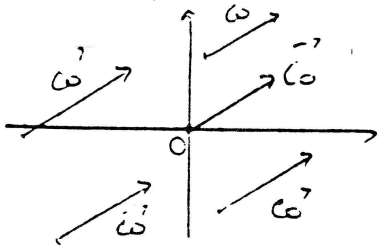
$Ta + T_S = T$

Pr def $\vec{C'_1}$ à partir de $\vec{C_0}$

$C \to \vec{C_0}$

$M \to \vec{C'_1}$

$\vec{C_0}$ correspond à un chp de vitesse uniforme ça veut dire qu'on a le même vecteur vitesse partout.



S'il y a uniquement ce terme il y a translation ou déformation

ça correspond à une translation du fluide.

$Ta.\vec{OM}$ correspond à un chp de divergence

on considère un espace à 3 dim.

$$Ta = \begin{vmatrix} 0\ (i=1,j=1) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x_2} - \frac{\partial C_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2}\right) & 0\ (i=2,j=2) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_2}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_3}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_3}{\partial x_2} - \frac{\partial C_2}{\partial x_3}\right) & 0\ (i=3,j=3) \end{vmatrix}$$

Considérons

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_3}{\partial x_2} - \frac{\partial C_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial C_1}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{C}}$$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{rot}\ \vec{C}}$$

parce que $\vec{\nabla} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{vmatrix} \wedge \vec{C}\begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix}$

$\vec{\Omega}$: vecteur tourbillon.

Si $\vec{rot}\ \vec{C} = \vec{0}$ pas de champ de rot. on dit qu'on a un écoulement irrotationnel

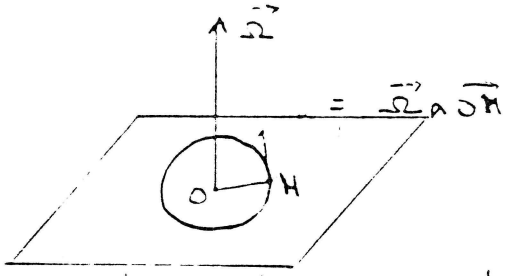
on pt montrer que $\boxed{T_a.\vec{OM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}}$

Projeté de $\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ suivant $\vec{Ox_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_1}\right)dx_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2}\right)dx_2$

Or il ft montrer que ceci est idem à la 1ère ligne de Ta.

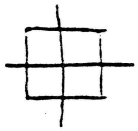
$$Ta \begin{vmatrix} 0 & A & B \\ A' & 0 & C \\ B' & C' & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix} = Adx_2 + Bdx_3$$ c'est pareil.

$T_a \cdot \vec{n}$ est homogène à vitesse. Ce correspond à une vitesse de rotation autour d'un axe qui porte $\vec{\Omega}$.

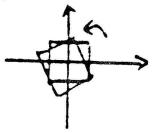


$T_a \cdot \vec{n}$ = <u>chp de rotat°</u>

En la pratique on trace une carré de fluide



En le cas d'une rotat°



<u>$T_s \cdot \vec{n}$</u> : déformation.

On modifie son écriture $T_s \cdot \vec{OH} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right)$

on raisonne dans 1 plan.

$$T_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \ (i=j) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + \frac{\partial c_2}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_1} + \frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial c_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

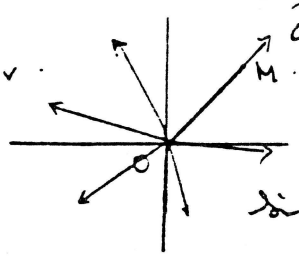
$T_s \cdot \vec{n}$ a 2 composantes suivant $O\vec{x}_1$ et $O\vec{x}_2$.

Suivant $O\vec{x}_1$: $\frac{\partial c_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + \frac{\partial c_2}{\partial x_1}\right) dx_2$. (1)

$O\vec{x}_2$: $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_1} + \frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} dx_2$. (2)

$$\begin{cases} (1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} - \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\right) dx_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} - \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\right) dx_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + \frac{\partial c_2}{\partial x_1}\right) dx_2 \\ (2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_1}\right) dx_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} - \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\right) dx_2 \end{cases}$$

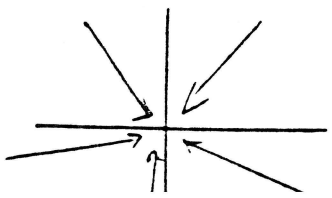
$T_s \cdot \vec{n} = \underbrace{\frac{1}{2} \ div\,\vec{c} \cdot \vec{OH}}_{\text{chp de divergence } \vec{c}_{Div}} + \underbrace{\text{—''—}}_{\text{chp de déformat}^{\text{n}} \ \vec{c}_{Def}}$



la vitesse est portée par $\vec{OH}$

<u>$div\ \vec{c} > 0$</u>. (1)

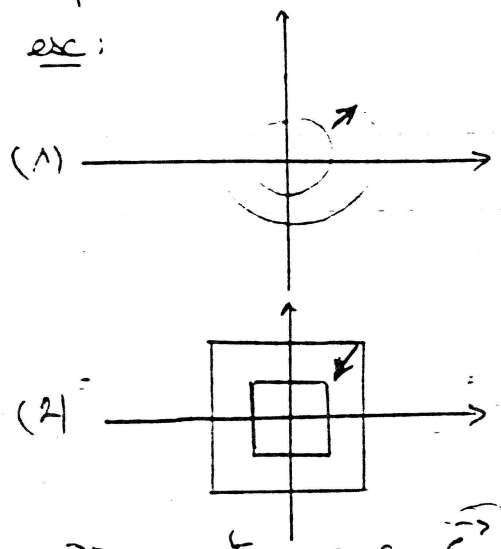
si on va M dans ce sens.



<u>conv. $\vec{c} < 0$</u> (2)

Le chp div ne peut pas exister seul sauf s'il y a source de coné ou puit de courant.

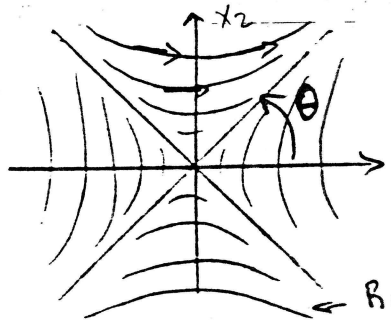
ex :



le cercle s'agrandit au mesure du temps il n'y a pas de chpt de forme.

le coné diminue ds chpt de forme.

On montre que $\vec{c}_{def}$ correspond à une déformat tel que les axes x_1, x_2 correspondent à des lignes de courant.



on montre que.

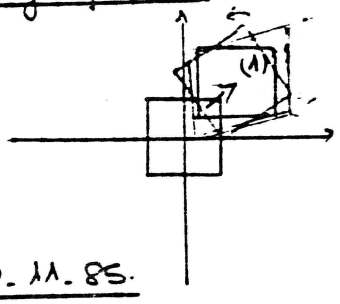
$$\left\| \vec{c}_{def} \right\| = \frac{b}{2 \sin 2\theta} \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \qquad b = cte.$$

Un champ en M. $\vec{c} = \vec{c}_0 + \vec{c}_R + \vec{c}_{Div} + \vec{c}_{def}$

$\vec{c}_0$: chp de translat. $\quad \downarrow \quad T_a \cdot \overrightarrow{OM}$ $\quad T_s \cdot \overrightarrow{OM}$

$\vec{c}_R$: chp de rotat. $\quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$

Physiquement.



Modificat du coné

Au cours du tps il subit ttes ces changts.

13.11.85.

6° Accélérat

Définit $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{c}}{dt}$ suivant ox_1 on a : $\gamma_1 = \dfrac{dc_1}{dt}$.

$$\vec{c} \left| \begin{matrix} c_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ c_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ c_3(x_1, x_2, x_3, t). \end{matrix} \right.$$

On peut donc écrire :

$$\gamma_1 = \frac{dc_1}{dt} = \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial c_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial c_1}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t}\frac{dt}{dt} \quad (1)$$

$$\gamma_1 = c_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_1} - c_2 \frac{\partial c_1}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial c_1}{\partial x_3} + \frac{\partial c_1}{\partial t} \qquad (1)$$

γ_2 et γ_3 obtenus par permutation circulaire.

Fait une transformation dans l'égalité (1):

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_3} - \frac{\partial c_3}{\partial x_1}\right) c_3 - \left(\frac{\partial c_2}{\partial x_1} - \frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right) c_2}_{= \vec{Rot}\,\vec{c} \wedge \vec{c}} + \underbrace{c_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial c_3}{\partial x_3}}_{= \frac{1}{2}\vec{\nabla} c^2 \; = \; \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)} + \frac{\partial c_1}{\partial t}$$

c^2 (somme des carrés des composantes)

définit : $\vec{Rot}\,\vec{c} \begin{vmatrix} \partial c_3/\partial x_2 - \partial c_2/\partial x_3 \\ \partial c_1/\partial x_3 - \partial c_3/\partial x_1 \\ \partial c_2/\partial x_1 - \partial c_1/\partial x_2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}$ $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{Rot}\,\vec{c}$ vecteur tourbillon.

$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{Rot}\,\vec{c} \wedge \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} c^2 + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}}$$

d'un écoulement irrotationnel càd $\vec{Rot}\,\vec{c} = 0$.
Il n'y a pas de cdp de rotation : $\Omega = 0$.

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} c^2 + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}.$$

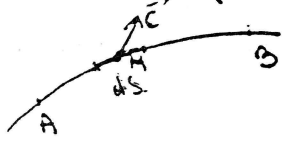
De plus l'écoulement est permanent $\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = 0$.

Pour un écoulement irrotationnel et permanent

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} c^2$$

Écoulement à potentiel des vitesses.

Considérons une ligne quelconque



Si c'est une ligne de courant c'est fait, ce qui n'est pas le cas ici car on a une ligne ∀.

Circulation $d\Gamma = \vec{c} \cdot d\vec{s}$.

Circulation de A à B $\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{c} \cdot d\vec{s}$ $\int_A^B c_1 dx + c_2 dx_2 + c_3 dx$

Puisque cette expression ne dépend pas du chemin suivi on a $\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1$

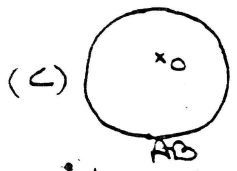
Puisque $\vec{c}$ dérive d'un potentiel ϕ (ϕ est le potentiel des vitesses)

On écrit $\vec{c} = \vec{\nabla}\phi$ en méca des fluides on n'écrit pas le $(-)$

Ce qui dit aussi $\vec{c} \begin{vmatrix} c_1 = \partial\phi/\partial x_1 \\ c_2 = \partial\phi/\partial x_2 \end{vmatrix}$ $d\vec{s} \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix}$

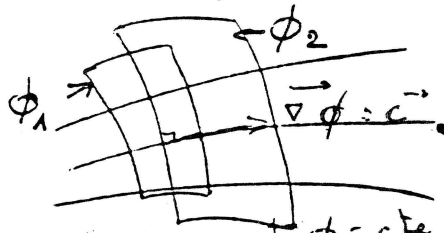
$$\Gamma_{AB} = \int \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3 = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A$$

Propriété Autrement dit Γ ne dépend pas du chemin suivi



$$\Gamma_{(C)} = \oint d\phi = 0. \quad \text{car } \phi_A = \phi_B.$$

A condition que la fct ϕ est univoque càd bien définie à tt point. (ϕ est multivoque lorsqu'elle n'est pas définie en tt pt ex en 0).



$\phi_1 < \phi_2$.

$\vec{\nabla}\phi$ ⊥ aux lignes de potentiel

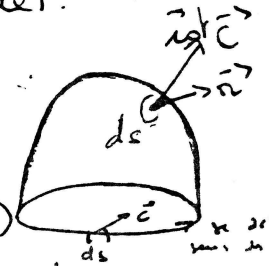
$\vec{rot}\,\vec{c} = 0$ si $\vec{c} = \vec{\nabla}\phi$ on retrouve

$\frac{\partial c_3}{\partial x_2} - \frac{\partial c_2}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$ on retrouve

$\rightarrow$ ligne de courant ⊥ aux surfaces équipotentielle car $\vec{c}$ ⊥ aux S. équipotentiel

Théorème de Stokes

Considérons une ligne fermée (C) et considérons une surface (S) qcq qui s'appuie sur (C).



$\oint d\phi = 0$

Théo: flux de $\vec{rot}\,\vec{c}$ à travers S = $\Gamma_c = \oint d\phi = 0$.

$= \oint \vec{c}\, d\ell = \iint_S \vec{rot}\,\vec{c} \cdot \vec{n}\, dS = \vec{0} \Rightarrow \vec{rot}\,\vec{c} = \vec{0}$. car $\forall \vec{n}$

si $\vec{c} = \vec{\nabla}\phi \Rightarrow \vec{rot}\,\vec{c} = \vec{0}$

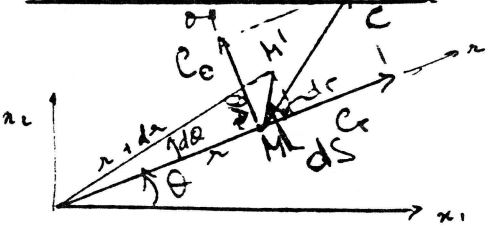
$\vec{rot}\,\vec{c} \cdot \vec{n}\, dS$: flux élémentaire de $\vec{c}$ à travers dS.

$\Rightarrow$ écoulement potentiel des vitesses = écoulement irrotationnel

si ϕ est bien déterminé en tt pt: univoque

$$\vec{Rot}\,\vec{c} = \vec{0}$$

Coordonnées polaires



$\vec{c} \begin{vmatrix} c_r \\ c_\theta \end{vmatrix}$ $\quad d\vec{S} \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \end{vmatrix}$ $\quad$ (r, θ)

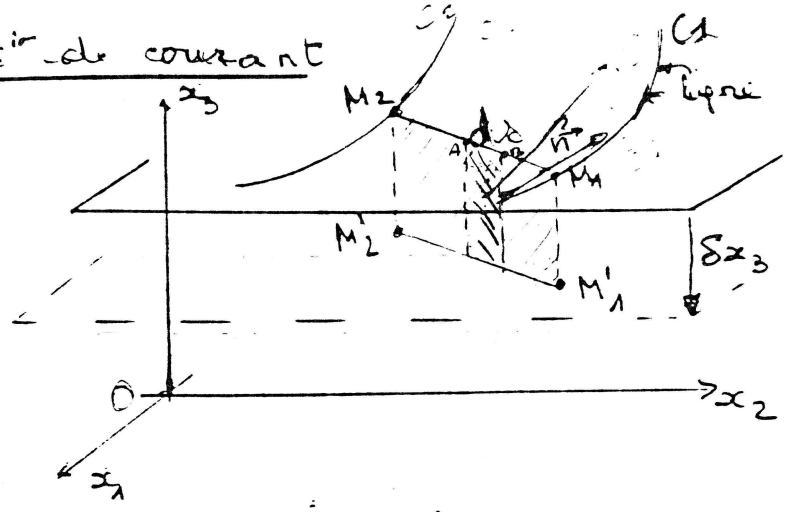
$\Gamma = \int \vec{c}\, d\vec{s}$

$$\Gamma = \int_A^B c_r\, dr + c_\theta\, r\, d\theta. \qquad \vec{c} = \vec{\nabla}\phi \begin{vmatrix} \partial\phi/\partial r \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \end{vmatrix}$$

Si $\vec{c}$ dérive d'un potentiel on a: $\Gamma = \int \frac{\partial\phi}{\partial r} dr + \frac{\partial\phi}{r\,\partial\theta} d\theta = \int d\phi$.

Identification. $\begin{cases} c_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ c_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \end{cases}$ en comparant en coordonnées cartésiennes on a $\begin{cases} c_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ c_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \end{cases}$

8°) Fonction de courant



On considère un écoulement plan
et 2 lignes de courant // au plan x_1, x_2.
et 1 ligne qui joint M_2 à M_1
et translatant de δx_3

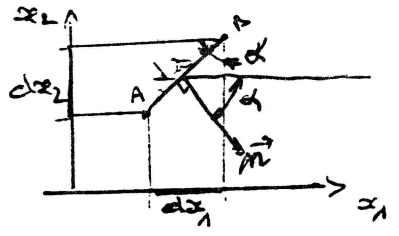
On propose de calculer le flux (débit volumique) de $\vec{c}$ à travers dS (.) (normale)

$dS = ds\ \delta x_3$. $\delta x_3 = cte$

le flux de $\vec{c}$ à travers $\mathcal{Q}_v^{\delta x_3} = \iint \vec{c}.\vec{n}.dS = \underbrace{\delta x_3 \int \vec{c}.\vec{n}.ds}_{\text{débit } \delta Q_v}$.

On se donne $\delta x_3 = 1$ (pour simplifier) $\Rightarrow Q_v = \int_{M_1}^{M_2} \vec{c}.\vec{n}.ds$

Dans un plan (x_1, x_2)



$\vec{ds} \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{vmatrix}$ $\vec{n}$

on retrouve ici (•)

$\|\vec{n}\| = 1$

$\vec{n}.ds \begin{vmatrix} \cos\alpha.ds \\ -\sin\alpha.ds \end{vmatrix}$

ds : scalaire.

donc $\vec{n} = \begin{vmatrix} \cos\alpha = dx_2/ds \\ -\sin\alpha = -dx_1/ds \end{vmatrix}$.

$\vec{c} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$ $\vec{n}.dS \begin{vmatrix} dx_2 \\ -dx_1 \end{vmatrix}$

$Q_v = \int \vec{c}.\vec{n}.ds = \int c_1 dx_2 - c_2 dx_1$.

$= \int \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1$.

Si écoulement à potentiel des vitesses

on a $Q_v = \int \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1$.

Si on définit une fonction ψ de la manière suivante pour simplifier le pb.

$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$ et $-\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$

$\vec{c}$

et d'autre part $\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2}$

ϕ : fct potentiel

$$Q_v = \int \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 = \int d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$$

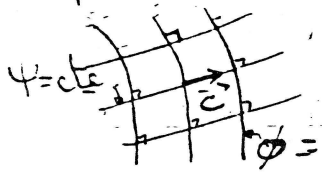
Il ft connaître la valeur de ψ_1 en M_1 et ψ_2 en M_2.

Si M_1 et M_2 sont pris sur la même ligne de débit à travers (S) est nul, autrement dit $\psi_2 = \psi_1$

- si π_1 et π_2 sont pris sur la = ligne de courant $\Rightarrow$ le flux = 0
- si π_1 et π_2 sont pris sur 2 lignes de débit différents $\Rightarrow$ débit = 0 $\Rightarrow \psi_1 = \psi_2$ et $q_v = 0$ ($\vec{c} \perp \vec{n}$)

Conclusion

ψ = cte le long d'une ligne de courant. si ψ varie d'une ligne sur chaque ligne de courant $\Rightarrow$ ψ : fct de courant.



et ϕ et ψ $\perp$

ϕ = cte sur ligne équipotentielle

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0$$ eqn de Laplace

↑ Laplacien

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Sup que le fluide est incompressible.

$\theta = \operatorname{div} \vec{c} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} = 0$.

or $\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ c_2 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\nabla\phi = 0$.

on montre que $\Delta\nabla\psi = 0$.

$$\Delta\nabla\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0.$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$ si $\Delta\phi$ et $\Delta\psi = 0$

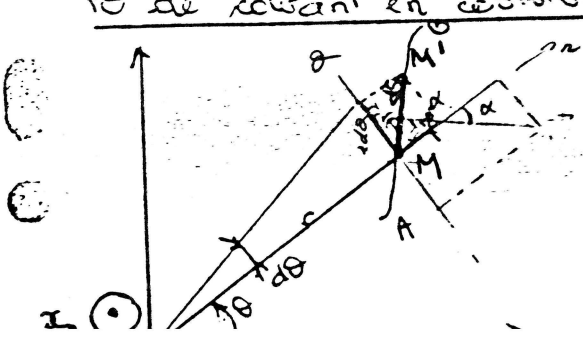
$\Delta(\phi_1 + \phi_2) = 0$ et $\Delta(\psi_1 + \psi_2) = 0$ $\Rightarrow$ ϕ_1, ψ_1 et ϕ_2, ψ_2

$\phi = \phi_1 + \phi_2$
$\psi = \psi_1 + \psi_2$

On dit aussi que ϕ et ψ sont des fct harmoniques

20.11.85

TD de courant en coordonnées polaires



$\vec{c} \left| \begin{matrix} c_r \\ c_\theta \end{matrix} \right.$ $\frac{d\vec{s}}{r d\theta} \left| \begin{matrix} \cos\alpha = r d\theta \\ -\sin\alpha = -dr \end{matrix} \right.$

car $dx_1 = r d\theta$ (en coord polaires)

$q_v = \int \vec{c}\vec{n}\, ds$ et $dx_3 =$

avec $dx_3 = 1$

Relat entre ψ et ϕ

On translate ds suivant x_3.

$dS = ds\,\delta x_3$

débit volumique à travers $ds = dQ_r = \vec{c}\cdot\vec{n}\,dS = \vec{c}\cdot\vec{n}\,ds$

$$Q_r = \int_A^B \vec{c}\cdot\vec{n}\,ds \qquad \vec{c}\begin{vmatrix} c_r \\ c_\theta \end{vmatrix} \qquad ds\,\underbrace{\delta x_3}_{1}$$

$$\vec{n}\,ds\begin{vmatrix} r\,d\theta \\ -dr \end{vmatrix}$$

$$Q_r = \int c_r \cdot r\,d\theta - c_\theta\,dr.$$

on définit la fct ψ par $Q_r = \int d\psi = \int \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\psi}{\partial r}\,dr.$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = c_r \cdot r \Rightarrow \boxed{c_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -c_\theta \Rightarrow \boxed{c_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}} \qquad (1)$$

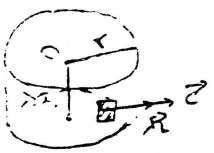
$\Updownarrow$

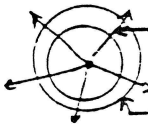
a ce qu'on a en coord. cartésiennes

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \end{aligned}}$$

On considère une source ponctuelle dans 1 plan. Cette source est linéaire, suivant x_3 et émet du fluide de façon isotrope.

$\delta x_3 = 1.$





lignes de courant (ψ = cte)

lignes équipotentielles ⊥ aux lignes de courant (ϕ = cte)

formes maths de ces 2 fcts.

En un point quelconque $\vec{c}$ est radial par raison de symétrie.

$c_\theta = 0$ ds ce cas particulier.

En utilisant la relat (1)

$$\vec{c}\begin{vmatrix} c_r = c = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ c_\theta = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0. \end{vmatrix} \qquad (2)$$

montre que ψ ne dépend pas de r et ϕ ne dépend pas de θ

par conséq $\psi(\theta)$ et $\phi(r)$.

sur cd S : $\vec{c}$ est radiale

$Q_S = C \cdot S = 2\pi r \cdot C \Rightarrow C = \frac{Q_v}{2\pi r}$ $\quad Q_v = cte$ (donnée)

$2\pi r \times \underbrace{S}_{1} \vec{x}_3$

$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q_v}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{Q_v}{2\pi} \log r + cte}$ fonction potentielle

c'est un cercle de rayon r.

sur un r donné : ϕ est cte ; pr dist la cte.

d'après (2) $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = rC = \frac{Q_v}{2\pi}$ $\quad \boxed{\psi = \frac{Q_v}{2\pi} \cdot \theta + cte}$ ce sont des droites.

Exercice de cinématique feuille n° 13 !

$\vec{c}$ | $c_1 = a$
$c_2 = b + mt$
$c_3 = 0$

1. C'est un écoulement plan // à $O x_1 x_2$.

a/ $\rightarrow x_2$ Il non permanent. car $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$, $\vec{c}$ dépend du tps ou a cté.

donc écoulement en régime non permanent $\Rightarrow$ les lignes de courant est $\neq$ trajectoire.

b/ Eqn des trajectoires

$x_1 (x_{10}, x_{20}, t)$
$x_2 (x_{20}, x_{20}, t)$
$x_3 : (0)$

$c_1 = \frac{dx_1}{dt} = a \Rightarrow x_1 = at + \underbrace{x_{10}}_{\text{cte}}$ pour $t=0$ (A)

$c_2 = \frac{dx_2}{dt} = b + mt \Rightarrow x_2 = bt + \frac{1}{2} mt^2 + \underbrace{x_{20}}_{cte}$ (B)

$c_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0 \Rightarrow x_3 = x_{30} = cte$. càd garde la valeur x_{30} pour $t=0$

On fait : $x_2 (x_1)$.

(A) $t = \frac{x_1 - x_{10}}{a}$ $\Rightarrow$ (B) $\boxed{x_2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{x_1 - x_{10}}{a}\right)^2 + b\left(\frac{x_1 - x_{10}}{a}\right) + x_{20}}$

ce sont des paraboles dans des plans // à $O x_1 x_2$.

Eqn ligne de courant

$\frac{dx_1}{c_1} = \frac{dx_2}{c_2} = \frac{dx_3}{c_3} \to 0$

$\frac{dx_1}{a} = \frac{dx_2}{b+mt}$ on intègre $a\,dx_2 = (b+mt)\,dx_1$ $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b+mt}{a}$

Ce qu'on cherche c'est $x_2(x_1)$

$$\boxed{x_2 = \frac{b+mt}{a} x_1 + cte}$$ C'est des droites de pente $\frac{b+mt}{a}$ qui varie en fct du tps.

Graphe : $M(x_1, x_2)$ ← Ligne de courant ← trajectoire

3°) Ecoulement rotationnel ?

$$\vec{rot}\,\vec{c} \left| \begin{matrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{matrix} \right| \wedge \left| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \partial c_3/\partial x_2 - \partial c_2/\partial x_3 \\ - \quad - \\ - \quad - \end{matrix} \right|$$

Tous les ∂x_1, ∂x_2, ∂x_3 sont nuls car $\vec{c}$ ne dépend pas de x_1, x_2, x_3

donc $\vec{rot}\,\vec{c} = 0$ donc irrotationnel.

4°) Eqn des lignes équipotentielles

la vitesse dérive d'un potentiel ϕ qu'on cherche.

$$\vec{c} = \nabla\phi \left| \begin{matrix} c_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = a \\ c_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = b+mt \\ c_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = 0. \end{matrix} \right.$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} dx_2.$$

$d\phi = a\,dx_1 + (b+mt)\,dx_2$. on intègre

$$\boxed{\phi = a x_1 + (b+mt) x_2 + (de = \phi_0)}$$ forme maths de ϕ.

forme équipotentielle $\phi = cte$

donc $a x_1 + (b+mt) x_2 = cte$. cad $\boxed{x_2 = \frac{-a}{b+mt} x_1 + cte}$

C'est des droites de pente $= \frac{-a}{b+mt}$

On voit que ce sont des droites.

Les droites $\psi = cte$ et $\phi = cte$ sont $\perp$.

par vérification $\left(\frac{b+mt}{a}\right) \times \left(\frac{-a}{b+mt}\right) = -1$. les droites sont $\perp$.

II $c_1 = x_1 - 5x_2$

$c_2 = 5x_1 - x_2$

1) Ecoult plan // à Ox_1x_2 car $c_3 = 0$.

et permanent $\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{\partial c_2}{\partial t} = 0$ ne dépend pas du tps.

et incompressible si $\theta = \operatorname{div} \vec{c} = 0$. qui est CNS

$\operatorname{div} \vec{c} = \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + \frac{\partial c_3}{\partial x_3} = 0$. $\operatorname{div} \vec{c} = 1 - 1 = 0$. de incompressible

2) champ d'accélérat

$\vec{\gamma}$ | $\gamma_1 = dc_1/dt$; $\gamma_2 = dc_2/dt$; $\gamma_3 = dc_3/dt = 0$ } par définit.

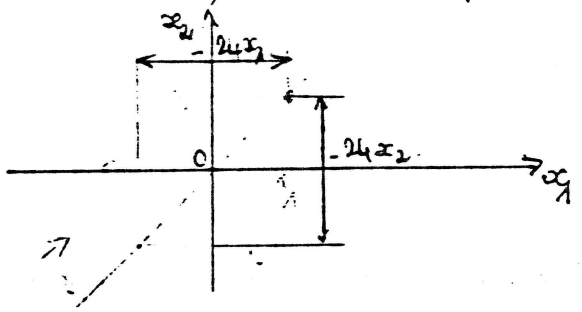
or $\frac{dc_1}{dt} = \frac{d x_1}{dt} - 5\frac{dx_2}{dt} = c_1 - 5c_2$ (1) car $\vec{c}$ | $c_1 = dx_1/dt$; $c_2 = dx_2/dt$; $c_3 = dx_3/dt$.

$\frac{dc_2}{dt} = 5\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = 5c_1 - c_2$ (2).

(1) $(c_1 - 5x_2) - (25x_1 - 5x_2) = -24x_1$

(2) $(5x_1 - 25x_2) - (5x_1 - x_2) = -24x_2$ } de $c_1 = x_1 - 5x_2$; $c_2 = 5x_1 - x_2$.

Autrement dit en un point de coordonnées (x_1, x_2).



3) Ligne de courant

$\frac{dx_1}{c_1} = \frac{dx_2}{c_2} = \frac{dx_3}{c_3 \to 0}$

$\frac{dx_1}{x_1 - 5x_2} = \frac{dx_2}{5x_1 - x_2}$ $(5x_1 - x_2)dx_1 = 5(x_1 - 5x_2)dx_2$

$5x_1\,dx_1 - x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2 + 5x_2\,dx_2 = 0$ on cherche $x_2(x_1)$.

$= -d(x_1x_2)$

$\frac{5x_1^2}{2} - x_1x_2 + 5\frac{x_2^2}{2} = \text{cte}$.

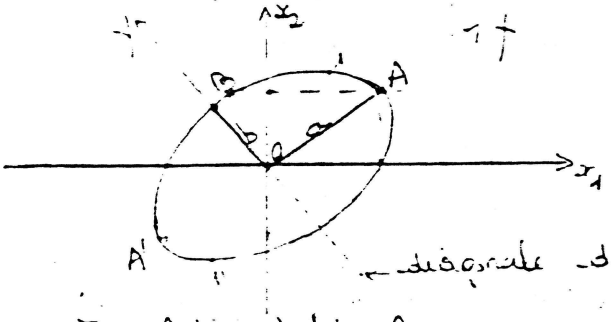
$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = cte$ éqn conique. (A_1)

or l'éqn d'une conique $Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 = cte$

lorsque $B^2 - AC < 0$ c'est une ellipse
$B^2 - AC > 0$ hyperbole
$B^2 - AC = 0$ parabole.

on a ici $B^2 = +1$. $A = 5$ $C = 5$, $1 - 25 = -24$ ce qui est des ellipses

si on change x_1 en x_2 et x_2. et x_2 en x_1 ça ne change pas.



c'est le seul ecs de fig où ça marche car pt sur (A_1) il ft une symétrie.

en B: $x_1 = -x_2$.

← diagonale donc pt x_2 on a $-x_2$ donc x_1

4°) Est-il irrotationnel

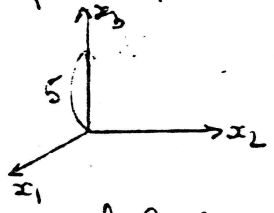
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial c_3}{\partial x_2} - \frac{\partial c_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_3} - \frac{\partial c_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial c_2}{\partial x_1} - \frac{\partial c_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 10. \end{vmatrix}$$

$\vec{rot}\ \vec{c} = 10$.

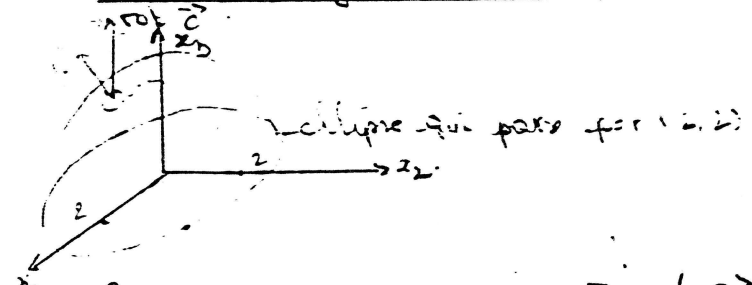
donc non irrotationnel.

on peut préciser que le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$.

a pr module 5.



5°) Calculer le long de la ligne de courant



théorème de Stokes: $\Gamma = \oint \vec{c}.d\vec{s} = \iint \vec{rot}.\vec{c}.\vec{n}.dS$.

on prend une surface qui sera le plan de l'ellipse.

$\Gamma = \underbrace{\|\vec{rot}\ \vec{c}\|}_{10} \times S$. S = aire surface de l'ellipse

on pt faire ça si $\vec{rot}\ \vec{c} = cte$ il ne dépend pas de x_1 et x_2.

on prend en A qui est le seul pt où $x_1 = x_2$.

A( ) = A( )

D'après l'éq (A) p 13' $5\times4 - 2\times4 + 5\times4 = cte$

$\Rightarrow 40 - 8 = 32$

$\Rightarrow cte = 32$

$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

p^r le p^t B $x_1 = -x_2$ ou plutôt $-x_1 = x_2$

dsq (A_1) $5x_1^2 + 2x_1^2 + 5x_1^2 = 32$

$12 x_1^2 = 32$ $x_1^2 = 8/3$ $\Rightarrow$ [illegible]

$b^2 = 16/3$ $b = 4/\sqrt{3}$

$\Gamma = 10 \times \pi \times \underbrace{2\sqrt{2}}_{a} \times \underbrace{\frac{4}{\sqrt{3}}}_{b} = 80\pi\sqrt{2/3}$ $\Gamma = 80\pi\sqrt{213}$.

CHAP III — DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

27.11.85

Rappels : a) Fluide dt les diff particules glissent sans frottt dc 6 unt relatif

b) Les forces de pression : $-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$ par unité de masse sont normales aux surfaces.

1°) Eqn générale de l'écoulement d'un fluide parfait

$\sum \vec{f} = m\vec{\gamma}$ $m=1$. $\vec{\gamma} = \sum \vec{f}$ avec $\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + (\vec{rot}\ \vec{c} \wedge \vec{c}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}c^2$

Les forces est de 2 sortes f : $\rightarrow \vec{F}$: de volume (pds · force d'unité des corps)

$\rightarrow f$: de surface (pression) $= -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$.

$\vec{\gamma} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$

Si $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ dérive d'un potentiel U. $\Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\nabla}U = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$.

C'est cé qr le cas de la pesanteur. $U = gz$ $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}(\rho z) - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$

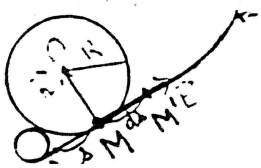
Si le fluide est incompressible $\rho = cte$.

donc $\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(\rho g z) - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(\underbrace{p + \rho g z}_{\hat{p}\text{ modifiée}}) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p}$.

fondamental $\boxed{\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p}$ fluide incompressible dans le chp de la pesanteur (ce qui ne sera pas le cas)

Eqn intrinsèque (ou locale)

Ça consiste à considérer une trajectoire.



R : rayon de courbure
C : centre de courbure

Ça pt être considéré cé une portion de courbe de cercle de rayon de courbure R.

γ | $\frac{dc}{dt}$ (suivant $\vec{t}$) ; $\frac{c^2}{R}$ (suivant $\vec{n}$)

$\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{\rho}$

$\vec{\nabla}\hat{\rho}$ | $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial s}$ (suivant $\vec{t}$) ; $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial n}$ (suivant $\vec{n}$)

proj $/\vec{t}$:

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial s}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s}\frac{ds}{dt} \quad - c.$$

$\frac{dc}{dt}$: taux de variat de c en fct du tps en M donné

$\frac{\partial c}{\partial t}$: taux de variat de c en fonct de (s) le long de la trajectoire.

Si régime permanent $\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dc}{dt} = c\frac{\partial c}{\partial s}$

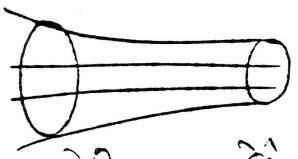
$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial s} = -\rho c \frac{\partial c}{\partial s}}$$

Ça dit donc que le long de la trajectoire c augmente suivant (s)

$\frac{\partial c}{\partial s} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial s} < 0$

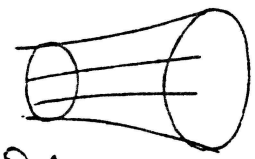
(1) - Ça peut augmenter si on a une convergence de la trajectoire : les vitesses croient
(2) Ça peut ~~augmenter~~ diminuer si on a une divergence de la trajectoire : les vitesses décroient

(1)



$\frac{\partial c}{\partial s} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial s} < 0$

(2)



$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial s} > 0 \quad \frac{\partial c}{\partial s} < 0.$

proj $/\vec{n}$

$$\frac{c^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial n} \rightarrow \boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial n} = -\frac{\rho c^2}{R}} < 0.$$

1ère conclusion

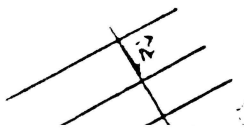
Ça dit donc que la pression suivant $\vec{n}$ décroit sur le rayon de courbure R.

2ème conclusion

Si on a des trajectoires rectilignes $R = \infty$. on a $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial n} = 0$.

Il n'y a pas de $\vec{\nabla}\hat{\rho}$ car $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial n} = 0$. donc $\hat{\rho} = cte$ dans une section dite à condition que les lignes de courant soit rectilignes.

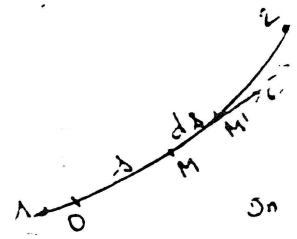
$\hat{\rho}$ cte ds une section dite.



2] Théorème de BERNOUILLI

a) Cas d'un écoulement permanent d'un fluide incompressible (ρ = cte)

Considérons une ligne de courant.



$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p+\rho g z) \quad \left.\right\} (1)$$
$$\text{avec } \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + (\vec{rot}\,\vec{c}\wedge\vec{c}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}c^2$$

on multiplie par $d\vec{s} = \overrightarrow{MM'}$.

$$\vec{\gamma}\cdot d\vec{s} = \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\,d\vec{s} + (\vec{rot}\,\vec{c}\wedge\vec{c})\,d\vec{s} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}c^2\cdot d\vec{s}$$
$$\vec{\gamma}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p+\rho g z)\,d\vec{s}$$

1ère observation : $d\vec{s}\,(\vec{rot}\,\vec{c}\wedge\vec{c}) = 0$ car $\vec{c}\,/\!/\,d\vec{s}$ puisque c'est une ligne de courant.

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\,d\vec{s} + \left[\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p+\rho g z) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}c^2\right]d\vec{s} = 0. \qquad (*)$$

on a fait passer le ds le 1er membre.

ρ = cte : $\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\left[p+\rho g z+\frac{1}{2}\rho c^2\right]\cdot d\vec{s} = 0$ en intégrant.

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}\cdot d\vec{s} + \frac{1}{\rho}\left[p+\rho g z+\frac{1}{2}\rho c^2\right]_1^2 = 0$$

car $\int_1^2 \vec{\nabla}z\cdot d\vec{s} = z_2 - z_1$

b) Ecoulement permanent ($\partial/\partial t = 0$).

$\Rightarrow \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = 0$ $\quad \rho$ = cte $\Rightarrow (z_2 - z_1 = 0)$

$$\Rightarrow p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2$$

<u>Conclusion</u> : $\Leftrightarrow$ **$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho c^2$ = cte le long d'une ligne de courant.**

c) Ecoulement irrotationnel ($\vec{rot}\,\vec{c} = 0$)

Reprenons $\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p+\rho g z)}_{(1)} = \underbrace{\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}}_{0} + \vec{rot}\,\vec{c}\wedge\vec{c} \underbrace{-\frac{1}{2}\vec{\nabla}c^2}_{2}$

car on considère ici un écoulement irrotationnel et permanent

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\left(p+\rho g z-\frac{1}{2}\rho c^2\right) = 0.} \qquad \text{Art 2)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p+\rho g z-\frac{1}{2}\rho c^2 : \text{est cte dans tt le fluide}}$$

d) Interprétation énergétique du théorème de BERNOUILLI

$$p + \underbrace{\rho g z}_{\text{travail effectué par unité de volume}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho c^2}_{\text{occupons nous de ceci : représente l'énergie cinétique de l'unité de volume.}} = \text{cte}$$

travail effectué par unité de volume c'est l'énergie potentiel du pesanteur par unité de volume mais dite de pression par unité de volume. $p = \frac{F}{S} = \frac{F.L}{S.L} = \frac{W}{V}$

énergie totale = cte.

Le théorème est la loi de tous ces principes traduit le principe de la conservation d'énergie dans un principe sans perte ni gain.

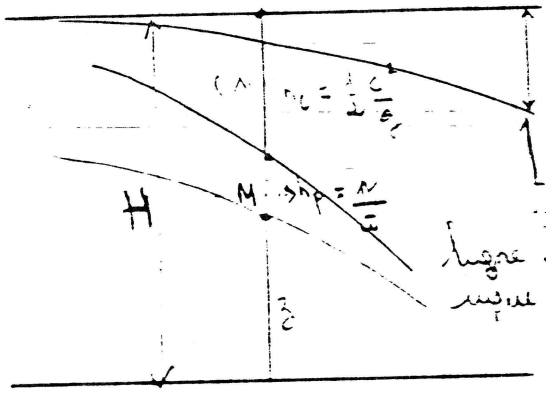
a) Notion de charge

charge = énergie totale / m³ = $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$ (en J/m³)

Si on divise par $\varpi = \rho g$: $\frac{p}{\varpi} + z + \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$ chaque elt est homogène à une longueur = hauteur. (H)

charge $H_{(m)} = \frac{p}{\varpi} + z + \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

$\frac{p}{\varpi} + z$: hauteur piézométrique. $\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$: h_c

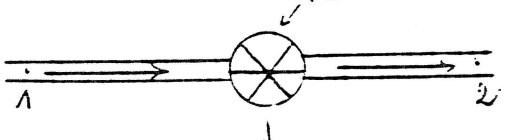


on appelle $h_c = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

H = cte ⇒ ligne de charge est horizontale dans un fluide parfait on voit que la vitesse augmente ds le sens d'écoulement.

Cas fluide réel il y a frottement le long de la ligne de courant de fluide il y a perte de charge sur la ligne de charge n'est plus horizontale.

• Canalisation avec turbine

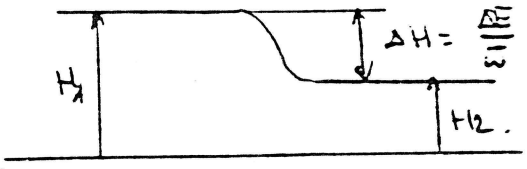


Théorème de Bernoulli.

$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \pm E$

E_1 énergie en amont — E_2 énergie en aval.

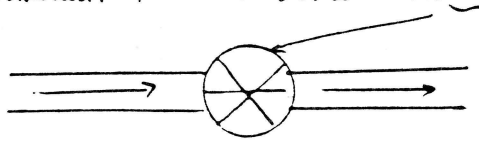
énergie fournie à la turbine (+E) ou il y a consommation d'énergie.



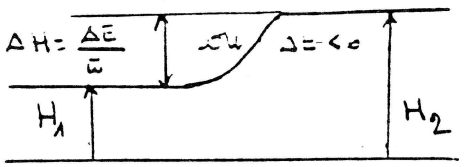
perte.

forme de la ligne de charge.

• Turbomachine : couplage avec moteur.



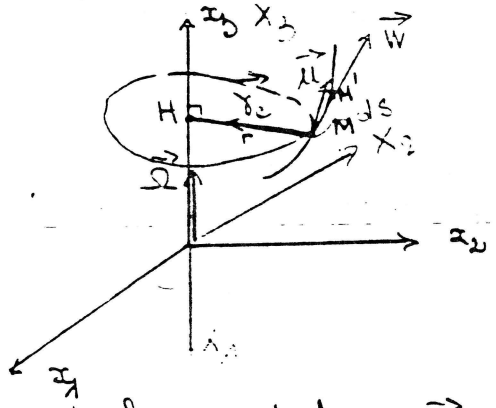
le moteur fournit de l'énergie.



$\Rightarrow p_1 - \rho\left(g z_1 - \frac{1}{2} r^2 \omega^2\right) = p_2 - \rho\left(g z_2 - \frac{1}{2} r_2^2 \omega^2\right) - \Delta E$

4.12.85

3. Théorème de Bernoulli en repère relatif.



x_1, x_2, x_3 : rep absolu galiléen
X_1, X_2, X_3 : rep relatif en rotation autour de x_3 avec vitesse angulaire $\vec{\Omega}$

On considère une ligne de courant ds un rép relatif : X_1, X_2, X_3

$\vec{W}$: vitesse relatif.

$\vec{u}$: vitesse d'entraînement

$\vec{c}$: ds le rep absolu : $\vec{c} = \vec{W} + \vec{u}$

$\overrightarrow{HM} = \vec{r}$ $\qquad \vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$

$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{W}$

$\vec{\gamma}_e = \Omega^2 \vec{r} = \vec{\nabla}\left(-\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right)$

$\vec{\gamma}_r = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{rot}\ \vec{W} \wedge \vec{W}) + \frac{1}{2}\nabla \vec{W}^2$

0 en régime permanent.

Eqt fondamentale de la dynamique ds un repère absolu

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z)$$

$$\vec{\nabla}\left(-\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\vec{\nabla} W^2 + (\vec{rot}\ \vec{W} \wedge \vec{W}) + (2\vec{\Omega} \wedge \vec{W}) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z)$$

$-\frac{u^2}{2}$ puisque $u = \Omega r$.

$$\vec{\nabla}\left[\frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p + \rho g z)\right] + (\vec{rot}\ \vec{W} \wedge \vec{W}) + (2\vec{\Omega} \wedge \vec{W}) = 0$$

Multiplié scalairement par $\vec{ds}$. $\vec{ds} = \overrightarrow{HH'}$ pris sur la ligne de courant.

$$\vec{\nabla}\left[\frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p + \rho g z)\right]\vec{ds} + \underbrace{(\vec{rot}\ \vec{W} \wedge \vec{W})\,\vec{ds}}_{=0} + 2\underbrace{(\vec{\Omega} \wedge \vec{W})\,\vec{ds}}_{=0} = 0.$$

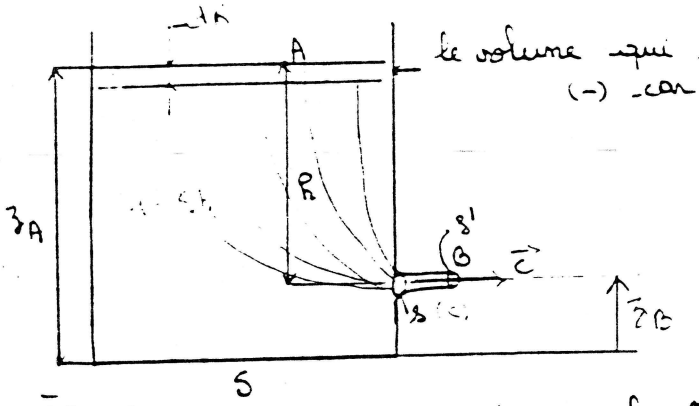
$$\int_1^2 \vec{\nabla}\underbrace{\left[\left(\frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p + \rho g z)\right)\right]}_{\text{cte entre 1 et 2.}} ds = 0$$

soit encore : $\frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - g z = \text{cte}$ le long de la ligne de courant

ou encore $\boxed{p + \rho g z - \frac{1}{2}\rho(W^2 - u^2) = \text{cte}}$ Appliqué aux pompes hydrauliques

$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho c^2 = cte$ $\quad c^2 = w^2 - u^2$

Application de ce théorème



le volume qui s'écoule ici : $dv = (-) S\,dh$.
(-) car on a $\underset{t}{h}$ $\underset{t+dt}{h + dh}$ $dh < 0$.

1ère qd qu'on se pose : entre quel pt c'est appliqué.
2ème qd : est ce qu'on a régime permanent !

1) C'est appliqué entre 1 pt A et B.
2) Ce n'est pas un régime permanent car il y a diff entre le début et la sortie.
Entre (t et dt) on considère qu'on a une succession de régime permanent.
C'est un régime quasi permanent de la mesure où ça devient doucet en (c)

$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho c_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho c_B^2$

$p_A = 0$ car c'est patm ; $c_A^2 \ll c^2$; $p_B = 0$ patm.

$\frac{1}{2}\rho c_A^2$ négligé devant $\frac{1}{2}\rho c_B^2$.

$\frac{1}{2}\rho c_A^2$ négligé devant $\frac{1}{2}\rho c_B^2$

$c_A = s'e$ $\quad h = \frac{s'}{s}$ $\quad \frac{1}{2}\rho c^2 = \rho g \underbrace{(z_A - z_B)}_{R}$

$c^2 = 2gh$ $\quad c = \sqrt{2gh}$ la vitesse ne dépend que de h.

vitesse qui chute dans le vide
Ici ce passe ça si une molécule d'eau est tombée en B.

B | mgh ; $\frac{1}{2}mc^2$

2) Débit volumique $Q_v = s'c = k s \sqrt{2gh}$ $\quad h = h_0$ à $t = 0$.
s' : sect du jet de sortie contracté.

$Q_v = \frac{dv}{dt} = \frac{-S\,dh}{dt} = k s \sqrt{2gh}$

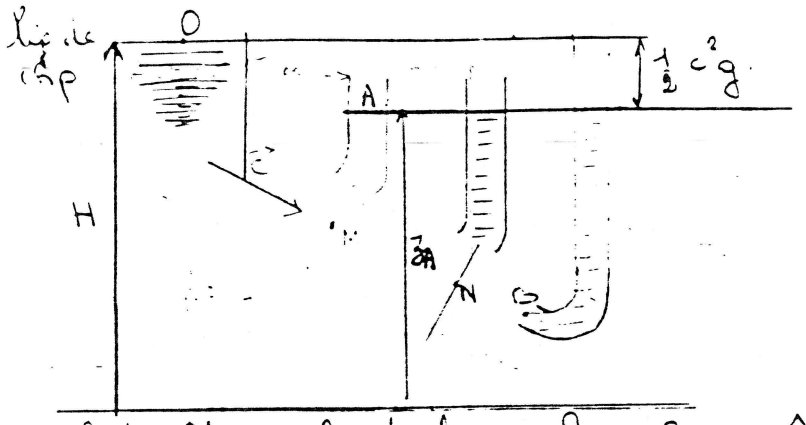
$dt = -\frac{S\,dh}{k s \sqrt{2gh}}$

$T = \frac{-S}{k s\sqrt{2g}} \int_{h_0}^{0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{S}{k s\sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2S}{k s\sqrt{2g}} \sqrt{h_0}$.

$\gamma = \frac{S h_0}{\left(k s \frac{\sqrt{2g h_0}}{2}\right)}$ → volume total écoulé
→ $\frac{1}{2}$ débit initial càd à l'instant $t = 0$ qd $h = h_0$.

Prise de pression dans une conduite

On considère une conduite de section uniforme le liquide s'écoule avec une vitesse $\vec{c}$



QQ : à quel niveau le liquide va monter. ligne piézométrique (•)

Soit M un pt de la section . On a $\hat{p}$ = cte dans une section si les lignes de courant sont rectilignes

Puisque c'est une section uniforme => ligne de courant rectiligne.

Dans le tube $\hat{p}$ = cte il n'y a pas de discontinuité de $\hat{p}$.

$\hat{p} = p + \rho g z$ = cte applicable n'importe où en particulier à la surface

en A : $\hat{p}_A = p_a + \rho g z_A$ $\quad \hat{p}_A = \rho g z_A$ $\quad h_p = \frac{\hat{p}}{\varpi} = z_A$

$0 = p_{atm}$

Si on applique la loi de Bernoulli au pt M et N.

$$\underbrace{p_M + \rho g z_M}_{\hat{p}_M} + \frac{1}{2}\rho c_M^2 = \underbrace{p_N + \rho g z_N}_{\hat{p}_N} + \frac{1}{2}\rho c_N^2 \qquad (\Delta)$$

$c_M^2 = c_N^2$ car le débit est le même aux niveaux

=> $\hat{p}_M = \hat{p}_N$ donc on a le même niveau en (•)

Si maintenant on met une troisième tube qui fait face au courant (•)

B = pt d'arrêt car au point B $c_B = 0$

Théorème de Bernoulli : $\underbrace{p_N + \rho g z_N}_{\hat{p}_N} + \frac{1}{2}\rho c_N^2 = \underbrace{p_B + \rho g z_B}_{\hat{p}_B} + \frac{1}{2}\rho c_B^2$.

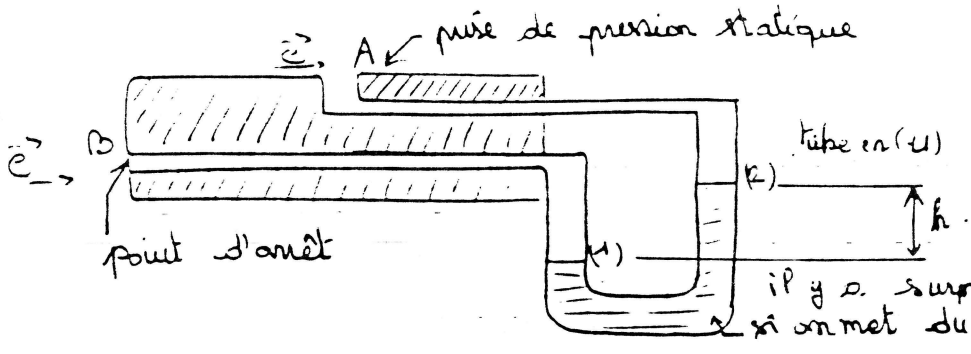
$\hat{p}_N + \frac{1}{2}\rho c^2 = \hat{p}_B$ $\quad \frac{\hat{p}_B}{\varpi} = \frac{\hat{p}_N}{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$ $\quad \varpi = \rho g$

$H \quad h_p \quad \frac{1}{2}c^2/g$.

la ligne de chp est horizontale puisque c est cte partout et on a $H = h_p + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$

Si c'est alimenté par un bassin ($\equiv$) $\vec{H}$ est la même partout.

Application au tube de PITOT



la pression en (2) est sup à (1) car il y a un pt d'arrêt en B.

la diff de pression qui ∃ entre les deux sont h la dénivelé ab : la diff de pression $\Delta_p = \frac{1}{2}\rho c^2$ ↑ de l'air

$= \Delta_p = h \rho' g$ ↑ liquide (eau)

$\Delta_p = \frac{1}{2}\rho c^2 = h \rho' g$.

$h = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho' g} c^2$ $\qquad c = \sqrt{\frac{2 h \rho' g}{\rho}}$

intérêt : cette outil est de déterminer c et h. h mesuré => on calcule c

Appli cab numérique : ~~de cette outil et~~.

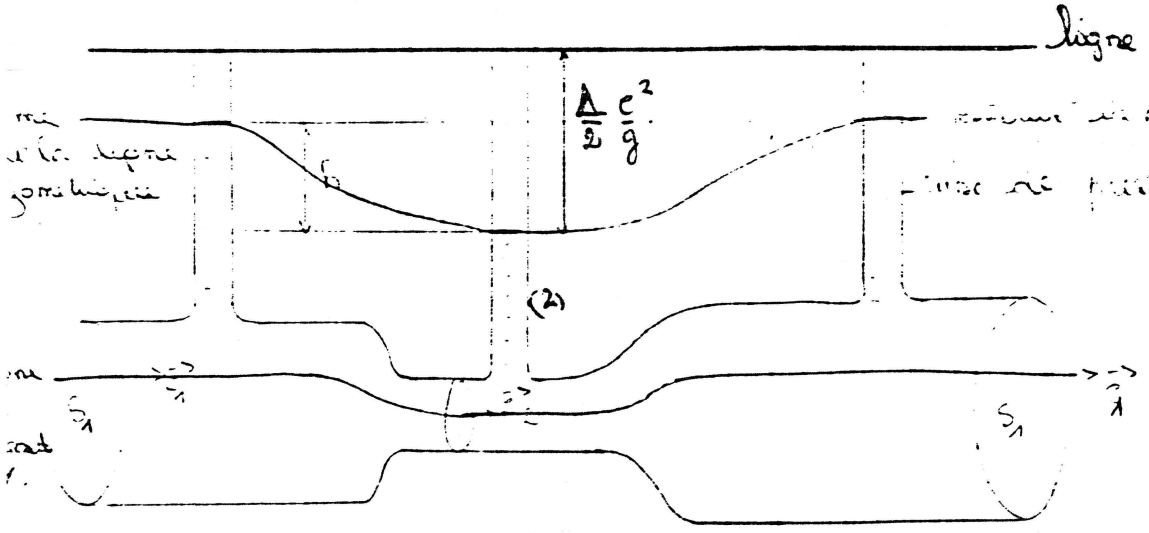
Si on a de faire à de l'eau $\rho' = 10^3$ kg m^{-3} $\quad g = 9,81$ m s^{-2}

ρ : air $= 1,225$ kg m^{-3}

$c = 4 \sqrt{10^3 h}$ ↑ (mètre) permet de calculer la vitesse dû au vent

11.12.85.

Phénomène de Venturi.



la vanadium de seul vanadite.

éq de continuité $S_1 c_1 = S_2 c_2 = Q_v$ est la même partout. (A)

Eq de Bernoulli : (1) On prend une ligne de courant V et on écrit l'eq de

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2.$$

$$\hat{p}_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = \hat{p}_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2.$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{1}{2}\rho (c_2^2 - c_1^2)$$

$\hat{p}$ motrice en 1 > $\hat{p}$ motrice en 2. donc (1)

$$h = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\omega} = \frac{1}{2g}(c_2^2 - c_1^2) \quad (A).$$

ligne de chge ete => car fluide supposé parfait.

la différence entre ligne de chge et ligne piézométrique $= \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$.

(1) $\Rightarrow 2h\omega g = c_2^2 - c_1^2$. $\quad c_2^2 = 2\omega g h + c_1^2$.

En utilisant la relat (A) : $c_2^2 = 2\omega g h + c_1^2 = 2gh + c_2^2 \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2$

$$c_2^2 \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) = 2gh.$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}$$

$$\boxed{Q_v = S_2 c_2 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}}$$

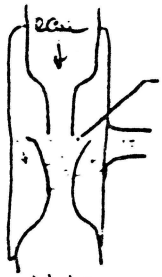
Autre dit pr 1 tube dont on connait S_1, S_2.

$Q_v = k\sqrt{h}$ on a fabriqué un débitmètre puisque à partir de h mesuré on pt calculer Q_v.

lorsque la vad diminue $\boxed{\vec{c} \nearrow \text{ et } p \searrow}$. La preuve parce que ça monte moins fort dans le tube (2)

Applicat Trompe à eau

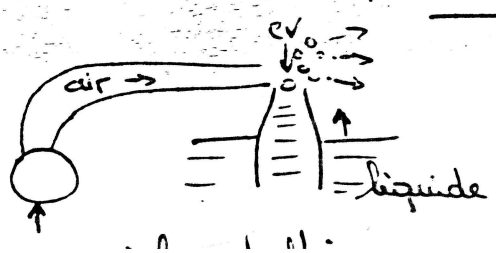
1) c'est une convergent suivi d'un divergence.



$p < p_{atm}$. Donc il y a aspiré d'air (1) qui va se mettre en forme de bulle.

//// $< p_{atm}$ puisqu'on ouvre le robinet.

2)



les lignes de courant convergent l'air s'accroit et on a $p < p_{atm}$

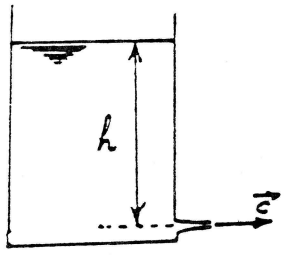
$p < p_{atm}$.

Le vide partiel est suffisant pr aspirer le liquide. Le liquide est pulvérisé en sortant du

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

p16'

I- Un réservoir rempli d'un liquide de masse volumique ρ est percé d'un trou de section s situé à une distance h en dessous de la surface libre.

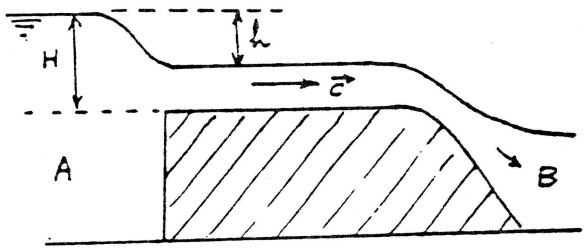


1°- En admettant que le régime d'écoulement est quasi-stationnaire, déterminer la vitesse $\vec{c}$ du jet à la sortie du trou.

2°- La veine du jet a une section s'< s. On appelle $k = \frac{s'}{s}$ le coefficient de contraction du jet. Calculer en fonction de h, le débit volumique. En déduire le temps que met le liquide pour s'écouler.

p18'

II- Un déversoir à large seuil permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir (A) dans lequel la surface libre est à une hauteur H au-dessus du seuil, vers un réservoir (B). La dénivellation entre la surface libre en amont et le niveau de l'eau au-dessus du seuil est égale à h. On admet qu'au passage du seuil, l'écoulement se fait avec une vitesse uniforme $\vec{c}$. On néglige la vitesse de l'eau en amont.

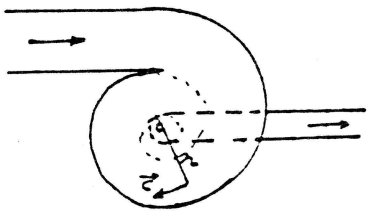


1°- Calculer la vitesse $\vec{c}$ au niveau du seuil.

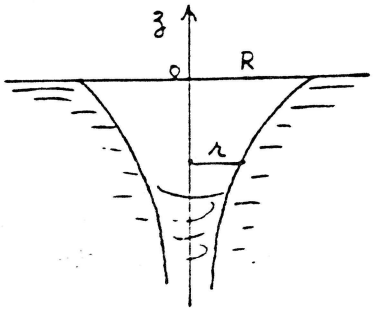
2°- Déterminer le débit volumique par unité d'envergure. Calculer le débit maximum pour une hauteur H donnée.

p19

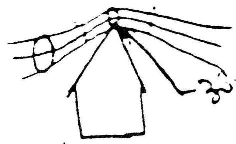
III- On considère l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ dans une bâche spirale.



1°- Montrer que la vitesse d'écoulement est inversement proportionnelle à la distance r au centre O de la bâche.



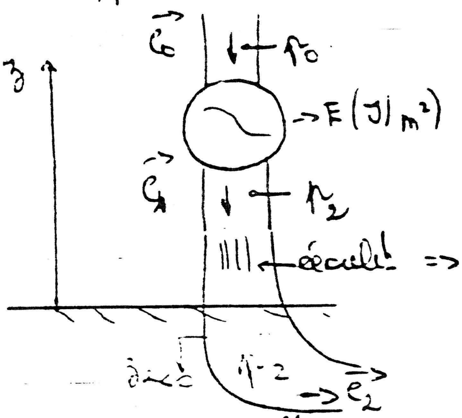
2ºEn utilisant le résultat précédent déterminer l'équation z(r) d'une méridienne limitant la surface libre d'un fluide en écoulement tourbillonnaire tel que sur la surface libre de niveau z = o on a r = R.

3)  maison soumis à un vent important.

zone dépressionnaire car la pression ↘ lorsque S diminue et c ↗.

Tout se passe c'est si on a un aspirateur à ce niveau, et le toit risque de s'arracher.

Diffusion de turbine.



considérons une turbine qui reçoit de l'eau et qui restitue cette eau dans la partie inférieure.
transformat de l'énergie fluide en énergie mécanique.

Eq. de Bernoulli : $\underbrace{p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho c_0^2}_{\text{énergie en } J/m^3 \text{ en amont}} = \underbrace{p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2}_{\text{énergie en aval}} + E$ (1)

conserva^t d'énergie avec $p_1 = p_{atm}$.

sup qu'on met un diffuseur : tuyau (.) on canalise l'eau $\vec{c}_2 \to 0$. car par ex. on canalise ds un bassin on a

$$p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho c_0^2 = \underbrace{p_2 + \rho g z_2}_{} + \frac{1}{2}\rho c_2^2 + E' \quad (2).$$

$p_2 = p_a - \rho g z_2 \quad \Rightarrow p_{atm}$

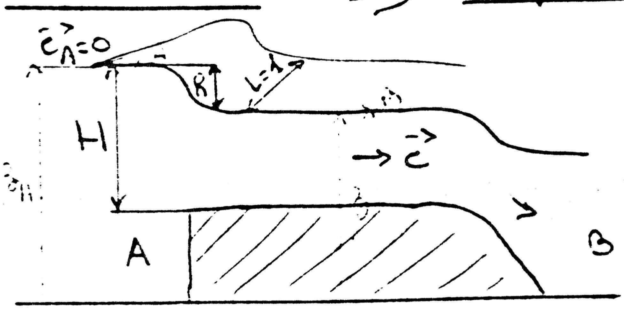
c_2 petit, z_2 négatif.
E' nouvelle énergie fournit par turbine.

comparons (1) et (2) $E' = E + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2$.

avec diffuseur ↑ (E') ; sans diffuseur ↑ (E) ; $\rho g z_1$: énergie potentiel de pesanteur / par unité de volume ; $\frac{1}{2}\rho c_1^2$: énergie cinétique (par m³).

Diffuseur qui permet de récupérer l'énergie potentiel et cinétique.

Exercice II) Dynamique des fluides parfaits.

1) 

Théo de Bernoulli entre A et B : Entre deux pts sur la surface : A et B

$$P_A + \rho g z_A + \underbrace{\frac{1}{2}\rho C_A^2}_{\text{négligée car } C_A = 0} = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho C_B^2$$

P_A patm ; P_B patm ; $C_B = c$

$$\Leftrightarrow c^2 = 2g[z_A - z_B] \Leftrightarrow c = \sqrt{2gR}$$

c'est ce qu'on a fait tomber un corps de hauteur R.

2) Débit : $Q_v = Sc$ S : surface.

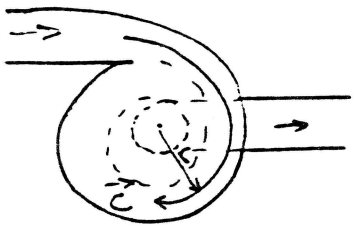
$Q_v = (H-R)c = (H-R)\sqrt{2gR}$.

Maximum de débit lorsque $\frac{dQ_v}{dR} = 0$.

$$\frac{dQ_v}{dR} = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{R}}(H-R) - \sqrt{2gR} = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{R}}(H-R-2R) = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{R}}(H-3R) = 0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{H}{3}}$$

$$\boxed{(Q_v)_{max} = \frac{2}{3}H\sqrt{2g\frac{H}{3}} = \sqrt{g}\left(\frac{2}{3}H\right)^{3/2}}$$ pr $R = H/3$.

III



1) $\vec{e} \simeq \frac{1}{r}$. R : rayon de courbure

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} = -\rho\frac{c^2}{r}$$

r dirigé dans ce sens (→), z dirigé vers l'est et $\vec{n}$ dirigé vers l'int du centre de courbure.

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial x}.$$

d'où $\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} = \rho\frac{c^2}{r}$.

b Pour c d'une ligne de courant. $\hat{P} + \frac{1}{2}\rho c^2 = cte$

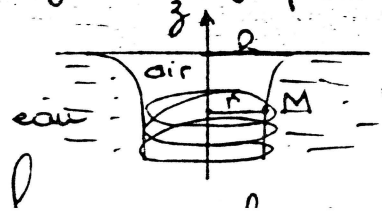
$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho 2c\frac{\partial c}{\partial r} = 0 \ldots$$

$$\frac{\rho c^2}{r} + \rho c\frac{\partial c}{\partial r} = 0 \quad \text{~~parcourt~~} : \frac{c}{r} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{dc}{c} = -\frac{dr}{r} \qquad \log c = -\log r + \log k.$$

$$\text{Log } c = \text{Log } \frac{k}{r} \Rightarrow c = \frac{k}{r}.$$

2)



$\hat{n}$ principe que sidage ds un lavabo

$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho c^2 = cte$; QQ : où l'appliquer ⇒ sur la surface

$\uparrow$ $p_{atm} = 0$; $\left(\frac{k}{r}\right)^2$; ρ = cte on va simplifier.

$\rho g z + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{r}\right)^2 = cte$.

$z = 0$; $r = R$ ⇒ $cte = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{R}\right)^2$

$\rho g z + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{R}\right)^2$

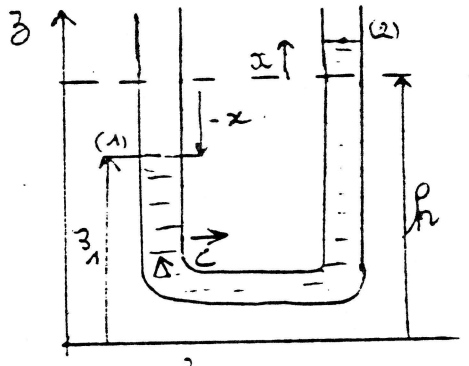
$$\boxed{z = \frac{k^2}{2g}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right)}$$

$r < R \Rightarrow z < 0$.

18.12.85

6) Application du théo. de Bernoulli en régime permanent

a) Oscillation d'un liquide dans un tube.



On considère un liquide qui se trouve en équilibre à une hauteur h par rapport à $z = 0$.
On s'arrange pour que le liquide ne soit pas en équilibre et oscille pour déterminer la période.

théo. : $\int_1^2 \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} d\vec{s} + \left[\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}c^2\right]_1^2 = 0$. En régime variable

1ère constatation : la vitesse est la même partout dans le tube donc n'dépend que du temps mais pas de x ; et est la même entre (1) et (2)

$c(t)$ on peut sortir $\frac{dc}{dt}$

$\frac{dc}{dt}\int_1^2 ds = \left(\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{1}{2}c^2\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{1}{2}c^2\right)$ $\quad p_1 = p_2 = p_{atm}$

dans un élément de la trajectoire
sur toute le tube $\int_1^2 ds = l$.

$l \frac{dc}{dt} = g(z_1 - z_2)$ or $z_1 = h - x$. $z_2 = h + x$ $\quad z_1 - z_2 = -2x$

$\Rightarrow -l\ddot{x} = -2gx$.

Quand à $c = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

$l\frac{d^2x}{dt^2} + 2gx = 0$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0$.

Équation d'un mouvement harmonique avec $\omega^2 = \frac{2g}{l}$

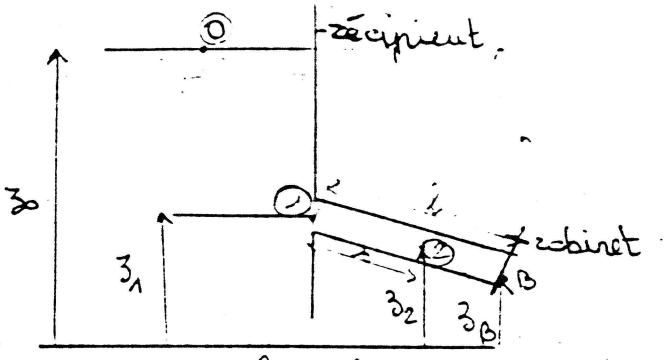
ou encore $\quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}}$.

mouvement de la forme $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ (pendule simple)

b) Etablissement d'un écoulement dans une conduite

On considère une conduite, le liquide ne se coule pas. On ouvre le robinet et le liquide s'écoule => on a $c: 0 \to c_m$.
On cherche à établir la loi $c(t)$?



à l'instant $t=0$, on ouvre le robinet.

1ère hyp : la vitesse c ne dépend pas de s car le débit est cte. $S = cte$

$Sc = cte$. $\quad a_{t_1} = \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{dc}{dt}$.

Relation de Bernoulli en régime transitoire.

$$\int_1^2 \frac{dc}{dt}\,ds = \left(\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{1}{2} c_1^2\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{1}{2} c_2^2\right) \qquad c_1 = c_2$$

$$\frac{dc}{dt}\, s = \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

(1) $\boxed{\rho s \frac{dc}{dt} = p_1 - p_2}$ Théo. de Bernoulli en régime non permanent

entre ⓒ et ① on considère que le régime est quasi permanent : même problème que pour le vidange d'un réservoir.
Bernoulli - pratiquement permanent en 0 et 1

$$p_c + \rho g z_0 + \underbrace{\frac{1}{2}\rho c_0^2}_{\text{négligé}} = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c^2$$

$p_c = p_{atm}$ (p effective)

$$\Rightarrow p_1 + \rho g z_1 = \hat{p}_1 = \rho g z_0 - \frac{1}{2}\rho c^2$$

On applique l'équation (1) entre ① et B.

$$\rho l \frac{dc}{dt} = \hat{p}_1 - \hat{p}_B \quad \text{avec} \quad \hat{p}_B = p_B + \rho g z_B = \rho g z_B$$

$p_{atm} = 0$.

finalement :

$$\rho l \frac{dc}{dt} = \hat{p}_1 - \hat{p}_B = \rho g z_0 - \frac{1}{2}\rho c^2 - \rho g z_B$$

or $z_0 - z_B =$ dénivellation.

$$\rho l \frac{dc}{dt} = \rho g h - \frac{1}{2}\rho c^2$$

on cherche la fonction $c(t)$:

$$\int_0^t dt = \int_0^c \frac{\rho l\, dc}{\rho g h - \frac{1}{2}\rho c^2} \Rightarrow t = \rho l \int \frac{dc}{\rho g h - \frac{1}{2}\rho c^2} = 2l \int \frac{dc}{2gh - c^2}$$

$c^2 = 2gh\,u^2 \Rightarrow c = \sqrt{2gh}\,u \qquad dc = \sqrt{2gh}\,du \qquad$ ou $u = \dfrac{c}{\sqrt{2gh}}$

$$t = 2\int \frac{\sqrt{2gh}\,du}{2gh - 2gh\,u^2} = \frac{2}{\sqrt{2gh}} \int_0^u \frac{du}{1-u^2}$$

$$t = \frac{2l}{\sqrt{2gh}} \int_0^u \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \frac{l}{\sqrt{2gh}} \log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \frac{l}{\sqrt{2gh}} \log\left(\frac{1 + c/\sqrt{2gh}}{1 - c/\sqrt{2gh}}\right)$$

$\log(1+u) \qquad -\log(1-u)$

$$t = \frac{l}{\sqrt{2gh}} \log\left(\frac{\sqrt{2gh} + c}{\sqrt{2gh} - c}\right)$$

or en régime permanent la vitesse de sortie c

$c_m = \sqrt{2gh}$

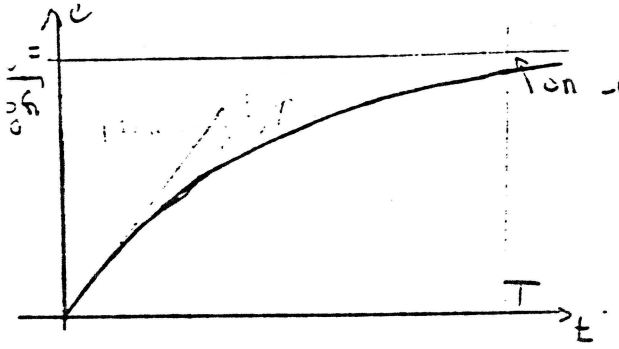
Autrement dit :

$$\boxed{t = \frac{l}{c_m} \log \frac{c_m + c}{c_m - c}}$$

d'où : $\dfrac{t c_m}{l} = \log\left(\dfrac{c_m + c}{c_m - c}\right) \qquad \dfrac{c_m + c}{c_m - c} = e^{t c_m / l}$.

on trouve :

$$\boxed{c = c_m \frac{e^{\frac{c_m t}{l}} - 1}{e^{\frac{c_m t}{l}} + 1}}$$



On considère le régime permanent à 1% près.

Rq : l'établissement de l'écoulement ne dépend pas de la section, ce dépend essentiellement de L : plus le tube est long plus c'est long l'écoulement.

$h = 2\,m \qquad l = 10\,m$.

Quel est le tps t pour que $c = c_m$ à 1% près $\qquad g = 9{,}81\,m/s^2$

$c_m = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 2} = 6{,}264\ m\,s^{-1}$

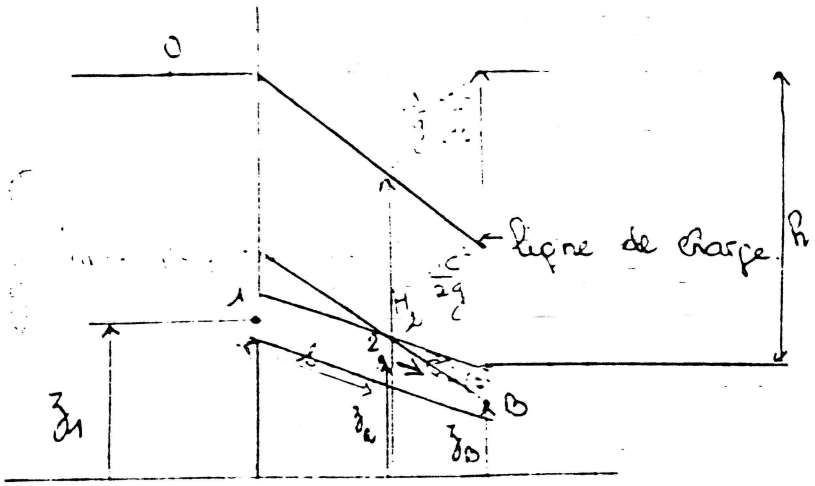
$$t = \frac{l}{c_m} \log\left(\frac{c_m + c}{c_m - c}\right) = \frac{10}{6{,}264} \log\left(\frac{6{,}264 + 6{,}201}{6{,}264 - 6{,}201}\right)$$

$$\frac{1 + \frac{c}{c_m}}{1 - \frac{c}{c_m}} = \frac{1 + 0{,}99}{1 - 0{,}99} = \frac{1{,}99}{0{,}01} = 199 \Rightarrow \underline{t = 8{,}458}$$

2) Déterminer la position de la ligne de charge et la ligne piézométrique à l'instant t donné et étudier l'évolution de ces 2 lignes au cours du temps.

On prend un point quelconque (2) et (1) et on détermine h.

On appelle c la vitesse d'écoulement à un instant t.



définition de l'hauteur de charge

$$H_2 = \frac{\hat{p}_2}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} = \frac{p_2}{\omega} + z_2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$$

d'après l'équation (1)

$$\hat{p}_2 = \hat{p}_1 - \rho S \frac{dc}{dt}$$

$$p_{atm} + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho c_0^2 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c^2$$

$$\rho g z_0 = \hat{p}_1 + \frac{1}{2}\rho c^2 \Rightarrow \hat{p}_1 = \rho g z_0 - \frac{1}{2}\rho c^2$$

$$H_2 = z_0 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} - \frac{s}{g}\frac{dc}{dt} + \frac{c^2}{2g}$$ fonction linéaire de s.

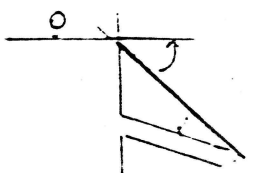
Hauteur piézométrique : $h_p = \frac{p_2}{\omega} = H_2 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$

on arrive ici car en B la $p_2 = p_{atm} = 0$. $\hat{p}_2 = p_2 + \rho g z_2$

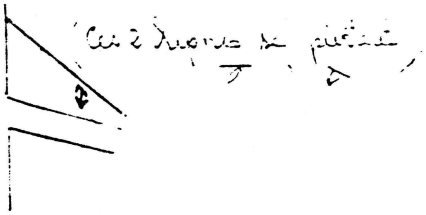
en B $\hat{p}_B = p_{atm} + \rho g z_B$ $\frac{\hat{p}_B}{\omega} = z_B$

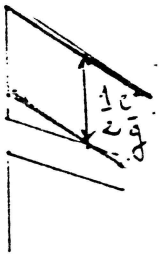
En régime non permanent la ligne de charge n'est plus plane car ici il y a une perte d'énergie.
bien que ce fluide n'est pas parfait, la ligne de charge n'est pas horizontale - car il faut fournir au liquide une énergie, car au départ on a $c = 0$ et il lui faut une vitesse c.

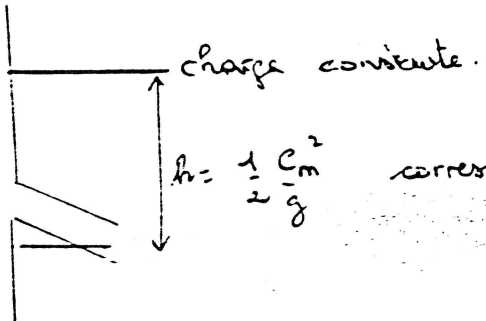
$0 \to c_m$ $\quad E_c - 0 \to \frac{1}{2}c_m^2$.



au temps $t = \varepsilon$ au départ.







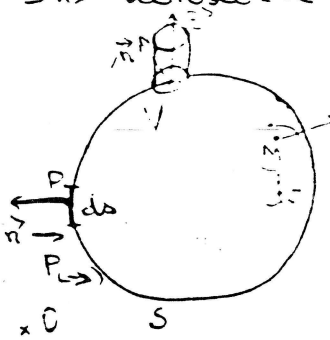
régime permanent.

7°) Théorème des quantités de mouvements

§ 1 §2

(théorème d'Euler)

On considère un volume de fluide limité par une surface S



Soit volume dv animé d'une vitesse $\vec{c}$ $dm = \rho\, dv$

la quantité de mouvement $d\vec{q} = \vec{c}\, dm = \rho \vec{c}\, dv$.

la quantité de mouvement de l'ensemble de volume

$$\vec{q} = \iiint \rho \vec{c}\, dv.$$

par rapport à un point fixe O. M centre de l'élément

$$\vec{OM} \wedge \rho \vec{c}\, dv.$$

étendu à l'ensemble de volume : $\iiint \vec{OM} \wedge \rho \vec{c}\, dv$

$$\left.\begin{aligned} \vec{q} &= \iiint_V \rho \vec{c}\, dv \\ \iiint_V \vec{OM} \wedge \rho \vec{c}\, dv \end{aligned}\right\} \iiint_V [\rho \vec{c}]\, dv = [\vec{q}]$$ torseur des quantités de mouvements.

Les forces qui s'exercent sur ce volume

force de volume $\vec{F}/kg \to \rho \vec{F}/m^3 \to \rho \vec{F}\, dv$ pour le volume total.

$\iiint_V \rho \vec{F}\, dv$ ②.

force de surface (pression) :

on considère dS, la force de pression est : $-p\vec{n}\, dS$

(- car la pression est toujours en direction de l'intérieur)

$\iint_S -p\vec{n}\, dS$ ①

$$\left.\begin{aligned} T = ① + ② \Rightarrow & \iiint_V \rho \vec{F}\, dv + \iint_S p\vec{n}\, dS \\ & \iiint_V \vec{OM} \wedge \rho \vec{F}\, dv + \iint \vec{OP} \wedge (-p\vec{n}\, dS) \end{aligned}\right\}$$ torseur des forces extérieures exercées.

$$\left[\vec{\mathcal{F}}_{ext}\right]$$

Expression fondamentale de la dynamique

$$\frac{d[\vec{q}]}{dt} = [\mathcal{F}_{ext}] \qquad \frac{d[\vec{q}]}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \underbrace{[\rho \vec{c}]}_{③}\, dv.$$

↑ cette expression dépend toujours du temps

pendant le temps dt.

$$\iiint \frac{\partial(\rho \vec{c})}{\partial t}\, dt\, dv + \iint (\rho \vec{c})\, \vec{n} \cdot \vec{c}\, dS\, dt.$$

↑ représente la variation du terme ③

pendant le temps dt il y a variation de volume élémentaire.

pour avoir l'expression ① on divise par dt. $\frac{d[\vec{q}]}{dt} = [\vec{F}_{ext}]$

$$\iiint \frac{\partial[\rho\vec{c}]}{\partial t} d\tau + \iint [\rho\vec{c}]\, \vec{n}\cdot\vec{c}\, dS = [\vec{F}_{ext}] \quad ⑥$$

on travaille en torseur donc avec des [ ]

⑥ forces → $\iiint_V \frac{\partial(\rho\vec{c})}{\partial t} d\tau + \iint_S (\rho\vec{c})\vec{n}\cdot\vec{c}\, dS = \vec{F}_{ext} = \iiint \rho\vec{F}\, d\tau + \iint -p\vec{n}\, dS$

Moment (jamais utilisé) → $\iiint \overrightarrow{OM}\wedge\frac{\partial(\rho\vec{c})}{\partial t} d\tau + \iint \overrightarrow{OP}\wedge(\rho\vec{c})\,\vec{n}\cdot\vec{c}\, dS = \iiint_V \overrightarrow{OM}\wedge\rho\vec{F}\, d\tau + \iint_S \overrightarrow{OP}\wedge(-p\vec{n})\, dS$

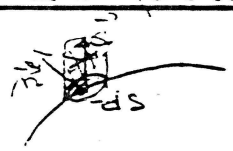
F n'agit pas ici.

Si un écoulement permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. les expressions (a) sont = 0.

(a) 1er théorème d'Euler

$\iint \underbrace{\rho\vec{c}\cdot\vec{n}\cdot\vec{c}}_{*} dS$

débit massique de la quantité de mouvement à travers S (limitant le volume V)

on considère  . le débit massique $d\Omega_m = \vec{n}\cdot\vec{c}\, dS\, \rho$.

(•) volume balayé = débit massique

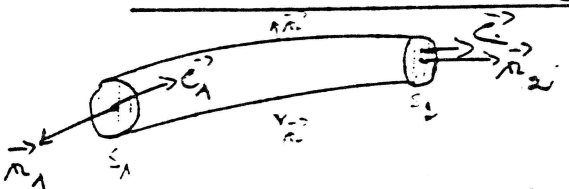
• le volume qui traverse dS par unité de temps de longueur $\vec{c}$.

. le débit de quantité de mouvement = $\vec{c}.d\Omega_m = \rho\vec{c}(\vec{n}.\vec{c}\, dS)$ est bien l'expression (*)

D'où l'énoncé du théorème d'Euler

[le débit de quantité de mouvement à travers S qui limite un volume V de fluide est égal à la somme des forces appliquées à ce volume (force de volume + force de surface).]

Considérons un tube de courant



on applique le 1ère théorème d'Euler

débit de quantité de mouvement à travers ce volume.

Il n'y a pas de débit à travers la surface latérale car pas de débit à travers cette surface.

A travers S_1 . débit massique : $-\rho\vec{c_1}\vec{n_1}S_1$ (→ car $\vec{c_1}\vec{n_1} < 0$.

" S_2 : " : $\rho\vec{c_2}\vec{n_2}S_2$.

débit de quantité de mouvement : S_1 : $-\rho\vec{c_1}\vec{n_1}\vec{c_1}S_1$ }
S_2 : $\rho\vec{c_2}\vec{n_2}\vec{c_2}S_2$ } (A)

(A) : on utilise toujours le Théo d'Euler sous cette forme

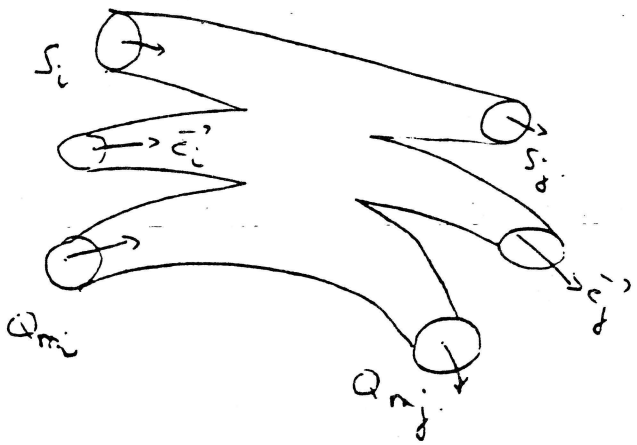
$$Q_m (\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \vec{P} + \vec{F_p}$$

on rappelle : $Q_{m_1} = Q_{m_2} = \rho c_1 S_1 = \rho c_2 S_2$

équation de continuité.

avec $\vec{P} = \iiint_V \rho \vec{F} \, dv$ et $\vec{F_p} = \iint_S -p \vec{n} \, dS$.

Généralisation



Q_m : débit massique

$$\sum Q_{m_j} \cdot \vec{c_j} - \sum Q_{m_i} \vec{c_i} = \vec{P} + \vec{F_p}.$$

$\sum Q_{m_j} \cdot \vec{c_j}$: débit de quantité de mouvement sortant.

$\sum Q_{m_i} \vec{c_i}$: débit de quantité de mouvement entrant.

$\vec{P}$: poids ; $\vec{F_p}$: pression.

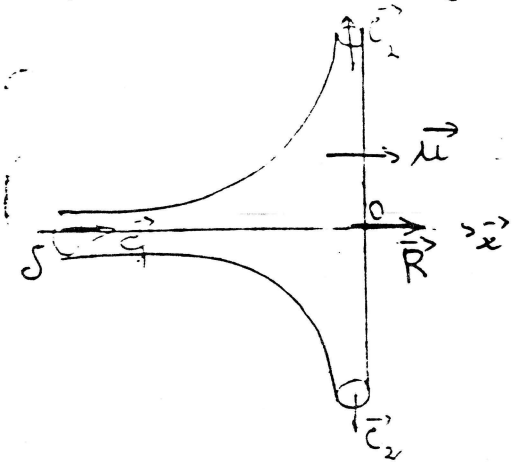
Il ne faut pas oublier l'équation de continuité

$$\sum Q_{m_i} = \sum Q_{m_j}$$ (si pas de source ni puits de volume).

pas de page 23

Application

1) Action d'un jet sur une plaque fixe.



$\vec{c_1}$: vitesse du jet

$\vec{c_2}$: -"- qui s'étale sur la plaque

on applique le théorème d'Euler au volume (.

$Q_m(\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \vec{P} + \vec{F}$

on néglige le poids $\vec{P}$.

On projette sur $\vec{x}$.

$Q_m(0 - c_1) = F_p$ autrement dit $\underbrace{F = -Q_m c_1}_{\uparrow}$

force exercé par la plaque sur le fluide.

$R = -F_p$: force exercé par le jet sur la plaque. $\Rightarrow \boxed{R = Q_m c_1}$

Si S la section $Q_m = \rho Q_v = \rho S c_1 \Rightarrow R = \rho c_1^2 S$.

2) Supposons que la plaque se déplace avec une vitesse $\vec{u}$

Axe lié à la plaque.

donc base de référence lié à la plaque. $\vec{c_2}$ toujours = à 0.

$c_1 - u$ = vitesse relative / à la plaque

Q_m relatif / plaque $\rho S(c_1 - u)$.

$\Rightarrow$ théorème : $\rho S(c_1 - u)[0 - (c_1 - u)] = -R$.

$$\boxed{R = \rho S (c_1 - u)^2}$$

Travail de la force R : $\mathcal{P}' = Ru$.

↓ puissance développée par R.

Puissance du jet : $\mathcal{P} = \frac{1}{2} Q_m c_1^2$

↓

$\rho S c_1$

└ débit volumique Q_v.

puissance développée.

rendement : $\eta = \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \frac{Ru}{\frac{1}{2}\rho S c_1^3}$.

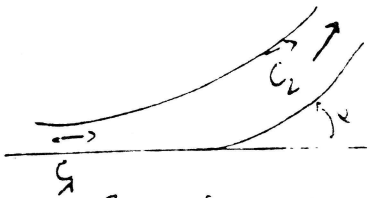
$$\eta = \frac{\rho S (c_1 - u)^2 u}{\frac{1}{2}\rho S c_1^3}$$

$\eta = 0$ quand $\vec{u} = 0$ fixe car énergie cinétique qui ne crée rien.

$\eta = 0$ quand $\vec{u} = \vec{c}$.

entre les 2 ça varie sous une certaine fonction ↑ ⊥

3) Cas d'une plaque qui fait un certain angle α



Théo d'Euler : $\rho_m(\vec{C_2} - \vec{C_1}) = \vec{P} + \vec{F_p}$

$\vec{P}$: poids ; $\vec{F_p} = -\vec{R}$ dû au jet sur la plaque

on néglige le poids et on projette l'équation sur l'axe $\vec{x}$

projection : $\rho_m(C_2 \cos\alpha - C_1) = -R$ or on a $C_1 = C_2$ en module

$\rho_m C(\cos\alpha - 1) = -R \iff \boxed{R = \rho_m C(1 - \cos\alpha)}$

Exercice

Cinématique

$C_1 = A_1 x_1 + A_2 x_2$

$C_2 = A_1' x_1 + A_2' x_2$

$C_3 = 0$.

① fluide incompressible : div $\vec{C} = \vec{0}$.

$\iff \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3} = 0$

$\iff A_1 + A_2' = 0$

$\iff A_1 = -A_2'$.

② Ecoulement à potentiel des vitesses.

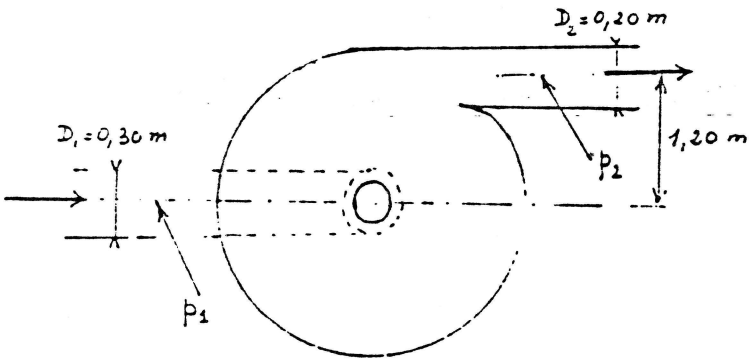
$\vec{C} = \vec{\nabla}\phi$.

MECANIQUE DES FLUIDES

p 251

I- Une pompe hydraulique débite 9000 litres d'eau par minute. Sa conduite d'aspiration horizontale a un diamètre de 30 cm. Sur l'axe règne une pression p_1 de 0,3 bar en dessous de la pression atmosphérique. Sa conduite de refoulement, horizontale, à un diamètre de 20 cm ; sur l'axe situé à 1,20 m plus haut que le précédent, règne une pression p_2 de 0,7 bar supérieure à la pression atmosphérique.

En supposant que le rendement de la pompe est de 80 %, quelle puissance doit-on lui fournir ? On prendra g = 10 m. s^{-2}.



II- L'embout d'une lance d'incendie a 3 cm de diamètre intérieur ; il est vissé à un tube cylindrique de 8 cm de diamètre intérieur. Quand l'embout est ouvert, la lance débite 40 litres d'eau par seconde. Déterminer :

Bar 1- La charge (en mètres d'eau) sous laquelle elle fonctionne.

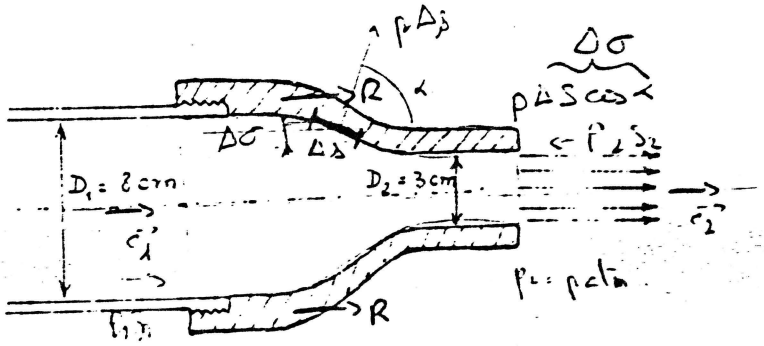
Euler 2- La résultante des forces à laquelle doit résister le pas de vis :

a- quand l'embout est ouvert

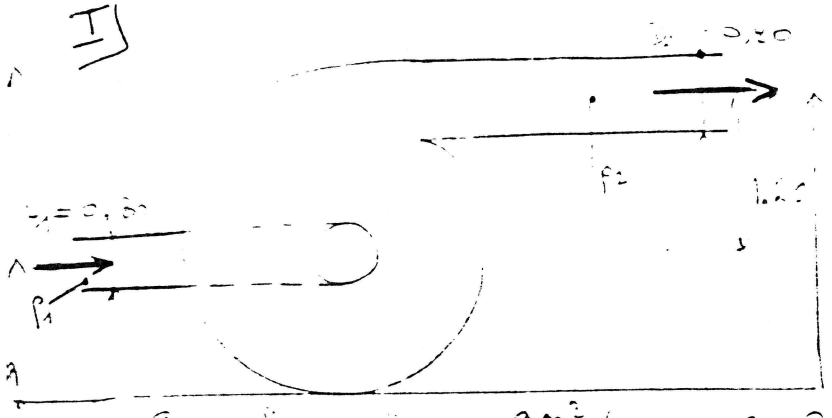
b- quand l'embout est fermé.

$\rho = 10^3$

On négligera le poids de l'eau et on prendra g = 10 m.s^{-2}.



I)



Débit volumique = $2\,m^3 / 60\,s = 0{,}13\,m^3/s$

p_{atm} comme pression origine donc $p_1 = -0{,}3\,bar = -3.10^4\,Pa$

1 bar = 10^5 Pascal

$p_2 = 0{,}7 \Rightarrow p_2 = 0{,}7\,bar = 7.10^4\,Pa$

Théo. de Bernoulli

énergie en amont $p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2$ (J/m³)

énergie en aval $p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2$ (J/m³)

$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 + E = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2$

(E fournit par la pompe au fluide (J/m³))

On cherche $E = (p_2 - p_1) + \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho (c_2^2 - c_1^2)$.

$(0{,}7 + 0{,}3).10^5 + 10^3.10.(1{,}2) - \frac{1}{2}.10^3.(\underbrace{22{,}72 - 0{,}5}_{\approx 22{,}5})$

$c_1 = \frac{Q_v}{S_1} = \frac{0{,}15}{\frac{\pi D_1^2}{4}}$ $\quad c_2 = \frac{Q_v}{S_2} = \frac{0{,}15}{\frac{\pi D_2^2}{4}}$

$E = 121.150\ (J/m^3)$.

Puissance hydraulique fournie par la pompe au fluide $\quad E \times Q_v : \frac{J}{m^3} \times \frac{m^3}{s} = W$

$E \times Q_v = 121.150 \times 0{,}15 = 18172{,}5\,W \qquad 1W = 1\,J/s$

Puissance fournie à la pompe : $\frac{18172{,}5}{0{,}8} = 22715\,W = 22{,}7\,kW = 30\,ch$

$1\,ch = 736\,W$.

II) $Q_v = 40\,l/s = 40.10^{-3}/s = 4.10^{-2}\,m^3/s$.

1) énergie : $H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{g}$ fluide parfait : énergie $\Rightarrow H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{g}$

$p_1 = p_{atm} = 0$. $\quad H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{c_2^2}{g}$

équation de continuité : $Q_v = S_1 c_1 = c_2 S_2$ car pas de source ni de puits entre les 2.

Pour calculer H il suffit de calculer c_2

$c_2 = \frac{Q_v}{S_2} = \frac{4.10^{-2}}{\pi (3.10^{-2})^2} = 56{,}6\,m/s \qquad c_2^2 = 3202$.

$$H = \frac{1}{2}\frac{c_2^2}{g} = 160\,m$$

:) Théorème d'Euler :

(a) $\rho Q_m(\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \vec{P} + \vec{F_p}$ on projette sur l'axe du système $\vec{P} = 0$

$\vec{F} = -\vec{R}$

$\rho Q_v (c_2 - c_1) = -R + p_1 S_1 - p_{atm} S_1$

$10^3 \times 4 \cdot 10^{-2} (56,6 - 7,96) = -R + 156,8 \cdot 10^4 \times \pi \frac{(8.10^{-2})^2}{4} = 5,937\,N$

$-\vec{R}$: résultante qui s'exerce sur le fluide

$c_1 = c_2 \frac{S_2}{S_1}$ $\quad \frac{p_1}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{c_2^2 - c_1^2}{g}$ $\quad p_1 = \frac{1}{2}\rho(c_2^2 - c_1^2)$

Il ft encore calculer $p_1 \Rightarrow R$

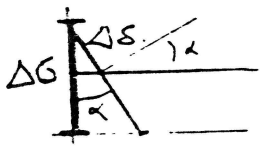
ou $\frac{p_1}{\omega} = H - \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{g}$. ou $p_1 = \rho g H - \frac{1}{2}\rho c_1^2 = 156,8\,Pa$

(b) quand embout fermé

H est tjs la même les vitesses sont nulles

$p = H \rho g \Rightarrow p = 1,6 \cdot 10^{-4}\,N/m^2$ (Pa)

$160.10^3 . 10$



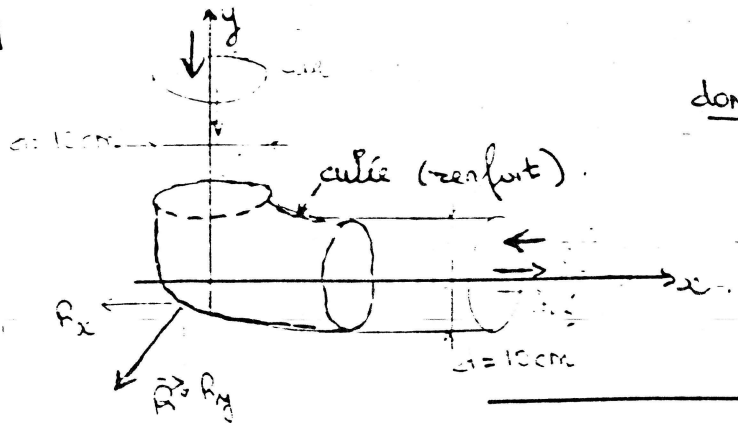
la résultante de force qui s'exerce sur l'ensemble on prend ΔS

$F = p S_1$

$F = 1,6 \cdot 10^6 \times \pi \frac{(8\,10^{-2})^2}{4} = 804,2\,N$

Une seule chose qui reste constante = H.

I]



données : $Q_v = 30\ l/s$ $\quad p = 2$ bars

QQ : det la force exercée par l'eau sur le coude (1 tuyau)

(•) (•) - A déf par soi même.

$\vec{R}$: force exercée par le fluide sur le coude.

Appliqué du théo d'Euler.

$Q_m |\vec{c_2} - \vec{c_1}| = \vec{P} + \vec{F_p}$. $\quad \vec{P}$: poids

$Q_v = \int \vec{c_n} \cdot d\vec{S}$ $\quad S_1 = S_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (10^{-1})^2}{4} = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ m^2$.

$Q_m = \rho Q_v = 30\ kg/s$.

Il ft projeter sur un axe qui est la 1ère chose à faire. puis appliquer le théo d'Euler.

Le théo d'Euler s'applique sur le volume de fluide (=)

$\vec{F_p}$ se sépare en deux qui est la force exercée sur le fluide.

$\vec{F_p}$ → force éxercée par la canalisat $\vec{R}$

↳ force exercée sur les surfaces. (•)

$\vec{F_p} = -\vec{R} - p S \vec{n_1} - p S \vec{n_2}$.

d'où $Q_m |\vec{c_2} - \vec{c_1}| = \vec{P} + \vec{F_p}$

en proj sur $o\vec{x}$: $Q_m (c_2 - 0) = -R_x - pS$.

$7{,}85 \cdot 10^{-3}\ m^2$ $\quad \hookrightarrow c = \frac{Q_v}{S} = \frac{3 \cdot 10^{-2}\ (m^3/s)}{7{,}85 \cdot 10^{-3}\ m^2} = 3{,}82\ m/s$.

$1\ bar = 10^5\ N\,m^{-2}$.

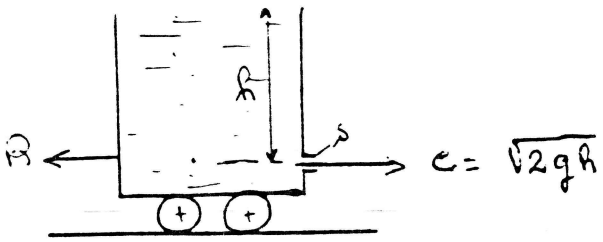
$R_x = -Q_m c - pS = -30 \times 3{,}82 - 2 \cdot 10^5 \times 7{,}85 \cdot 10^{-3} = -162{,}6$

$kg \times \frac{m}{s} - \frac{N}{m^2} \times m^2 = m\,\ldots$

$R_y = -1684{,}6$ N par raison de sym. on a la ⊕ que R_x.

$\Rightarrow \vec{R} = \vec{R_x} + \vec{R_y}$. $\Rightarrow \boxed{R = R_x \sqrt{2} = 2382\ N.}$

On considère un récipient avec un trou



$\vec{c_0}$: vitesse qd ça descend.

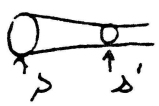
théo d'Euler : $Q_m | \vec{c_2} - \vec{c_1} | = \vec{P} - \vec{F_p}$

$\vec{F_p} = -\vec{R}$: force exercée sur le fluide par le récipient.

$\vec{R}$: force exercée par le fluide sur le récipient.

on proj sur l'axe des $\vec{x}$: $Q_m (\vec{c} - \vec{c_0}) = \vec{P} - \vec{R}$ (1).

s : sect du trou
s' : sect de contact.



tel que $s' = k s$.

(1) : proj sur $\vec{ox}$: $Q_m c = -R$ (2)

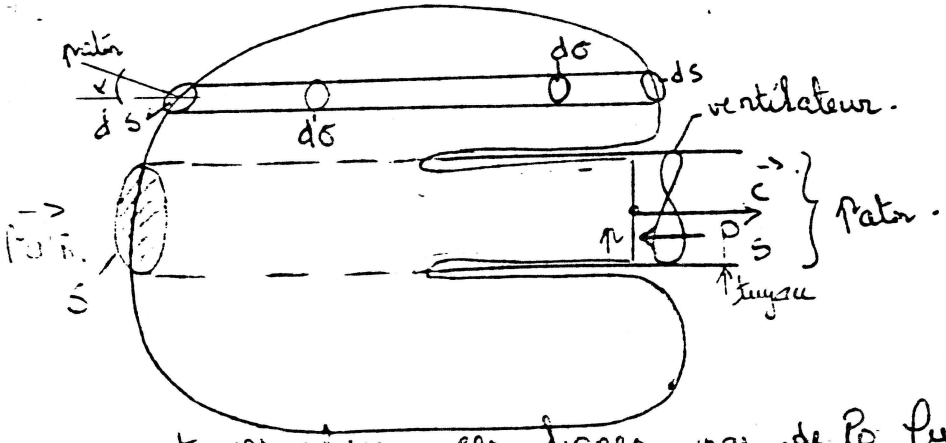
$Q_m = \rho Q_v = \rho s' c$. car Q_v : débit volumique.
$= \rho k s c$. (b)

$\Rightarrow R = -\rho k s c^2 = -\rho k s 2gh$.

$\boxed{R = -\rho k s 2gh.}$ fluide sur récipient qui est ds le sens (-)

III. Aspirateur sur tuyau.

on aspire avec un ventilateur. et on imagine quelles est les lignes de courant.



(*) On pt visualiser ces lignes par de la fumée c'est pr ça qu'on pt le tracer.

1) 1ère chose à : on néglige le poids

2ème observation : la vitesse très loin est négligeable

Il doit rentrer autant que p.

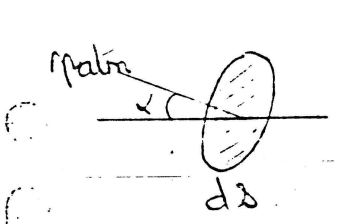
projetons l'éq sur l'axe du tuyau.

Soit $\vec{c}$ la vitesse

$$Q_m(\vec{c}_2 - \vec{c}_1) = \vec{\pi} + \vec{F}_p \qquad c_1 = c_\infty$$

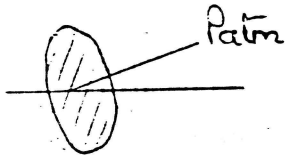
$$Q_m \cdot c = F_p$$

on considère la surf dS et dS'.



$p_{atm}\, dS' \cos\alpha$

$d\sigma$.



$-p_{atm}\, dS \cos$

$d\sigma$.

(c) non valable sur (•).

Quelles sont les composantes suivant $\vec{oe}$ de tte les forces.

Il s'annule sauf sur les surfaces S et S

$p_{atm} S$ ↑ $p S$ ↑

donc $Q_m c = p_{atm} S - pS = (p_{atm} - p) S$. Q_m : débit massique

ρQ_v ces $\Rightarrow \rho c^2 S = (p_{atm} - p) S \Rightarrow$ $\boxed{p = p_{atm} - \rho c^2}$

$p < p_{atm}$ car il faut qu'il y ait aspiration

2) On va montrer qu'il y a perte de charge

Charge à l'∞ : $H_\infty = \frac{\hat{\pi}}{\omega} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{c_\infty^2}{g}}_{\to 0}$ $\qquad \hat{\pi} = p + \rho g z \simeq p$

négliger les variations de z

$H_\infty = \frac{p_{atm}}{\omega}$

La charge de la section (1) au bas du tube

$H_1 = \frac{\hat{\pi}}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$

$\Delta H = H_\infty - H_1 = \frac{p_{atm}}{\omega} - p - \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$

divisons par ρg : $\Delta H = \frac{c^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} = \frac{c^2}{2g}$ avec $p = p_{atm} - \rho c^2$.

$\Delta H = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$ (m) — voir aussi perte de charge singulière

Il y a un décollet. ______ (→) fluide mort $\vec{c} \neq c$.

⇒ le fluide n'est parfait ⇒ perte de charge singulière apparaît sous forme de frottement.

Suite) III Quelle est la puissance à fournir au ventilateur pour que le système marche.

Il faut fournir de l'énergie $\overline{E}$ (J/m³)
à la sortie on a la p_{atm} et la vitesse est la même.

Bernoulli : $\underbrace{p + \frac{1}{2}\rho c^2}_{\text{charge en amont du ventilateur}} + E = \underbrace{p_{atm} + \frac{1}{2}\rho c^2}_{\text{charge en aval}}$

↑ énergie fournit par le ventilateur au fluide

$E = p_{atm} - p = \rho c^2$

$E = \rho c^2$ (J/m³) → augmentation d'énergie cinétique : $\frac{1}{2}\rho c^2$.
↘ reste : perte de charge = $\frac{1}{2}\rho c^2$.

$\Delta H = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$ (m).

↓

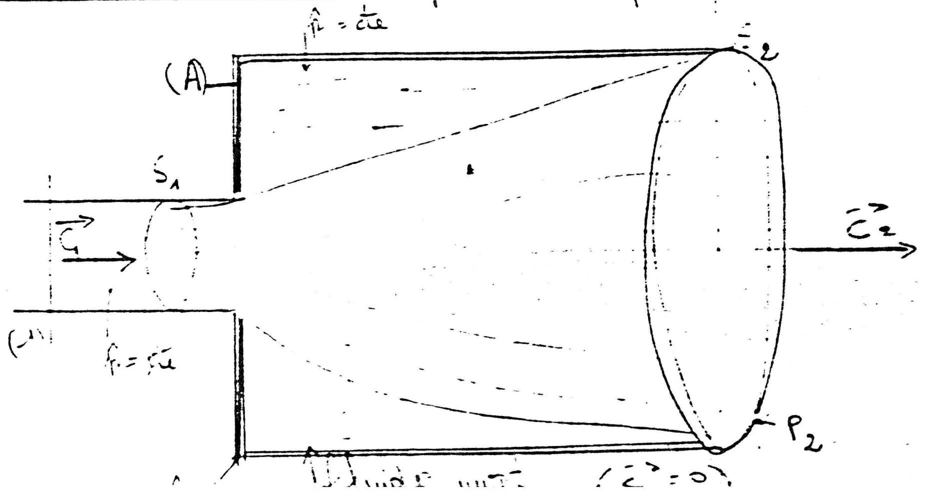
$\Delta p = \varpi \Delta H = \frac{\rho}{2} c^2$

Puissance fournie par le ventilateur : $P = E \times Q_v$
$= \rho c^2 \times Sc$
$= \rho c^3 S$.

Puissance fournie au ventilateur : $P' = \frac{P}{\eta}$

4/02/86

Cas d'une conduite à élargissement brusque



Question : Montrer et calculer la perte de charge entre (1) et (2) qui existe dans ce circuit.

Question qu'on se pose au début : quelle est le volume qu'il faut prendre ?

Réponse : le plus facile est de prendre tout le volume (•)

fluide sort = fluide au repos $\hat{p} = cte$

dans une ligne rectiligne $\hat{p} = cte$

on admet que la pression est la même partout sur (A).

Théorème de quantité de mouvement.....

$Q_m(\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \vec{F}$ force exercée par l'extérieur sur le fluide (-

$Q_m(c_2 - c_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 = S_2(p_1 - p_2)$

$\rho S_1 c_1 = \rho S_2 c_2$ $\quad \rho S_2 c_2 (c_2 - c_1) = S_2 (p_1 - p_2)$.

$p_1 - p_2 = \rho c_2 (c_2 - c_1)$.

on démontre qu'il y a une perte de section en (1) et (2).

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{p_1}{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{g} \\ H_2 &= \frac{p_2}{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{c_2^2}{g} \end{aligned}\right\} \quad \Delta H = H_1 - H_2 = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}(c_1^2 - c_2^2)$$

$$\Delta H = \frac{c_2^2 - c_2 c_1}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{g} = \frac{2c_1^2 - 2c_1 c_2 + c_1^2 - c_2^2}{2g}$$

$$\Delta H = \frac{1}{2g}(c_2 - c_1)^2 \qquad \Delta H = \frac{c_2^2}{2g}\left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right)^2$$

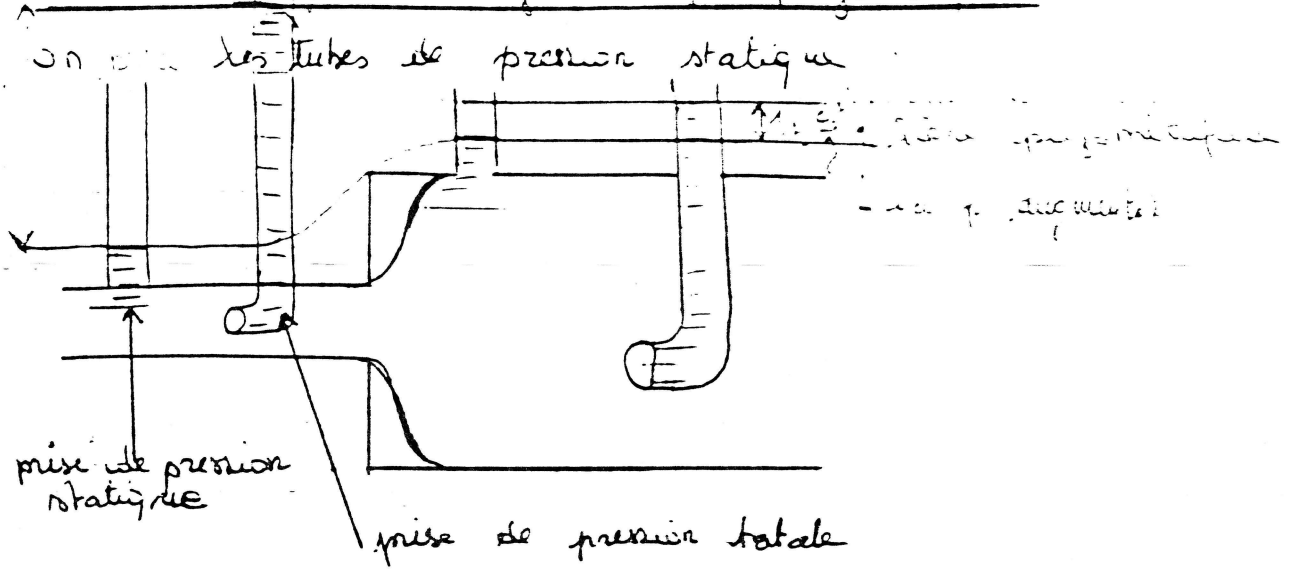
$$\boxed{\Delta H = \frac{1}{2g}\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2 c_2^2}$$

Le saut des pertes de charges singulières : quand il y a un obstacle, ou une variation de section qui est toujours de la forme.

$$\boxed{\Delta H = \frac{\xi}{2g} c^2}$$

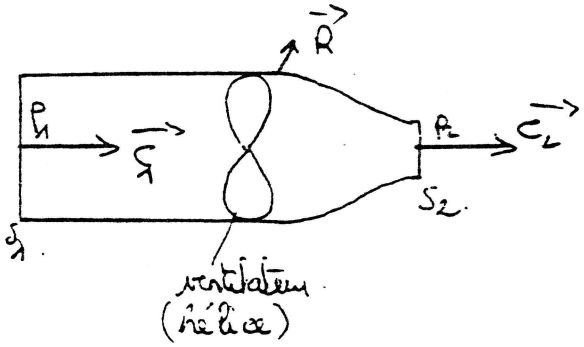
Variation de ligne de charge et ligne piézométrique

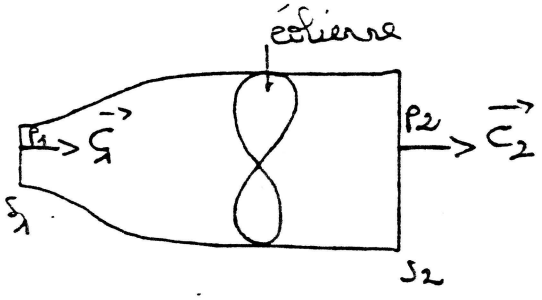
On [illegible] les tubes de pression statique



(•) la perte de charge se produit ici.

$$h_p = \frac{\hat{p}}{\omega} \quad ; \quad H = \frac{p}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$$





$S_1 > S_2$ $\qquad$ $S_2 > S_1$

$p_2 < p_1$ $\qquad$ $p_2 > p_1$

$Q_v = S_1 c_1 = S_2 c_2$ continuité.

Si fluide parfait donc pas de perte de charge.

On essaie de voir la variation de pression.

Bernoulli $\quad p_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 \quad (\hat{p}_1 \simeq p_1)$.

dans le cas où $c_2 > c_1 \Rightarrow p_2 < p_1$ l'autre cas c'est l'inverse.

Théo. de Euler pour le fluide (•).

$$Q_m(c_2 - c_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 - R \Rightarrow R = p_1 S_1 - p_2 S_2 - Q_m(c_2 - c_1)$$

R : cuillère sur fluide

$+\vec{R}$: car c'est la force par le fluide sur la cuillère extérieur

Si on se marche sur l'air c'est à dire $p_1 = p_2 = p_a$

16/04/86

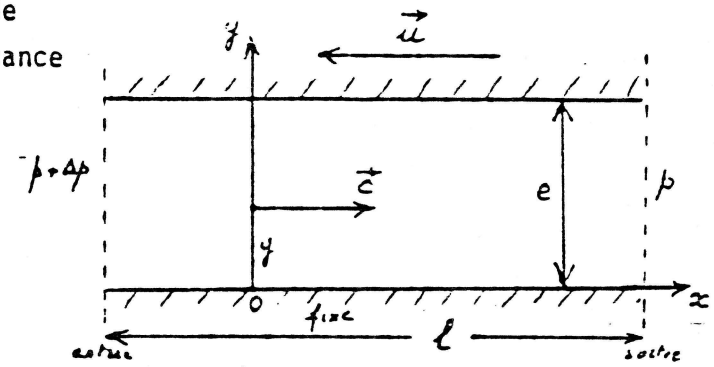
On considère le mouvement permanent d'un fluide incompressible de viscosité dynamique μ entre deux plans parallèles, distants de e, dont l'un est fixe et l'autre animé d'une vitesse $\vec{u}$ suivant le sens indiqué sur le schéma.

Un excès de pression Δp est appliqué à l'entrée de la conduite, celle-ci ayant une longueur ℓ .

1°- Déterminer la loi de variation de la vitesse c en fonction de la distance y à la paroi fixe.

2°- Donner l'allure de la courbe représentative de c en fonction de y et placer les points de vitesse nulle.

3°- Calculer le débit volumique pour une envergure unité.

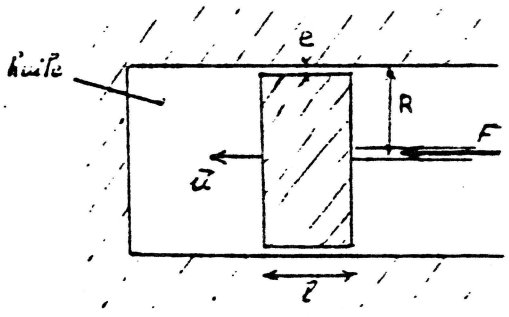


APPLICATION :

Un amortisseur hydraulique est constitué par un cylindre de rayon R dans lequel se déplace un piston de longueur ℓ laissant un jeu radial e.

Le cylindre contient une huile incompressible de viscosité μ qui s'écoule entre le cylindre et le piston. Le jeu e étant très petit devant R, on assimilera cet écoulement à un écoulement plan. On exerce sur le piston une force F.

En utilisant les résultats précédents, établir une relation entre la vitesse u du piston par rapport au cylindre et la force F.



A.N. Calculer u avec les données numériques suivantes :

R = 10 cm, e = 1 mm, ℓ = 10 cm, F = 10^4 N, μ = 0,1 Pℓ .