

Analyse thermique des structures pour l'ingénieur Mécanicien des solides

- solution numérique rapide, facile à mettre en œuvre, représentative du problème réel à résoudre.
- problème 3D → modèle 1D, 2D ou 3D.
- Échauffement ou refroidissement de structure. ⇒ calcul des temp.
CONDUCTION dilatations, contraintes
d'origine thermique.

- les recours :
 - solut^s analytiques.
 - modèles Différences Finies (→ L3)
 - méthode des éléments finis (→ M1).

- modules :
 - mode de transfert de chaleur, lois et coef.
 - sensibilisation à la modélisation thermique.
 - méthode des Différences finies : équations, formulation pb.
 - TP au cas réel.

0. Généralités

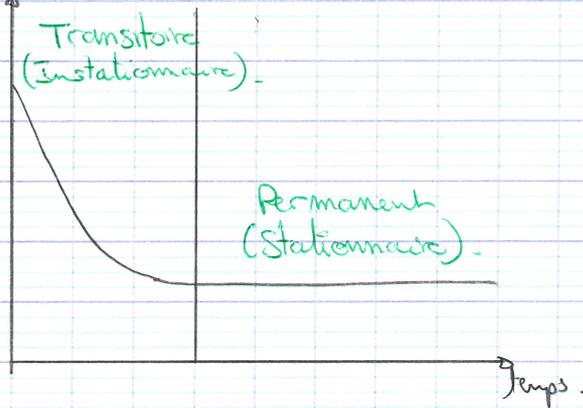
- Échange d'Énergie calorifique → tendance d'un corps à égaliser leur temp. au travers de leur résistance thermique.

- Échange si $T_{\text{corps 1}} = T_{\text{corps 2}}$.

- Thermodynamique $Q_{\text{cédée par corps 1}} = Q_{\text{reçue par corps 2}} + Q_{\text{reçue par corps 3}}$

- 3 modes d'échanges: conduction, convection, rayonnement.

- 2 régimes: ^{température.}



- le régime transitoire (instationnaire) précède tjrs. le régime permanent (stationnaire)

- modèle 3D: Temp. — coordonnées cartésiennes. $T(x, y, z, t)$

- " 2D: Temp. — " " $T(x, y, t)$

- " " " " cylindrique $T(r, \theta, t)$

Analyse du comportement thermique des structures.

REALITE 3D.

- 1 structure, 1 géométrie, 1 ou + lieux matériaux (prop. thermiq.).
- 1 environnement concen. vers tte la surface de la structure.
- 1 problématique: \rightarrow intervention de la temp. de la structure.
 \rightarrow fct. de l'environnement.

HYPOTHESES:

- sur la géométrie, sur l'environnement, sur les matériaux, leurs propriétés
- sur les conditions initiales en températures.

MODELE DE CALCUL THERMIQUE (en conduction)

1 cahier des charges : 1 géométrie, 1 environnement (toute la surf.)
des prop. thermiq.
des condit initiales en temp.

Des résultats : en temp ($^{\circ}\text{C}$ ou K),
en flux ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) et quantité de chaleur ($\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$)
ou écoulement de la chaleur (transport thermiq.).



pour l'ingénieur mécanicien des solides : une réponse à la
problématique.

2. La Conduction.

Definition: mode de transmission de la chaleur provoquée par la
diffusion de temp. entre 2 régions d'un même solide
(milieu) ou entre 2 milieux en contact physique
par fait.

Rmq: solide homogène \rightarrow Seul phénomène.

Loi de Fourier

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \\ T_{,z} \end{Bmatrix}$$

$$= - [\mathbf{K}] \nabla T \quad \text{En coordonnées cartésiennes.}$$

\mathbf{q} : (vecteur) flux de chaleur $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$

$[K]$: matrice de conductivité thermique du matériaux 9 termes
 T : température en °C ou K.

Conductivité d'un matériau en $\begin{cases} \times \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1} \\ \times \text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1} \end{cases}$

de matériaux peut se regarder ds n'importe quelle direction sans changer:
matériau *isotrope*

Matériau isotrope: $[K] = k \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

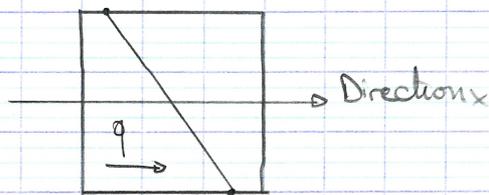
Avec k : conductivité thermique du matériau.
 $\text{W m}^{-1} (\text{°C ou K})^{-1}$

La quantité de chaleur va des régions les plus chaudes aux régions les plus froides.

Ex du mur:

Temp T_0 en $x=0$

$$q = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{dT}{dx}$$



$$\int_{x=0}^L q dx$$

$$\text{Temp } T_c \text{ en } x=L = \int_{T_0}^{T_c} -k dT$$

Résistance thermique de conduction du mur

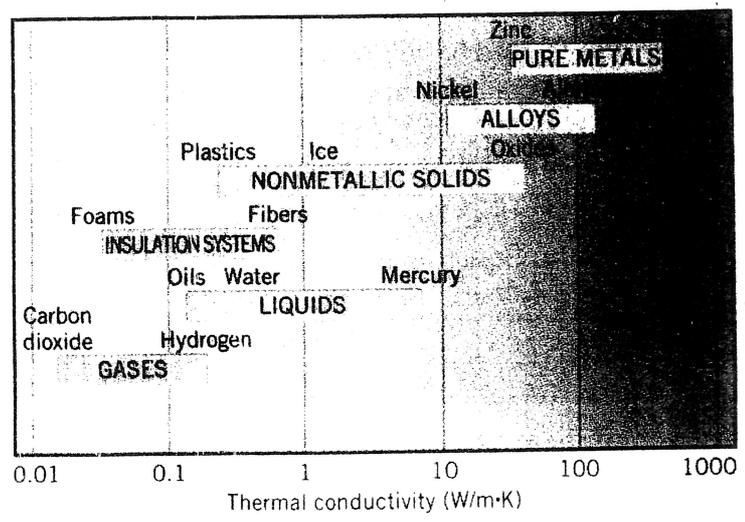
→ surface du mur.

$$R = L / AR$$

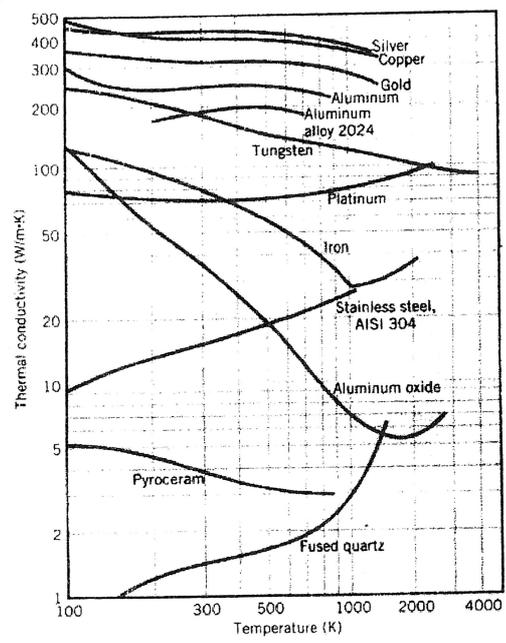
$Q = (T_c - T_0) / R$ avec Q quantité de chaleur en Watt (W)

$$Q = \frac{(T_c - T_0) AR}{L}$$

Therm 8/01/09
 Graphique 1: Ordre de grandeur de la conductivité thermique



Graphique 2: Dépendance de k vis-à-vis de la température



Therm 8/1/09

Graphique 3 : La RTC et sa dépendance à la nature du contact thermique

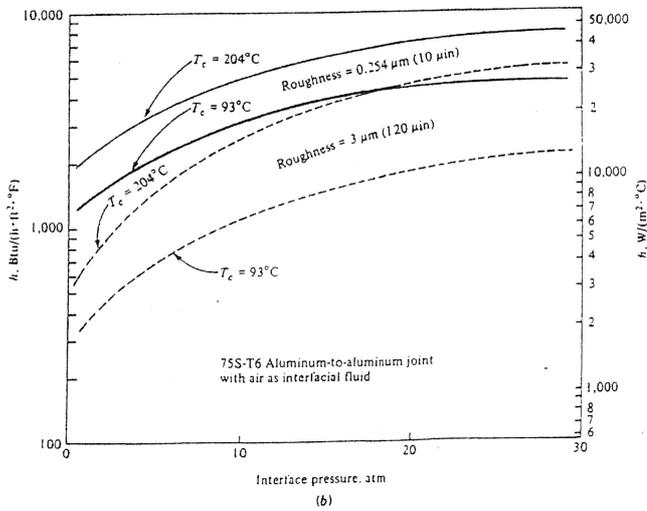
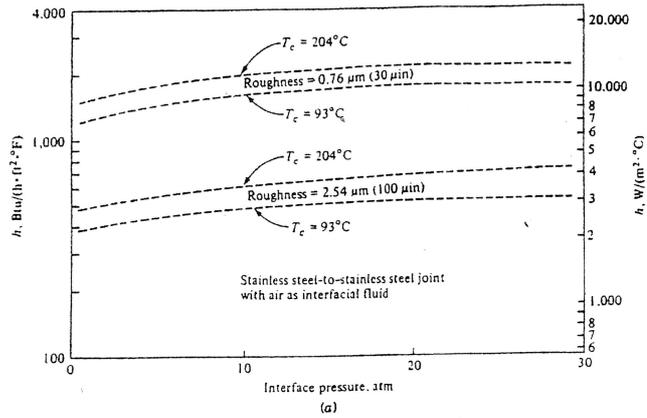


Fig. 1-9 Effects of interface pressure, contact temperature, and roughness on interface conductance h . (Based on data from reference 8).

Tableau 1 : Quelques valeurs de la RTC pour des interfaces solide/solide

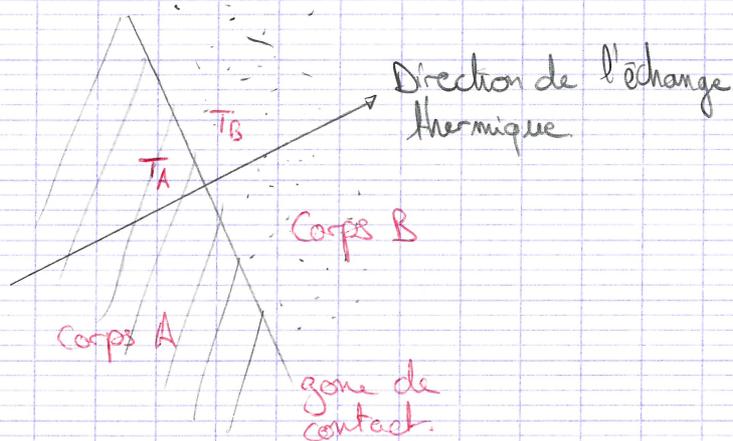
Interface	$R \times 10^4 \text{ (m}^2 \cdot \text{K/W)}$
Silicon chip/lapped Al (in air)(27 - 500 kN/m ²)	0.3 - 0.6
Al/Al with indium foil filler(~100 kN/m ²)	0.07
Stainless/Stainless with indium foil filler (~3500 kN/m ²)	0.04
Al/Al with metallic coating (Pb)(no pressure given)	0.01 - 0.1
Al/Al with Dow Corning 340 grease(~100 kN/m ²)	0.07
Stainless/Stainless with 340 grease(~3500 kN/m ²)	0.04
Silicon chip/Al with 0.02 mm epoxy	0.2 - 0.9
Brass/Brass with 15 micron solder	0.025 - 0.14

Therm.
8/01/09.

Q : Watts

q : watts/m²

Contact entre 2 solides:



$$T_c = \frac{b_A T_A + b_B T_B}{b_A + b_B}$$

avec l'effusivité d'un matériau donnée par

$$b = \sqrt{k \rho c}$$

Avec:

k : conductivité thermique.

ρ : masse volumique.

c : chaleur spécifique.

Ordre de grandeur de b :

- Bons conducteurs \equiv très effusifs ex: métaux ($10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{1/2}$)

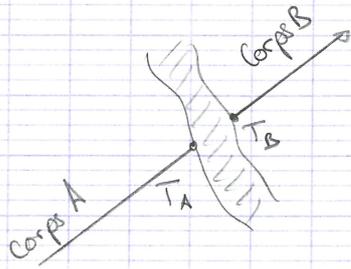
- Isolants expansés \equiv très peu effusifs ex: polystyrène.

10 à 100 WSI.

Calcul de T_c : doigt de la main en contact avec un support.

- Acier : $T_c = 215^\circ\text{C} \rightarrow$ froid.
 - polystyrène $T_c = 36^\circ\text{C} \rightarrow$ chaud
 - Contact "Imparfait" : $T_A \neq T_B$
- (Sensation).

Notion de résistance thermique de contact : RTC.



RTC : fonction (rugosité, pression d'interface, conduction thermique des 2 corps en contact, présence et nature d'un 3ème corps (ex : lubrification)).

Thermique -
12/01/19

2. De la convection

Def: conduction avec transfert de matière (cas des fluides, de l'air, milieux gazeux...).

Thermiq -
12/01/19

Graphique 4 : La convection sur une surface plane :
(a) vitesses dans le fluide (b), températures dans le fluide

Loi de Newton : $Q_{s\infty} = h A (T_s - T_{\infty})$
Watts $W m^{-2} \text{ } ^\circ C^{-1}$ m^2

avec $Q_{s\infty}$: quantité de chaleur échangée entre la surface S et le milieu fluide en W.

h : coef de convection en $W m^{-2} (^\circ C \text{ ou } K)^{-1}$.

A : surface d'échange avec le milieu fluide.

T_s et T_{∞} : temp de surface et du milieu fluide au loin (de la paroi).

Ordre de grandeur h : Convection libre ou forcée ?

h en WSI :	libre	Forcée	
	5-25	25-250	Milieux gazeux
	50-1000	50-20000	liquides.

Avec changement de phase.
2500-100000 Ébullition, condensation.

Rmq: résistance thermique de convection: $R = 1/hA$.

3. de rayonnement.

Def: transfert de chaleur d'un corps à haute température à un autre plus froid, les 2 corps étant séparés par un milieu transparent (air ou vide)

Remarque: absorption de rayonnement électromagnétique \rightarrow transformé de chaleur.

Loi de Stefan - Boltzman:

Application à un corps une température T_1 dans un four à température T_F

$$Q_{1F} = \epsilon_1 \sigma A_1 (T_1^4 - T_F^4) \quad : \text{loi non linéaire, } \underline{\text{Température en K.}}$$

ϵ : émissivité du corps ($0 \leq \epsilon \leq 1$: corps noir)
 Q_{1F} : quantité de chaleur échangée entre le corps et le four (< ou > 0).
 σ : constante $5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

Pour l'ingénieur méca, à prendre en compte si $T_F \gg T_1$

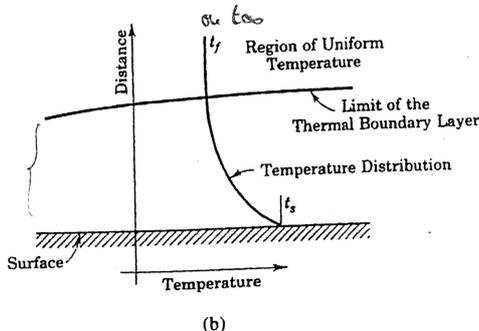
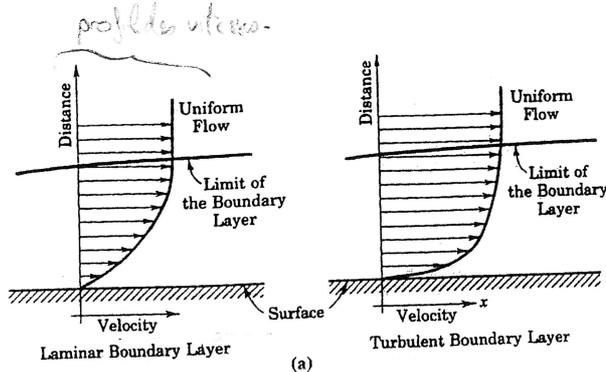
$$Q_{1F} = \epsilon_1 \sigma A_1 (T_1 - T_F) (T_1^3 + T_1 T_F^2 + T_1^2 T_F + T_F^3) \approx h_r A_1 (T_1 - T_F)$$

2. La convection

Def: conduction avec transfert de matière (cas des fluides, de l'air, milieux gazeux...)

Thermiq -
12/01/09

Graphique 4 : La convection sur une surface plane :
(a) vitesses dans le fluide (b), températures dans le fluide



h : coef de convection en $W \cdot m^{-2} \cdot (^{\circ}C \text{ ou } K)^{-1}$

A : surface d'échange avec le milieu fluide

T_s et T_{∞} : temp de surface et du milieu fluide au loin (de la paroi)

Ordre de grandeur h : Convection libre ou forcée ?

h en WSI :	libre	Forcée	
	5-25	25-250	Milieux gazeux
	50-1000	50-20000	liquides

Avec changement de phase.
2500 - 100000

Ébullition, condensation.

4. Module thermique de conduction avec les Conditions limites (CL)

Ingénieur : analyse du comportement thermique des structures avec un modèle de calcul (analytique, RDE, RFE, ...)

1/ Dans le solide

TRANSFERT DE CHALEUR par CONDUCTION = PB. FLUXEUR.

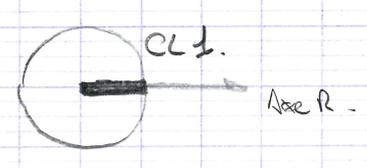
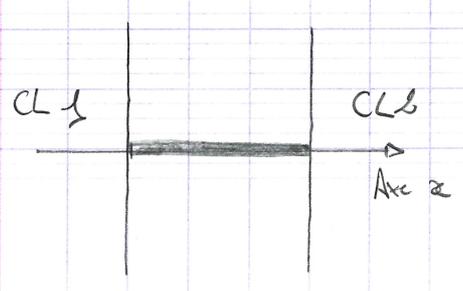
2/ Sur la surface du solide.

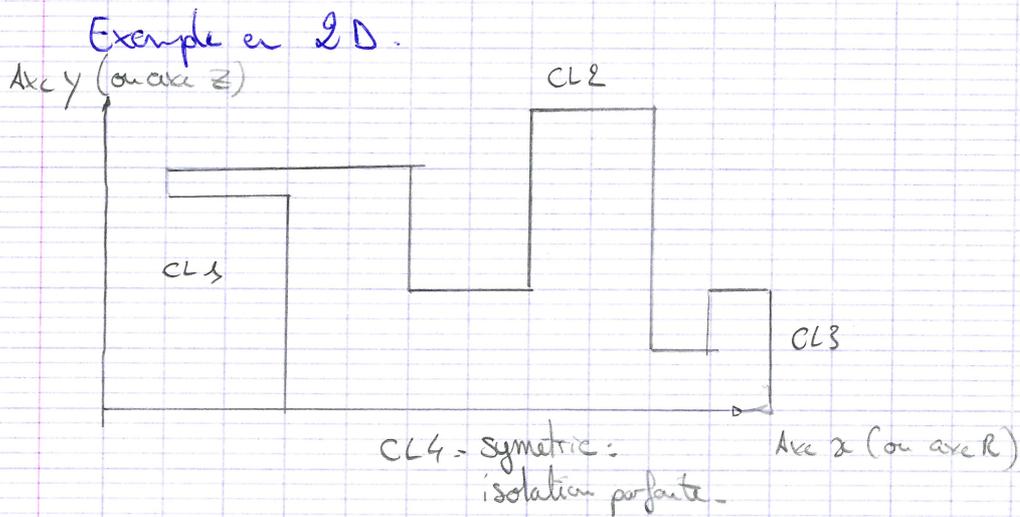
Temp. imposées	CL de type Dirichlet.
Flux imposés	CL de type Neuman.
Convection	CL de type Fourier
Rayonnement	le plus souvent traité par une CL convection.

5. Exemple pièces étudiées en L3 - Module ACTS.

- Structures 1D et 2D (plane ou révolution)
(3D: géométrie + complexes à visualiser, diff. ppm³ du modèle + lourd).
- lignes en 1D ou surfaces en 2D (faces "verticales" ou "horizontales") après prise en compte des symétries.

Exemples 1D:





Structure & Conduction

Environnement.

Egalité des températures.

Temp de surface T_s

OC, K

T_{imp}

$$T_s = T_{imp}$$

Egalité des flux de chaleur.

$W \cdot m^{-2}$

loi de Fourier.

$$q = -k \nabla T = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

Flux imposé.

Convection.

Rayonnement

Contact parfait.

Flux (sortant ou entrant) par conduction = flux extérieur

$$q \cdot n = q''$$

$$q \cdot n = h(T_s - T_{\infty})$$

$$q \cdot n = q'' + h(T_s - T_{\infty})$$

si n = normale extérieure à la surface S .

$q \cdot n$: une des composantes du vecteur q .

thermig -
19/01/09.

Méthode des Différences Finies (MDF)
en conduction stationnaire.

Conduction stationnaire $\Rightarrow \forall \text{REV}$ $\Delta T + \frac{q''' \Delta V}{k} = 0$ } Bilan thermique
Repp-
Volume

Bilan thermique: $Q_{\text{ent}} + Q_{\text{vol}} = Q_{\text{sort}}$

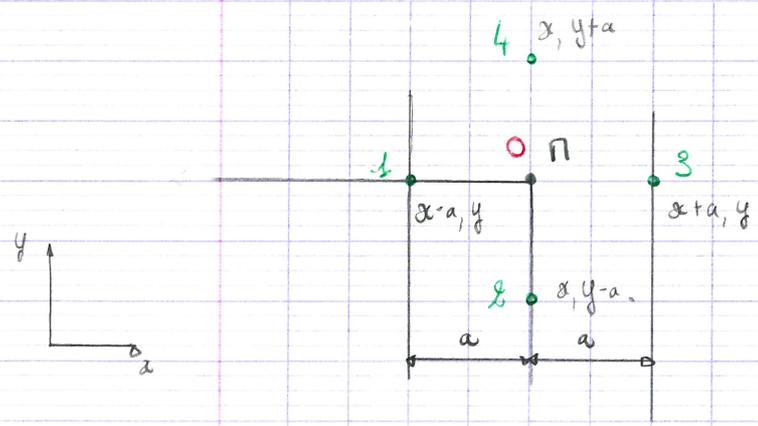
Sur tte la surface, vérifier les CL.

Difficulté: $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$: Trouver $T(x, y, z)$ à partir des CL.

1. Principe de la MDF en conduction stationnaire.

Ex: intérieur d'une pièce, 2D, sans effet joule ou induction.

Calculer le temp au point $P: T_0$
(x, y)



$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} \varepsilon + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \frac{\varepsilon^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) \frac{\varepsilon^3}{3!} + o(\varepsilon^4)$$

$$\underbrace{T(x+a, y)}_{T_3} = \underbrace{T(x, y)}_{T_0} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_n a + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_n \frac{a^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right) \frac{a^3}{3!} + \dots$$

$$\underbrace{T(x-a, y)}_{T_2} = \underbrace{T(x, y)}_{T_0} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_n a + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_n \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right) \frac{a^3}{3!} + \dots$$

$$T_1 + T_3 = 2T_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_n a^2 + o(a^4)$$

$$T_2 + T_4 = 2T_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_n a^2 + o(a^4)$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 = \underbrace{\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]}_{\Delta T} a^2 + o(a^4)$$

Pièce LD, stationnaire, sans q''' : en un pt intérieur régulier, $(\Delta T)_n = 0$

On vient de montrer

$$\underbrace{[\Delta T]_n}_{\downarrow 0} = (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0) \frac{1}{a^2} + o(a^2)$$

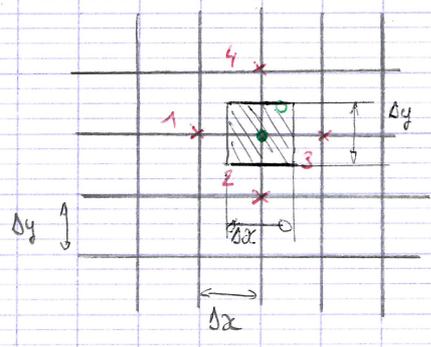
si néglige.

$$(\Delta T = 0)_n \Leftrightarrow T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 = 0$$

$$\triangleright T(x+a, y) = T(x, y) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_n a \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_n = \frac{T(x+a, y) - T(x, y)}{a}$$

D'autant plus vrai que $a \rightarrow 0$

2. Equation de résidu d'un nœud intérieur.



- Découpage en $x, y \Rightarrow \Delta x, \Delta y$.
- Nœuds.
- Régions.
- Bilan thermique: $Q_{ent} + Q_{vol} = Q_{sort}$.

Convention: décrire les flux ts entrant:

$$Q_{ent} + Q_{vol} = 0$$

$$\delta Q_{10} + Q_{20} + Q_{30} + Q_{40} + Q_{vol} = 0$$

$$\frac{k}{L} \Delta y E \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \frac{k}{L} \Delta x E \frac{T_2 - T_0}{\Delta y} + \frac{k}{L} \Delta y E \frac{T_3 - T_0}{\Delta x} + \frac{k}{L} \Delta x E \frac{T_4 - T_0}{\Delta y}$$

$$+ \frac{q'''}{k} (\Delta x \Delta y E) = 0$$

Si $\Delta y = \Delta x$
Si divise par k
Si regroupe les T_0

On a :

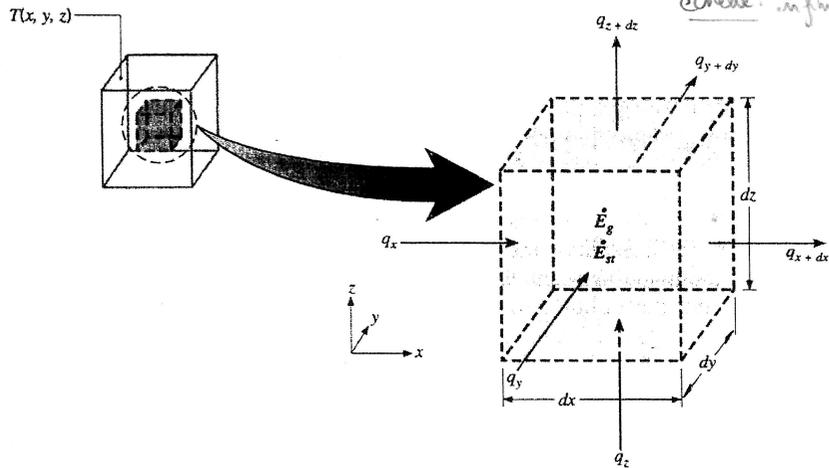
$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 + \frac{q''' \Delta x^2}{k} = 0$$

Résidu au nœud $0 = R_0 \rightarrow 0$

1 - Formulation de l'équation de conduction thermique

- Volume de matière : en coordonnées cartésiennes

échelle: infinitésimale.



- Bilan thermique :

Durant dt secondes, la chaleur ayant pénétré dans l'élément de volume augmentée de la chaleur engendrée par les sources intérieures est égale à la chaleur sortie de l'élément de volume augmentée de la variation d'énergie interne.

$$\dot{E}^{ent} + \dot{E}^{vol} = \dot{E}^{sort} + \Delta \dot{E}^{int}$$

- Élément de volume : avec un choix arbitraire sur le sens des quantités de chaleur Q.

$$\dot{E}^{ent} = dt \times Q^{ent}$$

avec $Q_x + Q_y + Q_z = q_x dydz + q_y dxdz + q_z dxdy$

$$\dot{E}^{vol} = dt \times Q^{vol}$$

avec $Q^{vol} = q''' dxdydz$

$$\dot{E}^{sort} = dt \times Q^{sort}$$

avec $Q^{sort} = Q_{x+dx} + Q_{y+dy} + Q_{z+dz}$

$= q_{x+dx} dydz + q_{y+dy} dxdz + q_{z+dz} dxdy$

$$\Delta \dot{E}^{int} = \rho c dxdydz dT(x,y,z,t)$$

- Loi de Fourier : milieu homogène et isotrope

$$q = [q_x \ q_y \ q_z]^T = -k [T_{,x} \ T_{,y} \ T_{,z}]^T$$

- Dérivées 1° des flux thermiques :

$$q_{x+dx} = q_x + q_{x,x} dx \quad q_{y+dy} = q_y + q_{y,y} dy \quad q_{z+dz} = q_z + q_{z,z} dz$$

- Expression de $q_{x+dx} - q_x = q_{x,x} dx = -k (T_{,x})_{,x} dx = -k T_{,xx} dx$

- Bilan thermique : pour un volume dxdydz homogène et isotrope

$$\dot{E}^{ent} + \dot{E}^{vol} = \dot{E}^{sort} + \Delta \dot{E}^{int} \rightarrow k(T_{,xx} + T_{,yy} + T_{,zz}) + q''' = \rho c T_{,t}$$

$$\text{Equation de conduction : } \Delta T(x,y,z,t) + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t}$$

avec α diffusivité du matériau en $m^2.s^{-1}$

Ordre de grandeur de α : matériau métalliques : 10^{-5} à 10^{-6} USI

2 - Les conditions aux limites

- A t=0 : CONDITIONS aux LIMITES TEMPORELLES :

La température est connue à t=0 en tout point x,y,z.

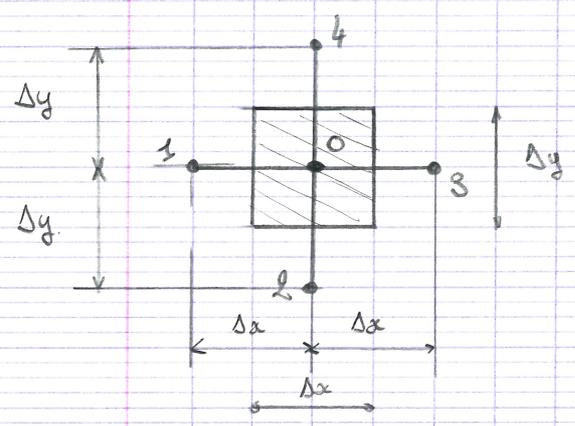
- A t>0 : CONDITIONS aux LIMITES SPATIALES :

Toute la surface de la structure étudiée est décrite :

- (1) Température imposée : T_{imp}
- (2) Flux imposé : q''
- (3) Convection : $h (T_s - T_\infty)$
- (4) Rayonnement : $\epsilon \sigma (T_s^4 - T_\infty^4)$
- (5) Contact : 2° structure ou Résistance R.

PDF en conduction instationnaire.

1. Nœud intérieur ($q''', \Delta x, \Delta y$)



Bilan thermique de :

Durant dt , l'énergie entre de + Energie produite de
= énergie sortante de + Δ Energie interne.

$$\underbrace{\dot{E}^{ent}}_{dt \times Q^{ent}} + \underbrace{\dot{E}^{vol}}_{dt \times Q^{vol}} = \underbrace{\dot{E}^{sort}}_{dt \times Q^{sort}} + \Delta E^{int}$$

choix tous entrant.

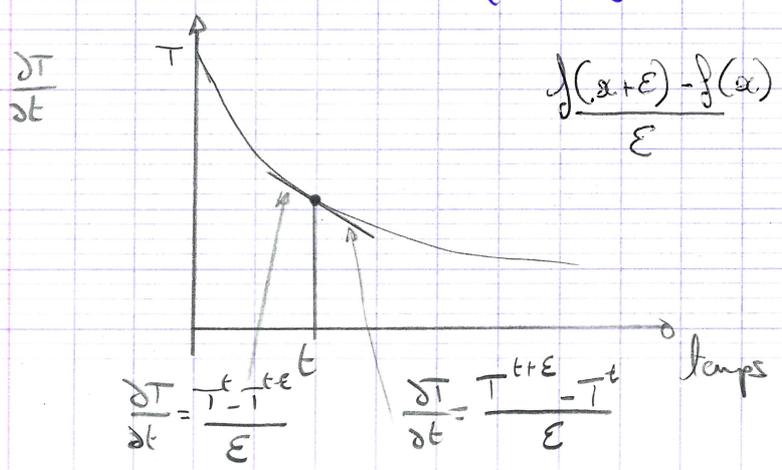
$V \rho c \Delta T$ chaleur spécifique.

masse volumique

volume de

$\frac{\circ}{dt}$

$$Q^{ent} + Q^{vol} = \cancel{Q^{sort}} + \rho V c \frac{\partial T}{\partial t}$$



$$[Q_{ext} + Q_{vd}]^t = \rho c v \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

$\downarrow \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$

méthode explicite.

$$[Q^{10} + Q^{20} + Q^{30} + Q^{40} + Q^{vd}]^t = \rho c v \left(\frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t} \right)$$

$$\left[k(\Delta y) \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + k(\Delta x) \frac{T_2 - T_0}{\Delta y} + k(\Delta y) \frac{T_3 - T_0}{\Delta x} + k(\Delta x) \frac{T_4 - T_0}{\Delta y} + q''' \Delta x \Delta y \right]^t$$

Δx^2

$$= \rho c (\Delta x \Delta y) \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$$

$\Delta x = \Delta y$
 $\div k$

$$\frac{T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t}{4} - T_0^t + \frac{q'''}{k} \Delta x^2 = \left(\frac{\rho c}{k} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} (T_0^{t+\Delta t} - T_0^t)$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \frac{1}{F_0} \quad \left(F_0 = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right)$$

Nombre de Fourier

α : diffusivité du matériau.
 $\alpha = k/\rho c$

$$\frac{T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t}{4} - T_0^t + \frac{q'''}{k} \Delta x^2 = \frac{1}{F_0} (T_0^{t+\Delta t} - T_0^t)$$

$$T_0^{t+\Delta t} = F_0 (T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t) + (1 - 4F_0) T_0^t + F_0 q''' \frac{\Delta x^2}{k}$$

Temp au nœud 0 à l'instant $t+\Delta t$

Temp nœuds voisins à l'instant t

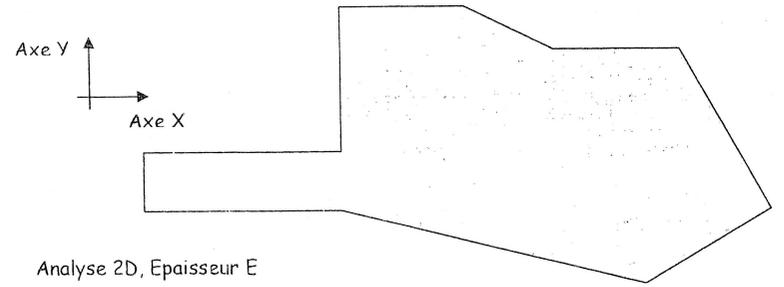
Temp au nœud 0 à l'instant t .

Critère, $1 - 4F_0 \geq 0$

Thermog. 02/1/09.

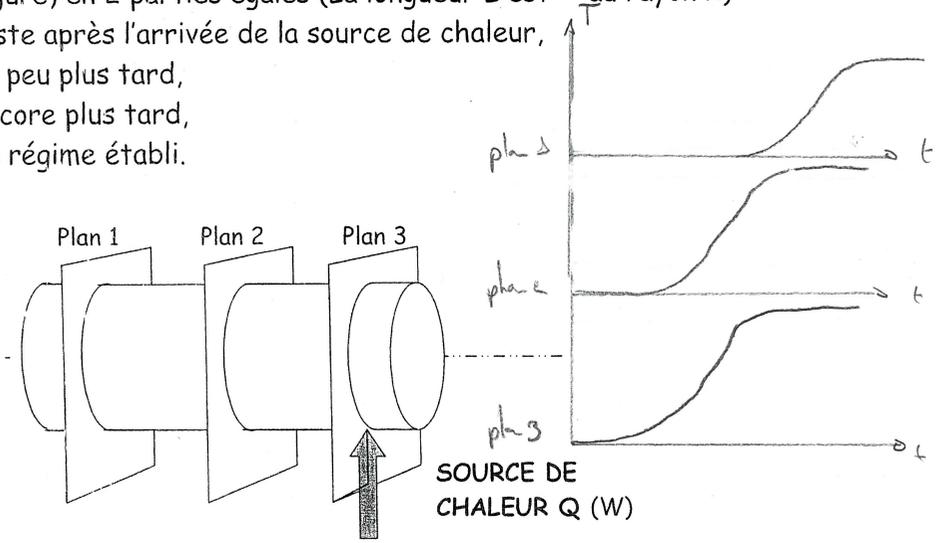
QUELS RESULTATS SONT CONNUS AVANT LA MODELISATION ?

1°/ La pièce suivante (de matériau peu conducteur) a été chauffée à une température uniforme puis placée brusquement dans l'air ambiant.
 - à quel(s) temps avez-vous une idée précise de la solution en température? à $t=0$ (1000°C) et $t=\infty$ (20°C).
 - quelle(s) serait(ent) alors la(les) solutions en températures?



2°/ En partant d'une température uniforme à $t=0$ s, dessiner à des instants successifs les isovaleurs (\equiv courbes de niveau) en températures dans la pièce cylindrique en vous servant des plans 1,2,3 et le plan de coupe passant par l'axe de révolution et coupant la source de chaleur (la flèche de la figure) en 2 parties égales (La longueur L est \gg au rayon R):

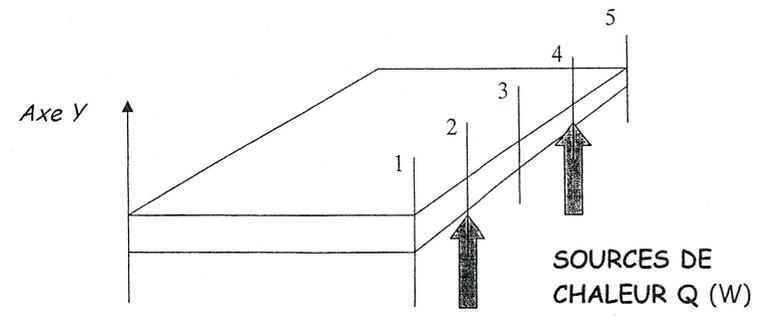
- juste après l'arrivée de la source de chaleur,
- un peu plus tard,
- encore plus tard,
- en régime établi.



3°/ En partant d'une température uniforme à $t=0$ s, dessiner à des instants successifs, pour les coupes transversales 1 à 5 et les coupes horizontales 6,7 et 8, les isovaleurs (\equiv courbes de niveau) en températures dans la pièce plane :

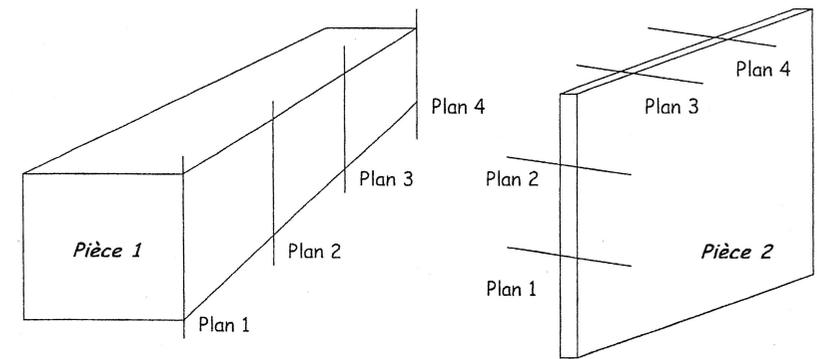
- juste après la mise en place des sources de chaleur,
- un peu plus tard,
- encore plus tard,
- en régime établi.

Distinguer les cas : où l'épaisseur E est faible, où l'épaisseur E est importante.



Avec $Y=0$ qui correspond au-dessous de la pièce, Plan 6 : $Y=E$, Plan 7 : $Y=E/2$, Plan 8 : $Y=0$. Les plans 1 à 5 sont équidistants.

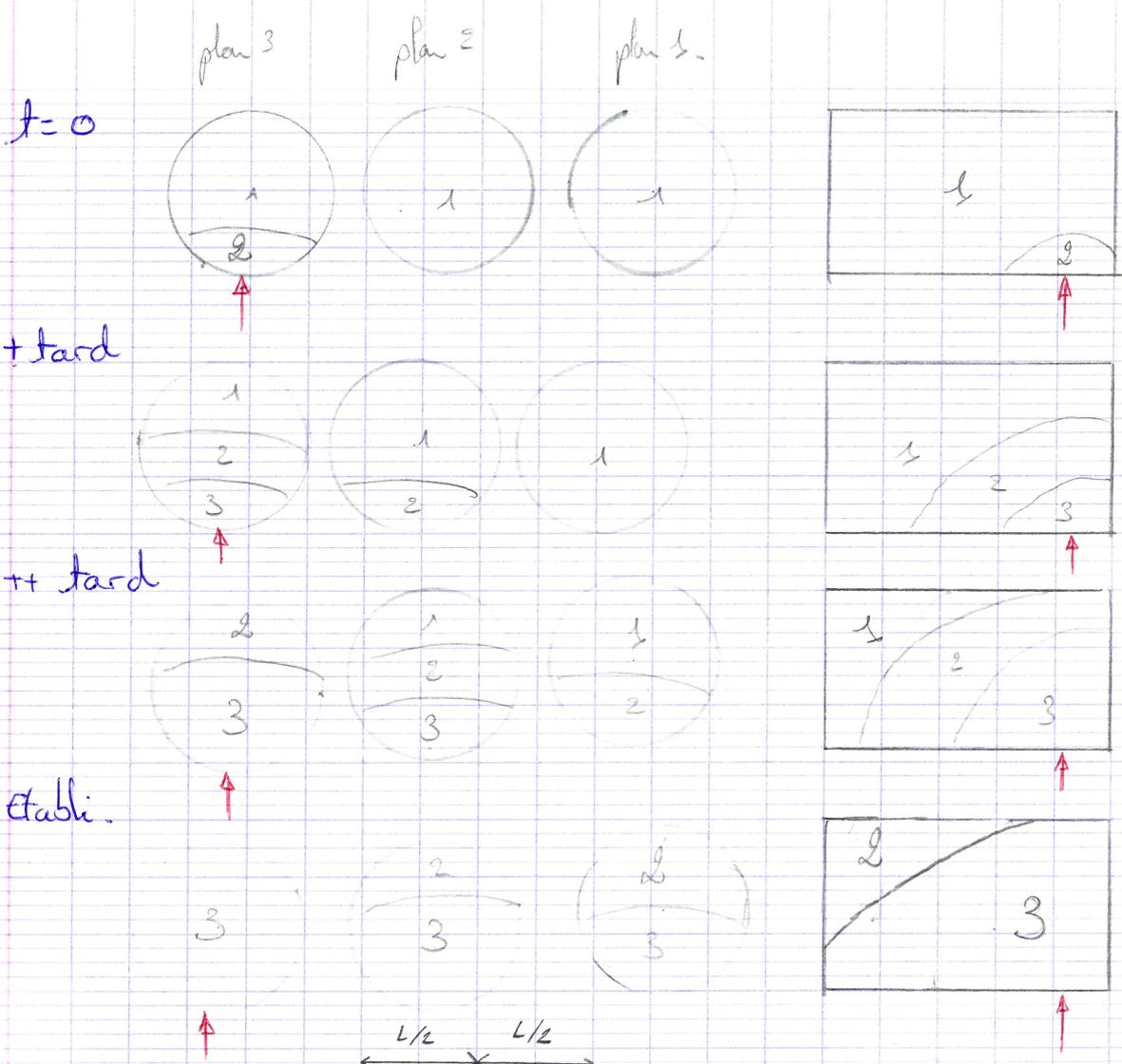
4°/ En considérant les 2 pièces suivantes initialement chauffées à 1000°C et plongées soudainement dans l'air ambiant, pour chacune des pièces,



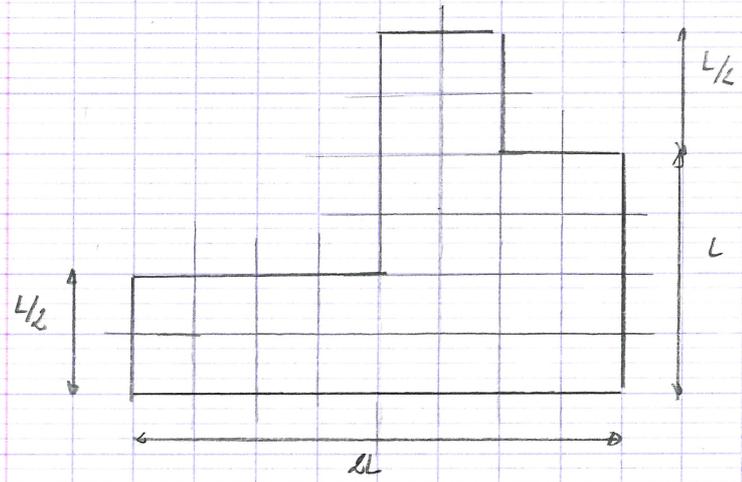
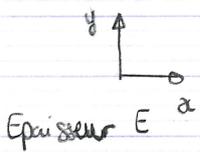
- donner les zones de la pièce qui subissent en premier le refroidissement,
- donner à un instant donné les répartitions de températures dans les plans 1,2,3 et 4 ?
- pour mener une étude 2D, dans quel plan est-il nécessaire de se placer ? à quelles conditions la modélisation sera-t-elle valide ?

Thermiq-
15/01/08.

- 1 : temp 1.
- 2 : temp 2.
- 3 : temp 3.



TD,
19/01/08.

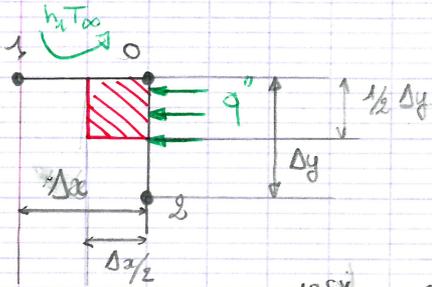


Limite 40 mauds.
 Quel est le maillage minimum sur la piece avec $\Delta x = \Delta y$.

TD 22/01/09. Démonstration formulaire: Nœud de coin extérieur
 Convection sur une face, flux imposé sur l'autre.

Avec q''' .

$$\sum Q^{\text{entr}} + Q^{\text{vol}} = \sum Q^{\text{sort}} \rightarrow \text{Choix: décrire ts entrant: } \sum Q^{\text{entr}} + Q^{\text{vol}} = 0$$



$$\Delta y = \beta \cdot \Delta x.$$

$$Q_{10} + Q_{20} + Q_{\text{surf}} + Q^{\text{vol}} = 0.$$

$$Q^{10cv} + Q^{20cv} + Q^{10cd} + Q^{20cd} + Q^{\text{vol}} = 0$$

$$0 = \frac{h}{\beta} \frac{1}{2} \Delta x \Delta y (T_1 - T_\infty) + h \frac{1}{2} \Delta y \Delta x (T_2 - T_\infty) + \frac{q''}{\beta} \frac{\Delta y \Delta x}{2} + \frac{\beta}{\beta} \frac{\Delta y \Delta x}{2} \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta x} + \frac{\beta}{\beta} \frac{\Delta x \Delta y}{2} \frac{(T_2 - T_0)}{\Delta y} + \frac{q'''}{\beta} \Delta y \Delta x$$

$\Delta y = \Delta x.$

$$0 = \frac{Bi}{2} (T_1 - T_\infty) + \frac{Bi}{2} (T_2 - T_\infty) + \frac{q'' \Delta x}{2k} + \frac{(T_1 - T_0)}{2} + \frac{(T_2 - T_0)}{2} = 0 \quad \times 2.$$

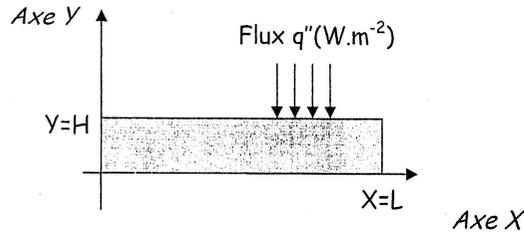
$$\frac{(T_1 + T_2)}{(T_1 + T_2)} + Bi T_1 - Bi T_\infty + Bi T_2 - Bi T_\infty + \frac{q'' \Delta x}{k} - 2T_0 = 0$$

$$k \frac{\Delta y E}{2} \left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right) + k \left(\frac{\Delta x}{2} \right) E \left(\frac{T_2 - T_0}{\Delta y} \right) + q'' \frac{\Delta y E}{2} + h \frac{\Delta x E}{2} (T_\infty - T_0) + q''' \left(\frac{\Delta x \Delta y E}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{\beta} T_1 + T_2 \right) + q'' \frac{\beta \Delta x}{k} + Bi T_\infty + q''' \frac{\beta \Delta x^2}{2k} - \left(\beta + \frac{1}{\beta} + Bi \right) T_0 = 0$$

QUE REPRESENTE EN 3D LE MODELE THERMIQUE 2D?

1°/ Quelle problème 3D est représentée par le modèle 2D suivant :



Face X=0 : symétrie, Face Y=H : convection,
Face X=L : convection, Face Y=0 : isolation parfaite.

2°/ Même question que 1°/

avec l'Axe X qui devient l'axe R,
pour une symétrie de révolution d'axe Y,
Face R=0 : symétrie de révolution, Face Y=H : convection,
Face R=L : convection, Face Y=0 : symétrie.

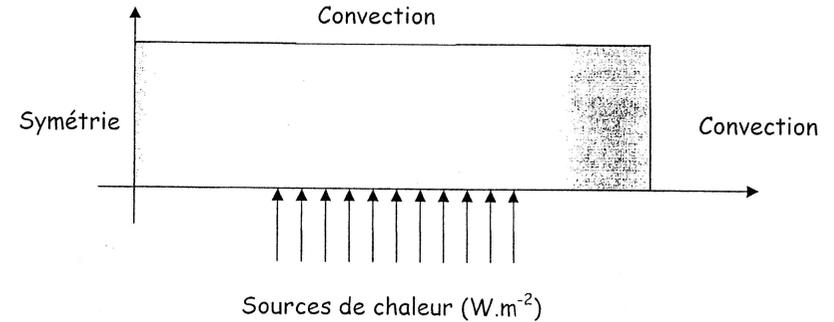
COMMENT MODELISER UNE C.L. REELLE (Perte ou gain de chaleur)?

3°/ quand choisir dans une modélisation d'un problème d'analyse du comportement thermique des structures une condition aux limites de type (Q(W), $q''(W.m^{-2})$, $q'''(W.m^{-3})$ ou T imposée) pour représenter une situation réelle? Quelle pourrait être alors un exemple de la situation réelle modélisée?

4°/ Imaginer une pièce rectangulaire en acier qui sort d'un four où elle a été chauffée à une température uniforme de 1000°C. Si cette pièce est placée par un opérateur sur le sol (cas 1) ou sur un établi (cas 2), quelle serait dans les 2 cas la géométrie à modéliser pour représenter la situation? Préciser alors les conditions aux limites (temporelles et spatiales).

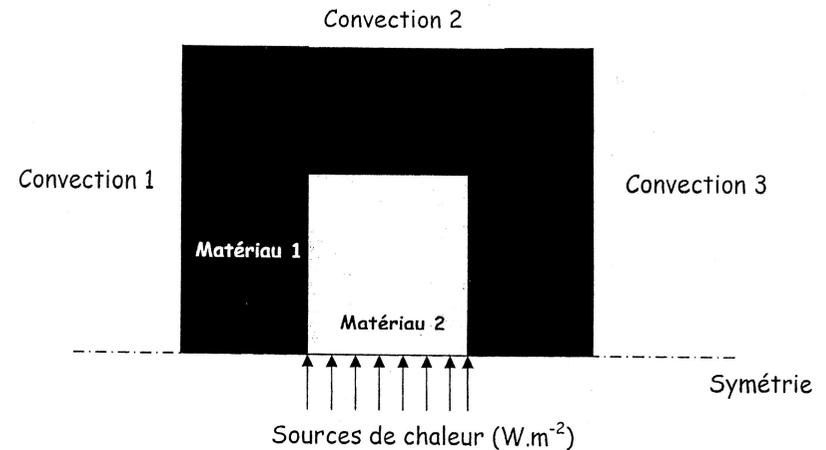
COMMENT VALIDER UN MODELE THERMIQUE COMPLEXE ?

5°/ En régime établi, quelles différences en terme de distribution de température existe-t-il pour la pièce suivante si le matériau qui la constitue est isolant ou conducteur?



6°/ Le problème suivant est à étudier en régime stationnaire.

- imaginer, avec la même géométrie, en changeant les données, d'autres problèmes thermiques pour lesquels vous avez des indications certaines sur la solution en température.
- donner des orientations sur la solution du problème à étudier?

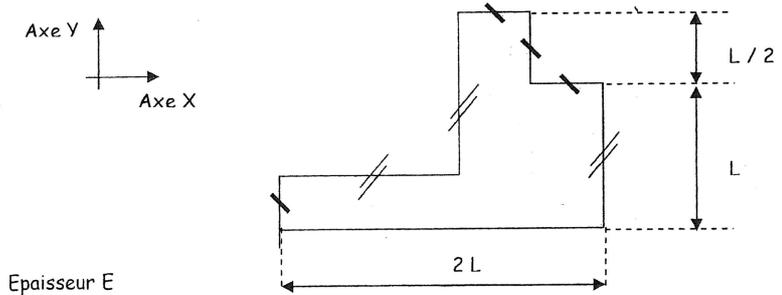


7°/ Dans une analyse thermique en régime transitoire, comment choisir un pas de temps qui permet de trouver l'évolution réelle des températures dans la structure alors que cette évolution est inconnue (≡but du calcul)?

8°/ Est il possible de se tromper sur l'une des données k, ρ, c dans une modélisation en régime transitoire?

COMMENT MAILLER UNE STRUCTURE 2D ?

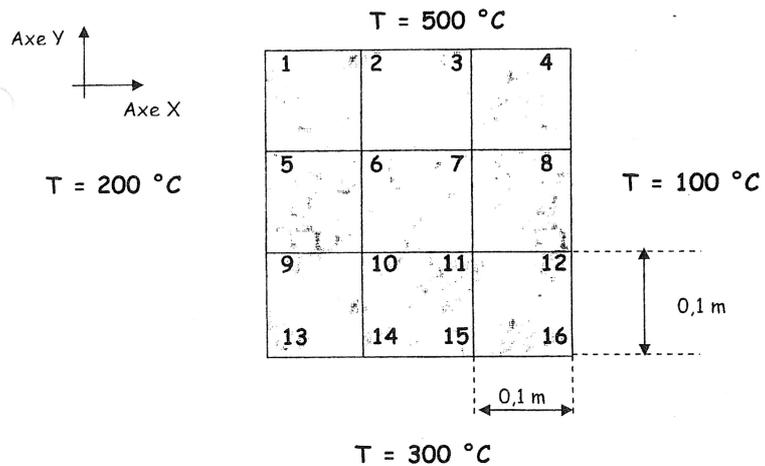
1°/ Le comportement thermique de la structure suivante en conduction stationnaire est à étudier en utilisant la Méthode des Différences Finies. En prenant un pas $\Delta x = \Delta y$, réaliser un maillage de la structure ne dépassant pas les 40 nœuds.



Quel est le maillage minimum avec un pas $\Delta x = \Delta y$?
Quel serait l'intérêt de choisir un pas $\Delta x \neq \Delta y$?

QUEL EST LE SYSTEME A RESOUDRE ?

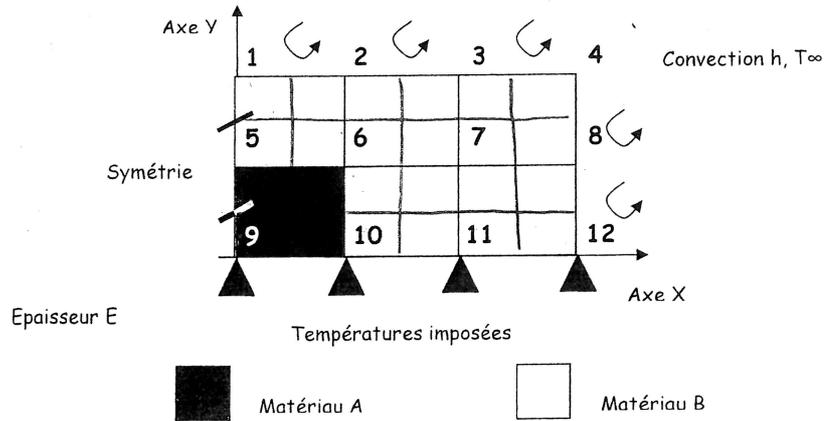
2°/ Résoudre par la méthode de sur-relaxation le problème suivant avec pour critère d'arrêt : tous les résidus sont inférieurs à 1 en valeur absolue.



Largeur = 0.3 m. Hauteur = 0.3 m. Epaisseur E = 1m.

COMMENT PRENDRE EN COMPTE 2 MATERIAUX ?

Le comportement thermique de la structure suivante en conduction stationnaire est à étudier en utilisant la Méthode des Différences Finies.



1 - Pour le maillage D.F., établir les familles de nœuds et la liste des nœuds par famille.

2 - Pour les nœuds 5, 6 établir les équations D.F. en conduction stationnaire en posant $k_A = f k_B$, f coefficient qui sera fixé lors de l'application numérique.

3 - Par chaque famille i de nœuds, définir les coefficients $A_i, B_i, C_i, D_i \dots$ permettant de définir facilement l'équation de la famille i à partir des données d'entrées.

4 - Construire à l'aide des coefficients de la question 3, le système algébrique $[A] \{T\} = \{B\}$ permettant de trouver la solution en températures aux nœuds du maillage D.F.

5 - Comment calculer la quantité de chaleur apportée sur la face $Y=0$ pour maintenir les températures aux valeurs imposées ?

6 - Réaliser l'application numérique à partir de la liste des données d'entrée suivante :

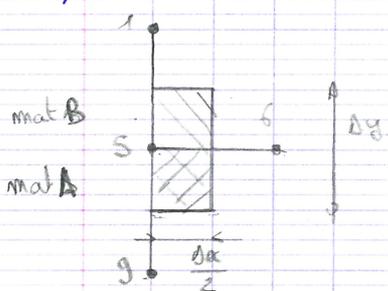
$$\begin{aligned} \Delta x = \Delta y = 10 \text{ cm} & \quad k_A = 60 \text{ W/m/K} & \quad k_B = 20 \text{ W/m/K} \\ h = 200 \text{ W/m}^2/\text{K} & \quad T_\infty = 20^\circ \text{C} \\ T_9 = 200^\circ \text{C} & \quad T_{10} = 150^\circ \text{C} & \quad T_{11} = 100^\circ \text{C} & \quad T_{12} = 50^\circ \text{C} \end{aligned}$$

Comment prendre en compte 2 matériaux ?
symétrie = isolation parfaite

1) familles de nœuds:

- faces convection : 2-3-8
 - coin symétrique : 1.
 - coin convection : 4.
 - Nœud intérieur : 6
 - face conduction symétrique : 5
- ① famille des nœuds int., matériau B: 7
 ② _____, matériau A et B: 6
 ③ _____ de face en convec: 2,3,8
 ④ _____ de coin ext: 2 faces convec: 4
 ⑤ _____ : 1 face convec, 1 face isolée } 4
 ⑥ _____ isolée, mat A & mat B: 5

2) face isolée: on élimine des termes.



$q'' = 0$
 $Q_{56} + Q_{57} = Q_{58} + Q_{59}$ choix:
 $Q_{56} + Q_{57} + Q_{58} + Q_{59} = 0$
 $k_A \times E_x \times \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_6 - T_5}{\Delta x} \right) + k_A \times E_x \times \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_9 - T_5}{\Delta y} \right)$
 $+ k_B \times E_x \times \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_7 - T_5}{\Delta y/2} \right) + k_B \times E_x \times \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_6 - T_5}{\Delta x} \right) = 0$

$$\Rightarrow (T_6 - T_5) + (T_9 - T_5) + \frac{k_B}{k_A} (T_7 - T_5) + \frac{k_B}{k_A} (T_6 - T_5) = 0$$

$$-T_6 + T_9 + \frac{k_B}{k_A} (T_7 + T_6) - \left(2 + 2 \frac{k_B}{k_A} \right) T_5 = 0$$

$$\textcircled{6} \quad T_6 + T_9 + \frac{1}{2} (T_7 + T_6) - \left(2 + \frac{2}{2} \right) T_5 = 0$$

Pour la famille ② :

$$\left(\frac{\beta+1}{2} \right) (T_5 + T_{10}) + (1) (T_2 + T_4) - (3+\beta) T_6 = 0$$

A_2
 B_2
 C_2

$$\left(\frac{\beta+1}{2} \right) T_5 + 1 (T_2 + T_4) - (3+\beta) T_6 + \frac{\beta+1}{2} T_{10}$$

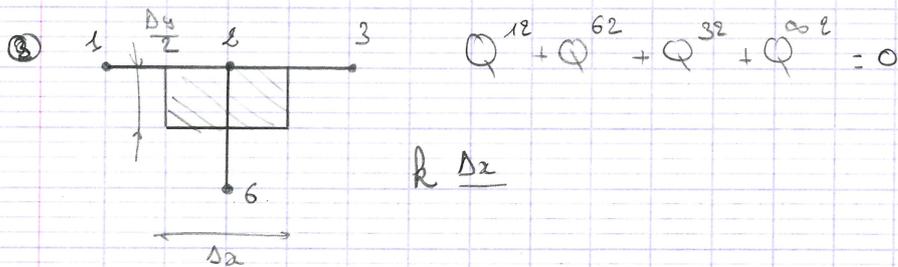
D_2

	1	2	3	4	5	6	7	8		
1	A_6 								T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8	}
2										
3										
4										
5						C_6	B_6			
6		B_2			A_2	C_2	B_2			
7										
8										
									=	$-D_6$ $-D_2$

pour la famille 6:

$$\underbrace{1}_{A_6} T_1 + \underbrace{(1+f)}_{B_6} T_6 - \underbrace{2(1+f)}_{C_6} T_5 + \underbrace{f}_{D_6} T_9 = 0.$$

$$\textcircled{2} T_8 + T_3 + T_6 + T_4 - 4T_7 = 0.$$



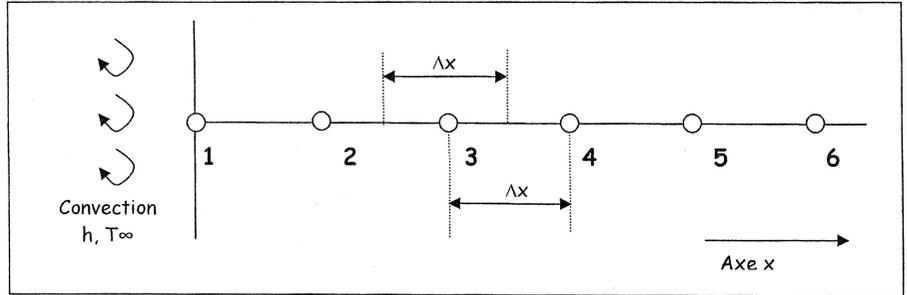
**DES OUTILS 1D
POUR COMPRENDRE en CONDUCTION INSTATIONNAIRE ?**

➤ PARTIE 1 : LE MUR SEMI-INFINI

Il s'agit d'étudier la répartition de températures en conduction instationnaire dans un mur semi-infini initialement à une température uniforme et soumis brutalement à un refroidissement extérieur par l'air ambiant (ceci représente un exemple de choc thermique pour lequel le calcul en conduction instationnaire est nécessaire).

Liste des données d'entrée :

- Géométrie : $x \geq 0$, Pas de discrétisation Δx ,
- Propriétés thermiques du cylindre : k (W/m/°C), α (m²/s)
- Convection : h (W/m²/°C), T_∞ (°C),
- Température initiale : T_0 à $t = 0$ s $\forall x \geq 0$



Objectif : Quelle est l'évolution de température durant les 250 s premières secondes du choc thermique ?

1°/ Mettre en place la Méthode des Différences Finies en formulation explicite sous forme analytique à partir des équations du Formulaire 2.

2°/ Faire l'application numérique avec : $\Delta x = 5$ cm, $k = 40$ W/m/°C, $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $h = 400$ W/m²/°C, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $T_0 = 300^\circ\text{C}$.

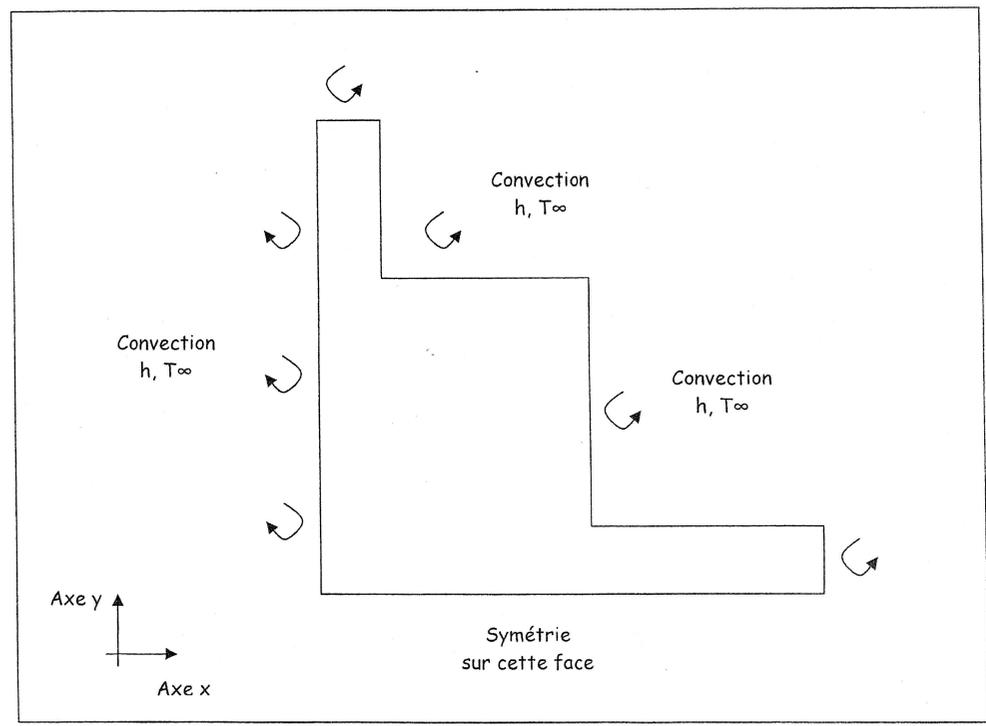
A $t = 250$ s, la solution analytique est pour les nœuds 1 à 5 : $184,3^\circ\text{C}$; $250,0^\circ\text{C}$; $283,3^\circ\text{C}$; $296,1^\circ\text{C}$; $299,3^\circ\text{C}$

3°/ Quelle hypothèse est liée au maillage de la figure ? En conséquence, quand sera-t-il nécessaire de modifier le maillage ?

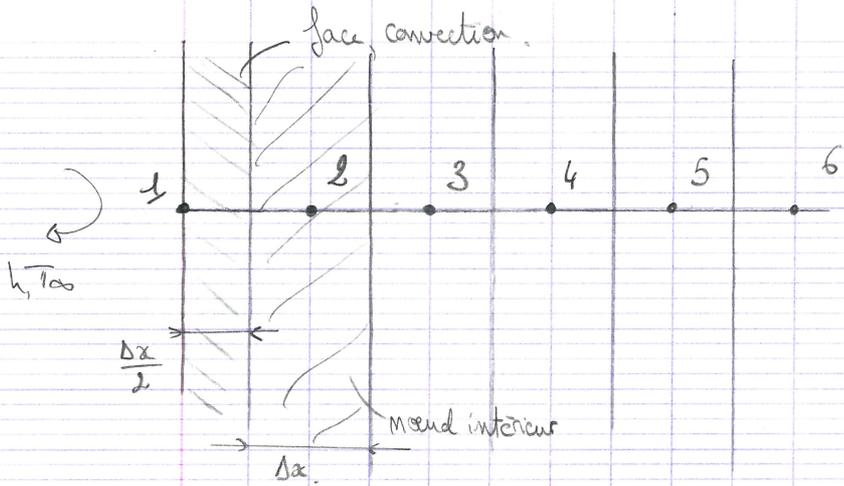
Il est maintenant nécessaire de procéder à l'étude 2D de la pièce de la figure suivante. Cette pièce comme le mur semi-infini de la Partie 1 est initialement à une température uniforme T_0 . Elle subit un choc thermique par refroidissement par convection avec l'air.

Questions :

- dans quelle zone de la pièce et moyennant quelles hypothèses le modèle 1D du mur- semi-infini peut donner une idée de la répartition de température dans la pièce 2D ?
- pouvez vous définir d'autres modèles 1D (géométrie + CL) qui pourraient être mis en œuvre pour se faire une idée des répartitions de températures dans la pièce sans avoir recours à un modèle 2D (ou en complément, en validation ou en pré-étude du modèle 2D) ?



TD Thermique
2/02/09



$$\sum Q_{ext} + \sum_{i=0} Q_{vol} = \sum_{i=0} Q_{sort} + \Delta E_{int}$$

$$\Rightarrow [Q^{12} + Q^{32} + Q^{vol}]^t = \rho V C \left(\frac{T_2^{t+\Delta t} - T_2^t}{\Delta t} \right)$$

$$\left[k(hE) \left(\frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \right) + k(hE) \left(\frac{T_3 - T_2}{\Delta x} \right) \right]^t = \rho V C \left(\frac{T_2^{t+\Delta t} - T_2^t}{\Delta t} \right)$$

$$T_1^t - T_2^t + T_3^t - T_2^t = \frac{\rho \Delta x^2 C}{k} \left(\frac{T_2^{t+\Delta t} - T_2^t}{\Delta t} \right)$$

$$T_2^{t+\Delta t} = F_0 (T_1^t + T_3^t) + T_2^t (1 - 2F_0)$$

avec $1 - 2F_0 \geq 0$

$$F_0 \leq \frac{1}{2}$$

Noeud face, convection.

$$T_1^{t+\Delta t} = 2F_0 (T_2^t + B_1 T_{\infty}^t) + [1 - 2F_0 (1 + B_1)] T_1^t$$

critere : $F_0 \leq \frac{1}{2(1+B_1)}$

Noeud 1 : $T_1^{t+\Delta t} = \underbrace{2F_0}_{A_1} T_2^t + \underbrace{(1 - 2F_0 - 2F_0 B_1)}_{\geq 0} T_1^t + \underbrace{2F_0 B_1}_{C_1} T_{\infty}^t$ $F_0 (1+B_1) \leq \frac{1}{2}$

Noeud 2 : $T_2^{t+\Delta t} = \underbrace{F_0}_{A_2} (T_1^t + T_3^t) + \underbrace{T_2^t}_{B_2} (1 - F_0)$ $F_0 \leq \frac{1}{2}$

Famille 1: Nœud Face convection: 1

Famille 2: Nœud intérieurs: 1, 2, 3, 4, 5

$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix} \right\}^{t+\Delta t} & = & \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & & & \\ A_2 & B_2 & A_2 & & \\ & A_2 & B_2 & A_2 & \\ & & A_2 & B_2 & A_2 \\ & & & A_2 & B_2 \end{bmatrix} & \cdot & \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix} \right\}^t & + & \left. \begin{matrix} C_1 \\ \\ \\ A_2 T_6 \end{matrix} \right\}^t
 \end{matrix}$$

5×1 5×5 5×1 5×1

$$F_0 \leq \frac{1}{2(1+B_1)} \Leftrightarrow \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1+B_1)} \Rightarrow \Delta t_{\max} = \frac{\Delta x^2}{2\alpha(1+B_1)} = 66,666 \dots$$

$$0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{\max}$$

- 1) Fixer $\Delta t = 50 \Delta$.
- 2) n boucles, $n = 5$.

$$\begin{array}{l}
 \cdot F_0 = 0,25 = A_2 \\
 \cdot A_1 = 2 \times F_0 = 0,5 \\
 B_1 = h \Delta x / k = \frac{100 \times 5 \cdot 10^{-2}}{40} = 0,5
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 B_1 = 0,25 \\
 B_2 = 0,5 \\
 C_1 = 2 \times 0,25 \times 0,5 \times 10 = 5 \\
 A_2 T_6 = 180
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix} \right\}^{t+1} = \begin{pmatrix} 230 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} & ; & \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix} \right\}^{t+2} = \begin{pmatrix} 212,5 \\ 282,5 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} & ; & \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix} \right\}^{t+3} = \begin{pmatrix} 199,375 \\ 263,375 \\ 295,625 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

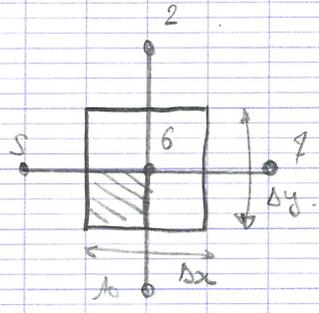
$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix} \right\}^{t+4} = \begin{pmatrix} 189,53 \\ 258,44 \\ 290,16 \\ 298,91 \\ 300 \end{pmatrix} & ; & \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix} \right\}^{t+5} = \begin{pmatrix} 198,60 \\ 249,14 \\ 284,42 \\ 296,99 \\ 299,73 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Thermique
13/02/09
TD

03 27 66 44 00 - M^{me} CATTELOT.
lundi - Vendredi

TD n° 7:

Equation nœud 6:



$$[\sum Q^{ent} + Q^{vol}] = \sum Q^{ext} + DE$$

pas de q''
= 0 choix.

$$[Q^{76} + Q^{26} + Q^{56} + Q^{106}] = \rho CV \left(\frac{T_6^{t+\Delta t} - T_6^t}{\Delta t} \right)$$

$$\frac{k_B (\Delta y) \cancel{\Delta x}}{h_B} \frac{T_7^t - T_6^t}{\Delta x} + \frac{\rho k_B (\Delta x) \cancel{\Delta y}}{k_B} \frac{T_2^t - T_6^t}{\Delta y} + \frac{k_B \cancel{\Delta x} \Delta y}{k_B} \frac{T_5^t - T_6^t}{\Delta x} + \frac{\rho k_A \cancel{\Delta x} \Delta y}{k_B} \frac{T_{10}^t - T_6^t}{\Delta y} + \frac{k_A \cancel{\Delta x} \Delta y}{k_B} \frac{T_{10}^t - T_6^t}{\Delta y} = \rho CV \frac{T_6^{t+\Delta t} - T_6^t}{\Delta t}$$

$\Delta x = \Delta y =: k_A$
 $k_A = k_B$

$$\Rightarrow DE = \left(\rho C A_A \frac{\Delta x}{2} \times \frac{\Delta y}{2} \epsilon + \rho C B \frac{3}{4} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2} \epsilon \right) \left(\frac{T_6^{t+\Delta t} - T_6^t}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{\rho C A_A}{4} + \frac{3}{4} \rho C B \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} (T_6^{t+\Delta t} - T_6^t)$$

il y a 2 matériaux

$$\rightarrow \frac{T_7^t - T_6^t}{2} + \frac{T_2^t - T_6^t}{2} + \frac{T_5^t - T_6^t}{2} + \frac{\rho}{2} (T_5^t - T_6^t) + \frac{\rho}{2} (T_{10}^t - T_6^t) + \frac{T_{10}^t - T_6^t}{2}$$

$$= \frac{(T_6^{t+\Delta t} - T_6^t)}{F_0} \quad \text{avec } \frac{1}{F_0} = \frac{1}{k_B} \left(\frac{\rho C A_A}{4} + \frac{3}{4} \rho C B \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

$$\rightarrow T_7^t + T_2^t + T_5^t \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} \right) + T_{10}^t \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} \right) - T_6^t \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{T_6^{t+\Delta t} - T_6^t}{F_0}$$

$$\Rightarrow \frac{T_6^{t+\Delta t}}{F_0} = \underbrace{F_0 (T_7^t + T_2^t)}_{A_1} + \underbrace{F_0 \left(\frac{1+\rho}{2} \right) (T_5^t + T_{10}^t)}_{B_1} + \underbrace{\left(1 - F_0 (3+\rho) \right)}_{C_1} T_6^t$$

Critère: $(1 - F_0 (3+\rho)) \geq 0$

famille ②: nœud intérieur & matériaux > 6.

$$\begin{array}{l} 1 \geq F_0 (3+\rho) \\ 1 \geq \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (3+\rho) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{1}{(3+\rho)} \geq \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \\ \frac{\Delta x^2}{(3+\rho)} \geq \alpha \Delta t \end{array} \right. \quad \left| \quad \frac{\Delta x^2}{\left(\frac{\rho A_A}{4} + \frac{3\rho B}{4} \right) (3+\rho)} \geq \Delta t.$$

% Entrée les données.

$r_a = ?$	% r_A
$r_b = ?$	% r_B
$k_a = ?$	% k_A
$k_b = ?$	% k_B
$\alpha = ?$	% Δx
$y = ?$	% Δy
$f = ?$	% f

$a = ?$	% ΔA
$b = ?$	% ΔB

% Calcul des coefficients.

$$B_i = h * x / k_b ;$$

% Calcul du Δt_{max} .

$$t_{max} = (x * x) / \left(\left(\frac{a}{4} + \frac{3b}{4} \right) * (3 + f) \right) \quad \% \Delta t_{max}$$

% Afficher

% Affecter Δt .

% Calcul F_0

$$F = \left(\left(\frac{a}{4} + \frac{3b}{4} \right) * t \right) / (x * x)$$

% Remplir A et B.

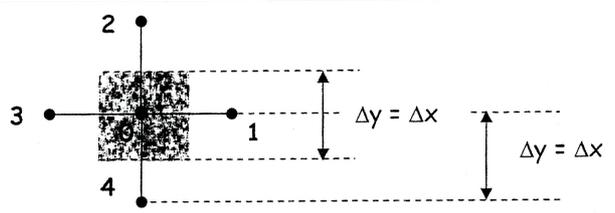
$$A =$$

meurt
qui reproduit le
+ vite.

Formulaire - Méthode des Différences Finies en Conduction Stationnaire

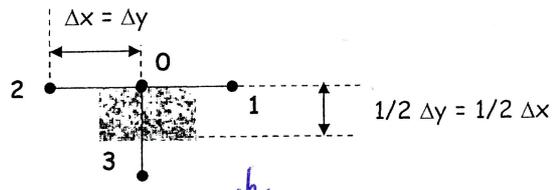
Coordonnées Cartésiennes - Pas de flux interne de chaleur q''' - Discrétisation avec $\Delta x = \Delta y$

❖ Nœud intérieur



$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 = 0$$

❖ Nœud de face



Convection :

$$(T_1 + T_2) / 2 + T_3 + Bi T_\infty - (Bi + 2) T_0 = 0$$

Flux imposé :

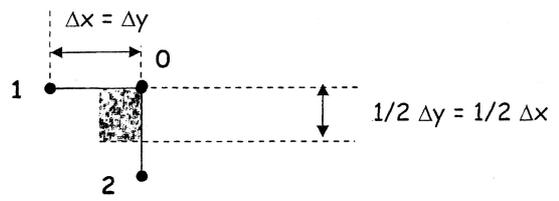
$$(T_1 + T_2) / 2 + T_3 + q'' \Delta x / k - 2 T_0 = 0$$

- Nombre de Biot : $Bi = \Delta x / k$ (sans unité) *$Bi = h \Delta x / k$*
- L'équation de la face isolée se déduit de la face avec la convection ($h=0$ et donc $Bi=0$) ou avec le flux imposé ($q''=0$).

Formulaire - Méthode des Différences Finies en Conduction Stationnaire

Coordonnées Cartésiennes - Pas de flux interne de chaleur q''' - Discrétisation avec $\Delta x = \Delta y$

❖ Nœud de coin extérieur



Convection sur les 2 faces :

$$(T_1 + T_2) / 2 + Bi T_\infty - (Bi + 1) T_0 = 0$$

Flux imposé sur les 2 faces :

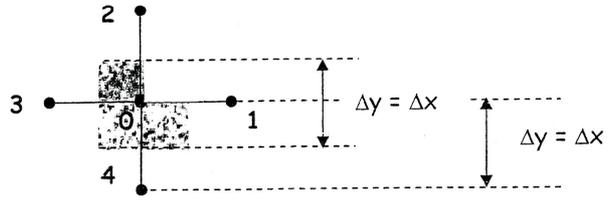
$$(T_1 + T_2) / 2 + q'' \Delta x / k - T_0 = 0$$

Convection sur une face, flux imposé sur l'autre :

$$(T_1 + T_2) + Bi T_\infty + q'' \Delta x / k - (Bi + 2) T_0 = 0$$

- Le coin ext. aux 2 faces isolées se déduit du coin ext. avec la convection ($h=0$ et donc $Bi=0$) ou avec le flux imposé ($q''=0$).
- Le coin ext. avec 1 face en convection, l'autre isolée se déduit du coin ext. avec les deux faces en convection : la convection est 2 fois plus faible et avec $\Delta x = \Delta y$, l'équation s'obtient en divisant les termes en Bi par 2.

❖ Nœud de coin intérieur



Convection sur les 2 faces :

$$(T_1 + T_2) / 2 + T_3 + T_4 + Bi T_\infty - (Bi + 3) T_0 = 0$$

Flux imposé sur les 2 faces :

$$(T_1 + T_2) / 2 + T_3 + T_4 + q'' \Delta x / k - 3 T_0 = 0$$

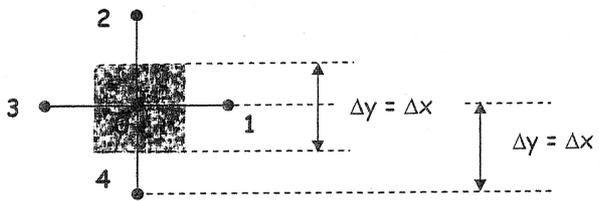
- Le coin int. aux 2 faces isolées se déduit du coin int. avec la convection ($h=0$ et donc $Bi=0$) ou avec le flux imposé ($q''=0$).
- Le coin int. avec 1 face en convection, l'autre isolée se déduit du coin int. avec les deux faces en convection : la convection est 2 fois plus faible et avec $\Delta x = \Delta y$, l'équation s'obtient en divisant les termes en Bi par 2.

Thermique
2/02/03

Formulaire - Méthode des Différences Finies en Conduction Instationnaire - Formulation Explicite

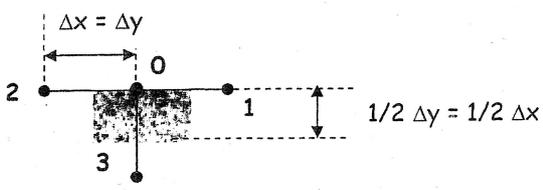
Coordonnées Cartésiennes - Pas de flux interne de chaleur q''' - Discrétisation avec $\Delta x = \Delta y$

❖ **Nœud intérieur**



$T_0^{i+1} = F_0 (T_1^i + T_2^i + T_3^i + T_4^i) + (1 - 4 F_0) T_0^i$
avec $F_0 \leq 1/4$

❖ **Nœud de face**



Convection :
 $T_0^{i+1} = 2F_0 (T_3^i + 1/2 T_1^i + 1/2 T_2^i + Bi T_\infty^i) + (1 - 4F_0 - 2F_0 Bi) T_0^i$
avec $F_0 (2 + Bi) \leq 1/2$

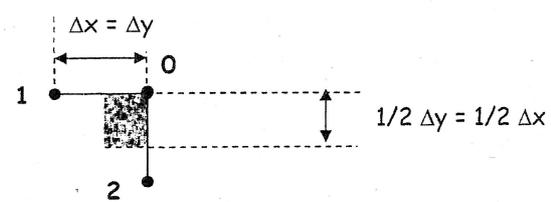
Flux imposé :
 $T_0^{i+1} = 2F_0 T_3^i + F_0 (T_1^i + T_2^i) + 2 F_0 q''^i \Delta x / k + (1 - 4F_0) T_0^i$
avec $F_0 \leq 1/4$

- Nombre de Biot : $Bi = h \Delta x / k$ (sans unité)
- L'équation de la face isolée se déduit de la face avec la convection ($h=0$ et donc $Bi=0$) ou avec le flux imposé ($q''=0$).

Formulaire - Méthode des Différences Finies en Conduction Instationnaire - Formulation Explicite

Coordonnées Cartésiennes - Pas de flux interne de chaleur q''' - Discrétisation avec $\Delta x = \Delta y$

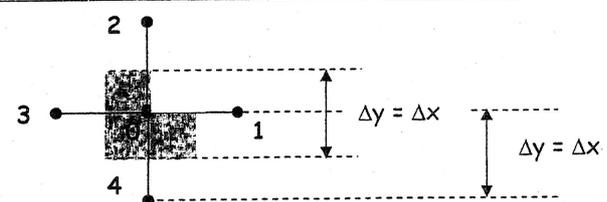
❖ **Nœud de coin extérieur avec convection sur les 2 faces**



$T_0^{i+1} = 2F_0 (T_1^i + T_2^i + 2 Bi T_\infty^i) + (1 - 4F_0 - 4F_0 Bi) T_0^i$
avec $F_0 (1 + Bi) \leq 1/4$

- Le coin ext. aux 2 faces isolées se déduit du coin ext. avec la convection ($h=0$ et donc $Bi=0$) ou avec le flux imposé ($q''=0$).
- Le coin ext. avec 1 face en convection, l'autre isolée se déduit du coin ext. avec les deux faces en convection : la convection est 2 fois plus faible et avec $\Delta x = \Delta y$, l'équation s'obtient en divisant les termes en Bi par 2.

❖ **Nœud de coin intérieur avec convection sur les 2 faces**



$T_0^{i+1} = 4/3 F_0 (T_3^i + T_4^i + 1/2 T_1^i + 1/2 T_2^i + Bi T_\infty^i) + (1 - 4F_0 - 4/3 F_0 Bi) T_0^i$
avec $F_0 (3 + Bi) \leq 3/4$

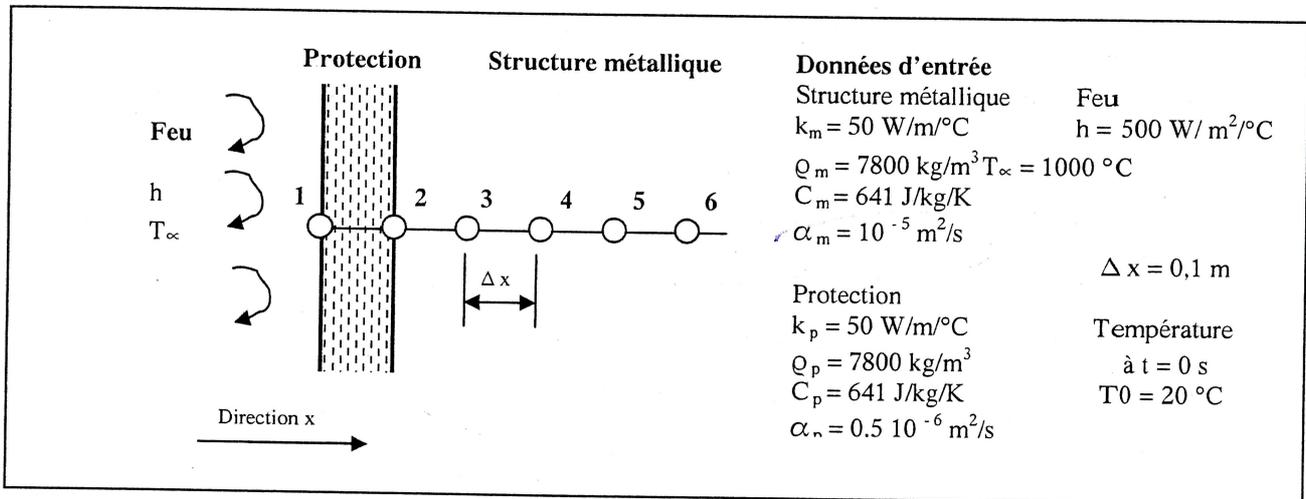
- Le coin int. aux 2 faces isolées se déduit du coin int. avec la convection ($h=0$ et donc $Bi=0$) ou avec le flux imposé ($q''=0$).
- Le coin int. avec 1 face en convection, l'autre isolée se déduit du coin int. avec les deux faces en convection : la convection est 2 fois plus faible et avec $\Delta x = \Delta y$, l'équation s'obtient en divisant les termes en Bi par 2.

Date de l'épreuve : 14 Mai 2009
Mention : Sciences Pour l'Ingénieur
Spécialité et Parcours : Ingénierie Mécanique – C2MAO
Semestre et Session : S6 – session 1
Module : S6MCACTS
Durée de l'épreuve : 2 heures
Matériel : Sans Documents – Calculatrice autorisée

SUJET :

Le problème consiste à étudier l'apport d'une protection sur une structure métallique lors de sa tenue au feu. Le modèle 1D de la Figure ci-dessous va permettre d'estimer l'évolution de températures dans la structure métallique dans la direction x en utilisant la Méthode des Différences Finies en Formulation Implicite.

PARTIE 1 : FORMULATIONS ANALYTIQUES (≡ sans application numérique)



- 1/ Donnez les familles de nœuds et les nœuds associés à chaque famille. (1 point)
- 2/ Pour chaque famille de nœud, construisez pour l'un des nœuds de la famille (à vous de choisir) l'équation en formulation explicite pour le nœud considéré. (9 points)

Pour chaque équation, reprenez impérativement les étapes A, B, C et D, c.a.d :

Etape A- le bilan thermique en Watt : $[\sum Q_{entrant} + Q_{vol}]^{t+\Delta t} = \Delta E$, en considérant toutes les sources de chaleur étant des sources entrant dans le volume, ΔE représentant la variation d'énergie interne faisant intervenir la dérivée par rapport au temps de la température du nœud considéré, $\sum Q_{entrant}$ est développé en tenant compte des apports $Q_{10}, Q_{20}, Q_{30}, \dots, Q_{\infty}, q'''$...

Etape B- la même ligne où sont explicitées toutes les expressions des Q_{i0} avec les températures et les lois de conduction, convection...

...Les lignes intermédiaires de calcul (en occupant un espace très limité)

Etape C- l'équation finale sera donnée sous la forme classique : $T_0^{t+\Delta t} = \dots$ où apparaissent si nécessaire Bi, Fo (correctement définis préalablement).

Etape D- N'oubliez pas le critère associé à l'équation.

Nota : On posera $f = k_m/k_p$, F_o^m pour le Nombre de Fourier avec la structure métallique seule, F_o^p pour le Nombre de Fourier avec la protection seule, F_o^{pm} le Nombre de Fourier avec la structure métallique et la protection. Pour le reste, les notations à utiliser sont définies à droite de la Figure.

3 / Déterminer pour l'ensemble des noeuds l'expression du Δt_{\max} en fonction des données d'entrée du problème. (2 points)

4 / Construisez le système $\{T_n\}^{t+\Delta t} = [A] \{T_n\}^t + \{B\}$. (2 points)

Utilisez des lettres $A_i, B_i, C_i \dots$ pour désigner les coefficients de la famille i qui vont intervenir dans la matrice $[A]$ et dans le vecteur $\{B\}$ (selon les méthodes utilisées en Cours, TD et TP-Projet).

PARTIE 2 : RESOLUTION (\equiv applications numériques)

En tenant compte des données d'entrée et de leurs valeurs numériques, calculer l'évolution de ~~températures dans la structure métallique dans les premiers instants où le feu se déclenche.~~

L'ensemble des noeuds aura à $t = 0$ s une température uniforme $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

(6 points)